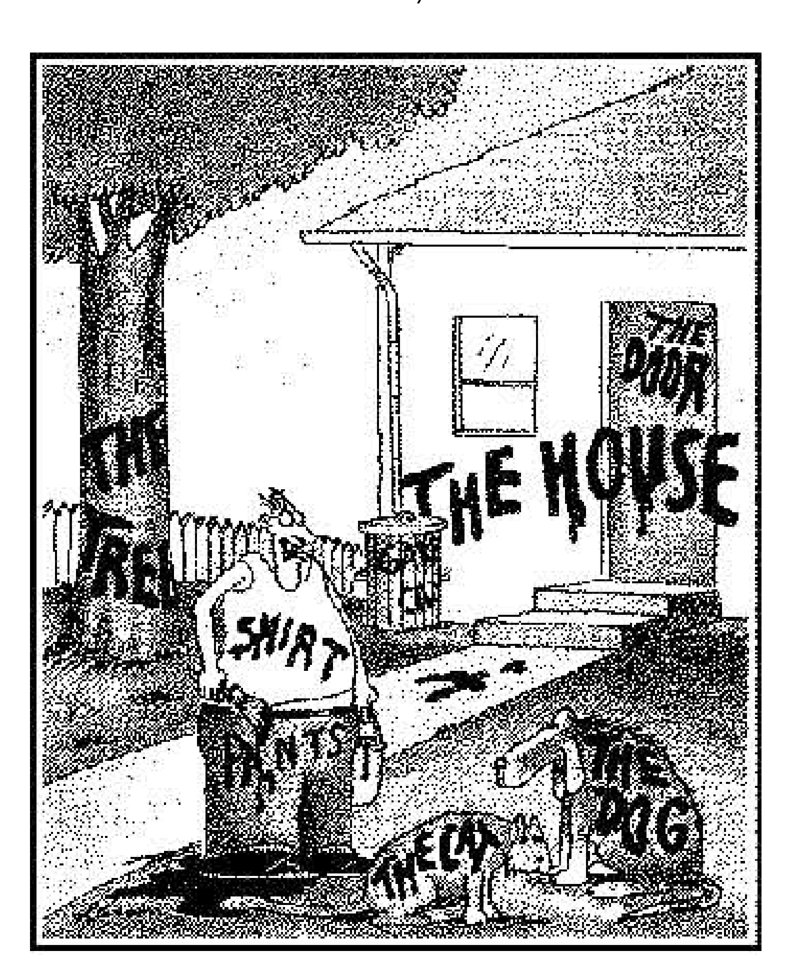
Introduction à la logique

La logique classique des propositions et des prédicats

Philipp Keller

Département de Philosophie, Université de Genève

2007



"Now! ... That should clear up
a few things around here!"

Préface

Il est toujours aisé d'être logique. Il est presque impossible d'être logique jusqu'au bout.
Albert Camus, *Le mythe de Sisyphe*

Au-delà des outils, de la 'technique' nécessaire à l'utilisation de la logique propositionnelle et des prédicats, cette introduction à la logique se propose d'envisager la logique en relation avec la linguistique et les mathématiques contemporaines, mais également de présenter un de ses champs d'application, la philosophie du langage, elle-même étroitement liée à son développement. En premier lieu, cet ouvrage introduit les notions centrales de la logique propositionnelle et de la logique des prédicats classique en présentant trois manières de prouver des théorèmes : le calcul axiomatique, tel qu'il a été formulé dans la tradition Hilbertienne par Bertrand Russell et Alfred Whitehead ; la méthode des arbres (ou tableaux analytiques), développée par Evert Willem Beth, Raymond Smullyan et Jaakko Hintikka, et le calcul de déduction naturelle, inspiré par Gerhard Gentzen. Le présent ouvrage vise, en second lieu, à familiariser le lecteur avec les principaux développements en sciences formelles du siècle dernier, en se focalisant sur les distinctions cruciales entre syntaxe et sémantique et entre langage objet et méta-langage. Ceci devrait fournir au lecteur les outils essentiels pour comprendre les discussions contemporaines en philosophie et en linguistique, toutes deux tributaires de la grande révolution conceptuelle qu'ont traversée les mathématiques du vingtième siècle. Troisièmement, une introduction à la logique serait incomplète si elle ne donnait pas au moins une idée des enjeux fondamentaux de la philosophie du langage contemporaine. Le développement de la logique moderne, en particulier chez Gottlob Frege, fut fortement motivé et influencé par des considérations philosophiques : la logique moderne a tant déterminé la forme que la substance des principaux débats en philosophie du langage.

Cette méthode se distingue des autres introductions à la logique disponibles, notamment de celles de François Lepage (1991) et de Willard van Orman Quine (1971), par la quantité de sujets qu'elle prend en compte et par sa mise en relief des problèmes philosophiques spécifiques à la logique. Bien que j'aie énormément profité de l'excellent ouvrage de Lepage, j'ai tenté ici de mettre d'avantage en valeur les motivations philosophiques et mathématiques sous-jacentes à l'étude de la logique. De plus, j'aborde de manière plus approfondie les propriétés métalogiques des calculs présentés. Pour ce qui est des différences entre cette méthode et l'ouvrage de Quine, celles-cis concernent plus la forme d'exposition que le contenu présenté, étant donné que la présente méthode se veut moins idiosyncratique que celle de Quine.

Cette introduction à la logique est écrite dans une langue qui (espérons-le) s'approche mais ne coïncide pas avec le français. En effet, la signification donnée à des mots du langage ordinaire (tels que : "proposition", "validité", "solidité"), et au vocabulaire technique -souvent inspiré de l'anglais (également technique) diverge de l'utilisation courante de ces mots dans la langue française. Pour cette raison, j'ai choisi d'ajouter un glossaire comportant les explications "informelles" de ces notions.

Bien que cette introduction ait été écrite pour les étudiants en philosophie, elle devrait également susciter l'intérêt des linguistes, des informaticiens et des mathématiciens. Elle peut être lue et étudiée de manière autonome, puisque les exercices nombreux permettent un contrôle continu du progrès dans l'apprentissage. Cette introduction peut, finalement, être utilisée pour la création d'un cours universitaire de niveau élémentaire ou intermédiaire.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 De l'importance de la logique pour la philosophie en général

La logique est l'étude de l'art de bien penser (cf. Arnauld et Nicole 1662). Elle est aussi fondamentale à la philosophie qu'aux mathématiques et a une très longue histoire, remontant à Aristote. Les commentateurs d'Aristote ont regroupé plusieurs de ses oeuvres sous le titre "Organon" ("instrument"), comprenant les *Catégories*, où il expose les fondements métaphysiques de sa théorie des phrases, *De l'Interprétation* (Aristote 2000a), où il distingue les différentes parties d'une phrase, les *Premiers* et *Deuxièmes Analytiques* (Aristote 1992 2000b), où il expose les règles et les formes des inférences ("syllogismes") et, en particulier, des syllogismes nécessaires, et les *Topiques* et *Réfutations Sophistes* (Aristote 1997ab) qui traitent des paralogismes et des arguments dont les prémisses ne sont que probables. Ces premiers exemples d'une logique formelle ont eu une influence considérable dans l'histoire de la philosophie et de la pensée scientifique en général. Plus de deux mille ans après, Kant pensait encore qu'Aristote avait découvert tout ce qui était à connaître en logique (Kant 2001: B VIII) et un historien de la logique du dix-neuvième siècle, Karl von Prant, a affirmé que les logiciens qui, après Aristote, avaient trouvé quelque chose de 'nouveau' étaient tous confus, stupides ou pervers (von Prantl 1855–1870).

Cette situation a fondamentalement changé avec l'avènement de la logique moderne, découverte en grande partie par le mathématicien et philosophe allemand Gottlob Frege (1848–1925), puis développée par Bertrand Russell, Alfred Whitehead, Ludwig Wittgenstein et d'autres.[1] Comme conséquence des découvertes de Frege, et en parallèle avec les développements des systèmes formels par Schröder, Pierce, Peano, de Morgan, Russell, Whitehead etc., la logique est devenue une pierre angulaire de la philosophie et des mathématiques, et plus récemment elle l'est aussi devenue pour la linguistique et l'informatique.

En tant que branche des mathématiques, la logique a joué un rôle décisif dans le développement des mathématiques modernes, caractérisées par une rigueur inconnue aux siècles précédents. Cette rigueur se manifeste dans l'utilisation de la méthode axiomatique généralisée à presque tous les domaines des mathématiques contemporaines. C'est grâce à la méthode axiomatique et à des notions rigoureuses telles que "preuve" ou "déductibilité" que les études métamathématiques sont devenues possibles (le développement à l'aide de la logique, d'une théorie des systèmes mathématiques et de leurs propriétés

[1] Nous reviendrons sur l'histoire du développement des mathématiques modernes à la p. 72.

formelles). De pair avec la théorie des ensembles, à laquelle elle est étroitement liée, la logique forme ce qu'on appelle "les fondements des mathématiques". Elle fait aujourd'hui partie de toute formation mathématique.

Nous avons dit que la logique avait surtout aidé à développer une notion de "preuve" (rigoureuse). En voici un exemple :

Théorème 1. *Il y a des nombres transcendants (= non-rationnels) a et b tels que a^b est rationnel.*

Preuve Considérons le nombre réel $c := \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.[2] Soit il est le cas que $c \in \mathbb{Q}$ (que c est rationnel), soit il est le cas que $c \notin \mathbb{Q}$ (que c est transcendant). Nous prouvons que dans les deux cas, il y a des nombres transcendants a et b tels que a^b est rationnel.

1. $c \in \mathbb{Q}$. Alors nous mettons $a := \sqrt{2}$ et $b := \sqrt{2}$, comme $\sqrt{2}$ est transcendant. Nous avons : $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = c$, ce qui, sous cette supposition, est un nombre rationnel.
2. $c \notin \mathbb{Q}$. Alors nous mettons $a := c$ et $b := \sqrt{2}$, comme c et $\sqrt{2}$ sont transcendants. Nous avons :

$$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

Comme $a^b = 2$ et 2 est un nombre rationnel, l'affirmation qui est à prouver est également vraie dans ce dernier cas. □

Notons quelque caractéristiques de ce raisonnement : nous remarquons, d'abord, que l'affirmation "y a deux nombres qui satisfont une description" est prouvée sans donner des exemples de tels nombres (c'est pour cela que cette preuve particulière est appellée "non-constructive") ;[3] en deuxième lieu, la preuve pose un choix exclusif et exhaustif (soit il est le cas que $c \in \mathbb{Q}$, soit non) et montre la vérité de ce qui est prouvé dans les deux cas ;[4] ; troisièment et d'une importance particulière, le raisonnement est tel que nous ne discernons aucune lacune : chaque assertion "s'ensuit" des précédentes et aucune présupposition tacite ou implicite n'est faite.

Un argument n'est la *preuve* d'une assertion que si cette assertion *s'ensuit* de l'argument. Notre preuve *démontre* le théorème parce qu'elle exclut la possibilité qu'il soit faux. C'est la logique qui étudie cette relation de *conséquence logique*, de ce qui est prouvé à sa preuve, ou encore entre des prémisses et leur conclusion.

En tant que branche de la philosophie, la logique s'intéresse aux arguments et essaie de distinguer les arguments formels des autres. Un argument est un argument formel (où une "inférence") s'il est convaincant (s'il l'est) en vertu de la signification de certains mots qu'il contient : sa 'force' réside alors exclusivement dans la signification de certains mots. Dans le cas où ces mots sont des mots "logiques", l'argument est appelé *"inférence logique"*. Dans les autres cas, il s'agit d'une *inférence matérielle*. Dans le cas où l'argument *est* convaincant (tel que quelqu'un qui accepte ses prémisses est rationnellement obligé d'accepter sa conclusion), l'inférence logique est appelée *"valide"*.[5] Pour un argument valide, il n'est pas requis que quelqu'un accepte ses prémisses *dans les faits* : il suffit que, s'il acceptait les

[2]Nous utilisons ici le symbole ":=" comme signe d'une identité définitionnelle, c'est-à-dire pour indiquer que l'expression "c" servira comme abbréviation de "$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$".

[3]Nous reviendrons, à la p. 77, sur cette notion et son importance pour les intuitionnistes.

[4]Nous allons discuter cette forme de preuve sous le nom d'"élimination de la disjonction" aux pp. 109 et seq. dans le ch. 6.

[5]Comme nous le verrons par la suite (cf. p. 95), "accepter" doit être construit ici dans un sens large, distinguant l'acceptation qui peut être dispositionnelle de l'assentiment qui est un évènement d'ordre psychologique.

prémisses, il devrait aussi accepter la conclusion.[6] C'est dans ce sens-ci que la logique ne traite pas directement des vérités (simples), mais de leurs interconnexions : plutôt que de poser la question de savoir si telle ou telle phrase simple est vraie, elle interroge les structures formelles de la phrase pour voir si celle-ci pourrait être vraie au cas où telle ou telle autre phrase l'était.[7]

Voici un exemple d'un argument :

P Tous les corbeaux observés étaient noirs.
C Donc, tous les corbeaux sont noirs.

Nous distinguons une prémisse (**P**) et une conclusion (**C**), introduite par "donc".

Il s'agit ici d'un argument convaincant (supposons), mais qui convainc en vertu de son contenu et non pas de sa forme. Il est possible qu'un argument de la même forme ne soit pas convaincant – il se peut, par exemple, que je n'aie rencontré que des professeurs de philosophie qui sont des hommes ; néanmoins, je ne suis pas justifié à en conclure que tous les professeurs de philosophie sont masculins. L'argument des corbeaux et convaincant, mais ne l'est pas en vertu de la signification des mots qu'il contient. Comparons l'argument des corbeaux avec un argument formel (une inférence) :

P Denis est le mari de Annette.
C Donc, Denis est un homme.

Cet argument est convaincant en vertu de la signification du mot 'non-logique' "mari" et constitue donc ce qu'on appelle une "inférence matérielle" ("matérielle" parce que le mot "mari" n'est pas un mot 'logique').[8] Un argument formel est convaincant en vertu de la signification des mots 'logiques' qu'il contient :

P1 Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage.
P2 J'étudie la logique.
C Donc, je serai heureux et sage.

Les mots logiques en question ici sont "si ... alors $\cdots$" et cet argument est une inférence formelle : la conclusion ("je serai heureux et sage") *s'ensuit* des deux prémisses et en 'découle' grâce à la signification des mots "si ... alors $\cdots$" contenus dans la première prémisse.

Les différents systèmes de logique se distinguent dans leurs choix de 'mots logiques'. La logique standard propositionnelle ne considère comme 'mots logiques' que les connecteurs propositionnels (des connecteurs qui relient des phrases entières) tels que :

- "... et $\cdots$",
- "... ou $\cdots$",
- "il n'est pas le cas que ...",
- "si ... alors $\cdots$",
- "... ssi $\cdots$" (= "... si et seulement si $\cdots$").

La 'logique propositionnelle' (logique des phrases) étudie donc la structure logique des phrases comme "Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage", "Il n'est pas le cas que Socrate soit mortel et ne soit pas mortel", "Socrate est mortel si et seulement s'il n'est pas le cas qu'il ne soit pas mortel" et ainsi de suite.[9] La logique standard des prédicats considère, d'autre part :

[6] C'est pour cela que la validité est souvent caractérisée en termes de nécessité : un argument est valide si ses prémisses sont telles que *si* elles sont vraies, alors la conclusion *doit* l'être aussi.

[7] Nous discuterons ce point fondamental d'avantage à la p. 29.

[8] Je mets "logique" entre 'guillemets simples' pour indiquer qu'il s'agit d'une notion intuitive qui doit être relativisée à un calcul pour recevoir un sens déterminée.

[9] Je mets "logique propositionnelle" en "scare quotes" pour indiquer qu'il s'agit d'une terminologie malheureuse : la logique

- les quantificateurs ("pour tous ... il est le cas que $\cdots$", "il y a au moins un ... tel que $\cdots$"),
- les signes pour des relations (par ex. "... est identique à $\cdots$") et
- les signes pour des fonctions (par ex. "la mère de ....").

La logique des prédicats étudie la structure logique des phrases comme "il y a au moins un être mortel", "Socrate est un étudiant de Platon", "l'enseignant de Socrate est identique à Aristote" etc. Par "structure logique" d'une phrase nous entendons ici le 'squelette logique' de la phrase, ce qui appartient à sa *syntaxe* et non pas à sa *sémantique* qui dépend pour sa part des signification des mots. La logique des prédicats est appelée ainsi parce qu'elle permet le traitement logique des expressions sub-sententielles (plus petites que des phrases entières, p. ex. les termes singuliers (noms) et les prédicats).[10]

Il existe d'autres types de logiques destinées à examiner le comportement 'formel' d'autres mots et qui se basent en grande partie sur la logique des propositions et sur celle des prédicats. L'inférence

P Il est nécessaire que Socrate soit un homme.
C Donc, Socrate est un homme.

fait partie du domaine de la logique modale (la logique des expressions modalisées comme "il est nécessaire que ...", "il est possible que ...", "il est impossible que ..."). La logique modale sert de modèle pour beaucoup d'autres logiques, notamment les logiques épistémiques et déontiques.[11]

Un argument tel que

P Paul sait que la philosophie le rend heureux.
C Donc, la philosophie rend Paul heureux.

est examiné par la logique épistémique (la logique du savoir) qui traite l'expression "Paul sait que ..." comme 'logique'. La logique épistémique est parfois combinée avec la logique doxastique (la logique des croyances) qui traite des expressions comme "Paul croit que ..." (pour lesquelles une telle inférence n'est pas permise). En langage technique, nous disons que l'opérateur "x croit que ...", contrairement à "x sait que ..." n'est pas véridique, c'est-à-dire n'implique pas la phrase qui remplace les "...".

Un autre opérateur qui n'est pas véridique est "il est obligatoire que $\ldots$". Le logique déontique (la logique des obligations) concerne des inférences telle que

P Il est obligatoire que Sam aide cet homme perdu.
C Donc, Sam peut aider cet homme perdu.

qui sont des cas spéciaux du principe général qu'une obligation à faire quelque chose implique la capacité et la possibilité de la faire.

La logique n'est pas seulement une branche des mathématiques et de la philosophie, mais elle forme une base pour ces disciplines. Les mathématiciens de toutes les branches cherchent à prouver des théorèmes et leurs preuves doivent satisfaire aux conditions logiques communément acceptées. La philosophie est la science des arguments et les arguments en philosophie sont (ou, au moins, devraient être) évalués et construits à l'aide de la logique. Cette influence de la logique sur la manière dont les problèmes philosophiques sont posés et résolus est particulièrement manifeste en philosophie du langage. C'est à l'influence de la philosophie du langage sur la philosophie contemporaine que la

propositionnelle n'est pas la logique des propositions (au moins si on entend par cela les *contenus* de phrases, cf. le glossaire à la p. 347), mais la logique des phrases.

[10] Cette caractérisation des différentes logiques selon les types d'unités verbales' dont elles s'occupent doit être utilisée avec précaution : il est tout à fait possible, p. ex., de formaliser "Socrate est un étudiant de Platon" en logique propositionelle par "p". Le problème est alors que cette formalisation 'perd' (est incapable d'expliquer la validité de) quelques inférences comme celle de "Socrate est un étudiant de Platon" à "Il y a au moins un étudiant de Platon".

[11] Nous parlerons des logiques modales, épistémiques, temporelles et de prouvabilité dans le ch. 14.

logique doit son statut crucial.

1.2 De l'importance de la logique pour la philosophie contemporaine

La philosophie contemporaine est née en 1879 avec la parution de l'"Idéographie" de Gottlob Frege (Frege 1879).[12] Dans cet ouvrage, le mathématicien allemand Frege a essayé de développer un langage formel et symbolique pour la formalisation des mathématiques. Avec cet objectif, il a inventé le premier calcul d'une logique de prédicats, effectuant ainsi une révolution en logique. La révolution de Frege était en même temps une révolution en philosophie du langage et en mathématiques. Les difficultés qu'il a rencontrées l'ont mené (i) à la distinction cruciale entre le sens et la référence (dénotation) d'un mot, effectuée dans un article intitulé "Sinn und Bedeutung" ("sens et dénotation") (Frege 1892b), (ii) au développement d'une ontologie réaliste des objets abstraits dans "Der Gedanke" ("la pensée") (Frege 1918a) et (iii) à la découverte, par Bertrand Russell dans l'ouvrage principal de Frege, "Grundgesetze der Arithmetik" ("lois fondamentales de l'arithmétique") (Frege 1893 1903), du paradoxe des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes[13] – ainsi qu'à la naissance des mathématiques axiomatiques. Basée sur les travaux de Frege en philosophie du langage, l'analyse des descriptions définies de Russell (1905) représente l'exemple paradigmatique de la philosophie du langage du début du vingtième siècle.

L'école de Vienne, menée par Carnap et Schlick, utilisait, dans les années vingt et trente, des outils développés par Frege et Russell pour une critique du néo-kantianisme et de la phénoménologie (Carnap 1928ab 1931; Schlick 1925). Le premier Wittgenstein (1922) leur a ouvert la voie avec son *Tractatus Logico-Philosophicus.* Quant à la sémantique de Carnap, elle a reçu sa forme canonique dans son livre "Meaning and Necessity" (Carnap 1947) qui présentait pour la première fois une sémantique des opérateurs modaux (comme "nécessairement"/"il est nécessaire que" et "possiblement"/"il est possible que").

A partir des années trente, Willard van Orman Quine (1950 1953 1960 1970) a été le principal philosophe à se manifester fermement pour une nouvelle conception de la philosophie, plus scientifique et rigoureuse, prenant comme modèle les travaux de Frege. Ses disciples Donald Davidson (1980 1984) et Hilary Putnam (1975ab) ont fait des États-Unis le centre de la philosophie contemporaine.

Dans les années soixante, le 'tournant' vers la logique et la philosophie du langage était considéré comme le trait caractéristique de la philosophie du vingtième siècle. Richard Rorty (1967), dans une collection intitulée "The Linguistic Turn", l'a défini comme suit :

> "I shall mean by "linguistic philosophy" the view that philosophical problems are problems which may be solved (or dissolved) either by reforming language, or by understanding more about the language we presently use. This view is considered by many of its proponents to be the most important philosophical discovery of our time, and, indeed of the ages." (Rorty 1967: 3)[14]

Cette nouvelle importance donnée à la philosophie du langage se manifeste dans la redéfinition du but même de la recherche philosophique : la question socratique "Qu'est-ce que x ?" est remplacée

[12] La "Begriffsschrift" ("écriture de concepts"), le premier ouvrage en logique moderne, a récemment été traduite en français comme Frege (1999).

[13] Nous reviendrons sur ce paradoxe et d'autres paradoxes de la même famille à la p. 231 dans le ch. 15.

[14] "Je signifie par "philosophie du langage" la vision que les problèmes philosophiques sont des problèmes qui devraient être résolus (ou dissolus) soit en réformant le langage, soit en comprenant davantage du langage que nous utilisons aujourd'hui. Cette vision est considérée par beaucoup de ses tenants être la découverte philosophique la plus importante de notre temps, et, même, de toutes les époques."

par “Qu’est-ce que la signification de “x” ?”. Strawson et Austin l’ont fait pour ce qui est du problème de la vérité (Strawson 1949; Austin 1961). Quine, dans un article célèbre “On what there is” (Quine 1948), proposa de remplacer la question de savoir si a existe par la question de savoir si “a” possède un référent ou bien si une phrase telle que “Fa” est formalisée à l’aide d’une variable liée par un quantificateur (comme “il y a un x qui est (identique à) a et F”). Même si nous pouvons constater aujourd’hui et depuis les années soixante-dix un certain ‘retour à la métaphysique’, la philosophie du langage et la logique sont demeurées au centre de toute éducation philosophique.

Dans l’oeuvre de Frege, déjà, la connection entre la logique et la philosophie du langage était très étroite. Dans “Sens et dénotation” (Frege 1892b), Frege fait la distinction entre le sens (“Sinn”, “sense”) et la référence (ou dénotation, “Bedeutung” en allemand, “reference” en anglais) d’un terme singulier. Selon lui, un terme singulier comme “l’actuel président des Etats-Unis” a comme référence un individu spécifique, c’est-à-dire George W. Bush dans notre cas, et comme sens une condition que cet individu doit remplir pour être le référent du terme, c’est-à-dire *être le président des Etats-Unis*. En distinguant entre la référence et le sens des termes singuliers, Frege pouvait donner un critère pour l’extensionnalité des contextes linguistiques : un contexte linguistique (une phrase) est “extensionnel” s’il permet l’intersubstituabilité de termes singuliers co-référentiels (ayant la même référence, mais pouvant avoir des sens différents) *salva veritate* (c’est-à-dire en préservant la valeur de vérité de la phrase entière). Ce sont les contextes extensionnels qui peuvent être formalisés par la logique des prédicats.

La distinction entre sens et référence est davantage controversée en ce qui concerne les prédicats (“termes généraux”). Dans la théorie originale de Frege, la référence d’un prédicat comme “... est bleu”, est le concept (“Begriff” en allemand) BLEU, bien que la plupart des auteurs contemporains qui se considèrent “Frégéen” suivent Carnap (1947) en prenant la référence ou dénotation d’un prédicat pour son extension, c’est-à-dire l’ensemble des choses auxquelles il s’applique (les choses bleues dans notre exemple) et identifient le concept avec le sens ou l’intension : la fonction qui détermine quels objets, dans une situation donnée, sont les choses bleues. Le sens de “...”, par conséquent, sera une fonction qui, appliquée à une situation quelconque (ou même à un ‘monde possible’) nous donne l’ensemble de toutes les choses qui, dans cette situation, sont bleues.

Frege identifiait la référence d’une phrase à sa valeur de vérité et son sens à ce qu’il appelait “une pensée” (“Gedanke” en allemand). Aujourd’hui, cependant, la conception que la référence (ou le vérifacteur) d’une phrase est un état de choses ou un fait (tel que *cette tomate devant moi est rouge*) et que son sens est une “proposition” (“proposition” en anglais), c’est-à-dire le contenu exprimé par une phrase bien-formée, déclarative et non-ambigüe.[15]

1.3 Les arguments formellement valides

La philosophie étant la science des arguments, la logique est l’étude des inférences valides. Ce qui oppose la logique à d’autres domaines de la philosophie est qu’elle essaie explicitement de distinguer les *arguments formels* des autres arguments et ne s’occupe que des premiers, de leur forme en particulier. Voici une manière de définir ces termes : Un discours est un raisonnement s’il essaie de justifier (et par

[15]Les propositions ou contenus de phrases peuvent ou non être identifiées avec des pensées, si (à la différence de Frege) par “pensée” on entend une représentation mentale d’un état de choses. Mais même si les propositions sont identifiées avec des contenus abstraits, elle restent différentes des phrases : une phrase telle que “les enfants sont agités” exprime deux propositions – qui sont également exprimées par “Maria et Paul sont agités en ce moment” et “tous les enfants sont agités” respectivement. Pour cette raison, il est malheureux que la logique des phrases (la logique qui prend comme ‘expressions logiques’ les connecteurs qui relient des phrases entières comme “et”, “soit ..., soit $\cdots$” et “si ..., alors $\cdots$”) soit appelée “logique propositionnelle” ou “logique des propositions”.

cela d'expliquer) la vérité d'une certaine phrase. Un raisonnement est un argument s'il vise à donner une raison de croire une phrase. Une telle raison consiste en une réponse possible à la question de savoir pourquoi on croit ceci (la phrase en question) et non pas cela (la négation de cette phrase). Une phrase, selon l'usage des mots que nous adapterons par la suite, est quelque chose qui peut être vrai ou faux (et rester vrai ou faux quel qu'en soit l'énonciateur).[16] Un argument consiste en une ou plusieurs prémisses et une conclusion, typiquement séparées par un mot comme "donc". La logique n'est rien d'autre qu'une étude de ce mot clé "donc" ("ergo" en latin, "therefore" en anglais). Un argument est une inférence si ses prémisses visent à donner une raison suffisante pour croire la conclusion – de telle sorte qu'il soit impossible que les prémisses soient vraies et la conclusion fausse. Si c'est le cas, l'inférence est appelée "valide"; par conséquent, une inférence valide est telle qu'il est possible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse – même si, en fait, les prémisses et la conclusion sont vraies. Une inférence est formelle si elle est convaincante (si elle l'est) en vertu de sa forme : si elle est convaincante, toutes les autres inférences ayant la même forme le sont aussi. Les mots responsables de la forme d'une phrase sont appelés "mots logiques". Les différentes logiques se distinguent en ce qu'elles considèrent chacunes différents ensembles de mots comme étant des "mots logiques".

Un argument n'est pas la seule réponse possible à la question de savoir pourquoi on croit telle ou telle proposition. Considérons le cas d'un végétarien qui affirme qu'il ne faut pas manger de viande et comparons deux réponses qu'il pourrait donner si on lui demandait pour quelle raison il affirme cela :

(1a) "Je crois que la viande provient d'un animal mort, le plus souvent tué, que l'animal est doué de vie comme le sont les êtres humains et que par principe il ne faut pas ôter la vie."

(1b) "J'ai été élevé dans un contexte familial et social où j'ai développé depuis mon enfance la terreur du sang."

Bien qu'une réponse de type (**1b**) puisse expliquer pourquoi quelqu'un est végétarien, elle ne nous donne pas de raison d'être pour ou contre le végétarisme ; même si elle peut expliquer ou rationaliser une certaine prise de position, elle ne fournit pas d'argument en sa faveur. Une réponse du type (**1a**), cependant, *justifie* (ou, au moins, vise à justifier) l'affirmation et la croyance qu'il ne faut pas manger de viande. Elle vise à nous donner des *raisons* de ne pas manger de viande. Il est certainement possible de mettre en question les prémisses du raisonnement et de douter du fait que l'affirmation du végétarien s'ensuit effectivement de ses prémisses (il s'agit d'ici de deux choses assez différentes), mais il est clair que quelqu'un qui donne une réponse du type (**1a**) pense que ses considérations manifestent des raisons également valables pour son interlocuteur. La logique ne se préoccupe que des réponses du type (**1a**) et seule une telle réponse constitue un *argument* en faveur de l'affirmation qu'il ne faut pas manger de viande. Puisqu'elle ne tient pas compte de l'état mental des opérants, il faut distinguer la logique de la psychologie. Et comme elle ne s'intéresse pas à la présentation des arguments, il faut en outre la distinguer de la rhétorique.

Un argument est un argument formel s'il est convaincant (s'il l'est) en vertu de sa forme : s'il est convaincant, tous les autres arguments ayant la même forme le sont aussi : l'argument possède sa force en vertu de sa forme.[17] La forme d'un argument est généralement représentée par des mots 'logiques' comme "et", "ou", "donc", "par conséquent". On peut donc dire qu'un argument formel est convaincant (s'il l'est) *en vertu de* la signification de ces mots 'logiques'.

[16]Nous partons ici de l'usage ordinaire et utilisons le mot "phrase" dans un autre sens que celui qu'il a dans le langage non-scientifique (cf. le glossaire à la page 347 pour un résumé des notions techniques). Nous appelons "phrase" ce que Quine et d'autres appeleraient une "phrase éternelle", une phrase qui n'est ni ambigüe ni indexicale : "J'ai faim maintenant", par ex., ne serait pas une phrase, bien que "P.K. a faim le 31 décembre à 16 heures" en est une.

[17]La qualification "s'il l'est" sert à exprimer une double condition : il n'est pas le cas que tous les arguments formels sont convaincant ; mais ceux qui le sont, le sont en vertu de leur forme.

Un argument qui est convaincant (s'il l'est) en vertu de la signification de certains mots qu'il contient est une *inférence*. Mais il y a des arguments qui eux aussi sont convaincants en vertu de la signification de certains mots qu'ils contiennent, sans pour autant être formels. À part les inférences formelles, il faut reconnaître les inférences matérielles. Si j'infère "cette surface n'est pas rouge" de "cette surface est verte", par exemple, j'exploite une nécessité (l'exclusion de différentes couleurs), sans pour autant me baser sur la signification de mots logique.[18] Si les mots en vertu desquels un argument est convaincant (s'il l'est) sont des mots 'logiques', et donc que l'argument est convaincant (s'il l'est) en vertu de sa forme, on parle d'une *"inférence formelle"* (ou : "inférence logique"). Si les mots en question ne sont pas des mots 'logiques', il s'agit de ce qu'on appelle une "inférence matérielle".

Dans le cas où l'argument *est* convaincant (tel que quelqu'un qui accepte ses prémisses devrait aussi accepter la conclusion), l'inférence est dite *"valide"*. Pour un argument valide, il n'est pas requis que quelqu'un accepte *en fait* ses prémisses : il suffit que, si cette personne acceptait les prémisses, elle devrait aussi accepter la conclusion. En ce sens, la logique – l'étude des inférences formelles valides – ne s'occupe pas des vérités (simples), mais des connexions entre elles : elle ne nous dit pas *ce* qu'il faut croire *en fait*, mais nous dit ce qu'il faut croire *sur la base d'autres croyances qu'on a déjà*. Ainsi, un théiste et un athéiste peuvent parfaitement être d'accord sur le statut logique d'un argument (p. ex. le fait que la conclusion s'ensuit réellement des prémisses) et toujours être en désaccord sur la conclusion – ceci en vertu d'être en désaccord sur une ou plusieurs des prémissses.

Il y a donc une distinction tripartite d'arguments :

Tous les corbeaux observés étaient noirs. Donc, tous les corbeaux sont noirs.	Denis est le mari d'Annette. Donc, Denis est un homme.	Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage. J'étudie la logique. Donc, je serai heureux et sage.
Cette eau bout. Donc, elle est à 100 degrés	Denis est l'assassin d'Annette. Donc, Denis a tué Annette.	J'adore Annette. Donc, j'adore quelqu'un.
argument non-formel convaincant ou non	inférence matérielle valide ou non	inférence formelle valide ou non

Cette distinction entre les arguments qui ne sont pas formels, les inférences qui fonctionnent sur des mots qui ne sont pas logiques et les inférences formelles qui ne fonctionnent que sur des mots logiques n'est pas toujours très claire et aisée. Que dire, par exemple, du fameux argument "Je pense ; donc je suis" que Descartes nous présente dans la deuxième *Méditation*? La présence de "donc" indique qu'il s'agit d'un argument : Descartes veut donner une raison de croire qu'il existe ; et il est certainement vrai que pour penser, il faut exister. Mais est-ce parce que le monde est comme il est (première catégorie), parce que nous utilisons "penser" comme nous le faisons (deuxième catégorie), ou plutôt parce qu'il y a des prémisses tacites qu'on peut exploiter pour montrer que le "sum" est une conséquence logique du "cogito"? Difficile à dire.

On observe que tous les arguments dépendent d'une régularité dans le monde : il s'agit toujours d'établir un nouveau fait sur la base d'autres faits, déjà établis. La base de cette extension de notre savoir peut être constituée par diverses sources. Les différents arguments considérés sont convaincants (s'ils le sont) car

- Les corbeaux observés forment un échantillon représentatif de la totalité de tous les corbeaux.
- Les lois de la nature ont comme conséquence que l'eau bout à 100 degrés (sur la terre, dans des conditions normales).

[18] Je présuppose ici que "rouge" n'est pas un mot logique. Il pourrait l'être, cependant, dans une 'logique chromatique', si une telle chose existait.

- Seuls les hommes peuvent être des maris.
- Pour être un assassin, il faut avoir tué.
- S'il y a une seule condition suffisante pour mon bonheur et que cette condition est remplie, alors je suis heureux.
- Annette est quelqu'un.

Mais on remarque aussi des différences : dans les premiers cas (colonne de gauche), on a envie de dire que les arguments sont convaincants parce que le monde est comme il l'est, mais dans différentes circonstances, ces mêmes arguments perdraient leur crédibilité. A propos de la colonne au milieu, on a envie de dire qu'ils sont convaincants parce qu'on parle une langue particulière et non pas une autre. Si "mari" signifiait "épouse" et que Denis était le mari de Annette, alors Denis serait une femme.[19] Si "assassin" était également utilisé en français pour quelqu'un qui a uniquement l'intention de tuer quelqu'un, alors on ne pourrait pas déduire de "Denis est un assassin" qu'il a tué quelqu'un. Mais que dire de la colonne de droite ?

Nous disions que les arguments de la colonne de droite sont convaincants en vertu de leur forme, plus particulièrement de la signification des 'mots logiques' qu'ils contiennent, c'est-à-dire de "si ... alors $\cdots$" et de "quelqu'un". Comment pourrait-on expliciter cela ?

1.4 Les langues formelles et naturelles

Afin de mieux comprendre la distinction entre des arguments convaincants en vertu de la signification de certains mots 'matériels' qu'ils contiennent (comme "mari" ou "assassin") et de ceux qui ne dépendent que des expressions dites 'logiques' (comme "si ... alors $\cdots$" et "quelqu'un"), il faut comprendre la distinction entre langues formelles et langues naturelles.

Supposons que nous parlons tous une langue naturelle qui ressemble, plus ou moins, au français : cela implique que les mots que nous utilisons se trouvent (du moins en grande partie) dans des dictionnaires de langue française et composent des expressions plus longues et des phrases en suivant (plus ou moins) les règles de la grammaire française. Cette grammaire obéit, au moins en principe, à un *principe de compositionalité* : elle détermine la signification d'une expression complexe sur la base de la signification des expressions plus simples qu'elle contient et de la manière dont celles-ci sont composées pour former l'expression complexe. La signification du complexe est donc (en principe) 'calculable' à partir de la significations de ses constituantes. Davidson (1967) a argumenté que c'était ce principe de compositionalité qui nous permettait d'apprendre une langue et de connaître les significations de phrases entièrement nouvelles (encore jamais entendues) sur la base de notre connaissance des mots qu'elles contiennent et des règles grammaticales.

En voici un exemple : Quelqu'un qui connaît ce que veulent dire les mots "le président", "les États-Unis", "le père de", "sourire à quelqu'un" et "Maria" comprendra (au moins) toutes les phrases suivantes :

- Le père du président des États-Unis sourit à Maria.
- Le père du président des États-Unis sourit au père de Maria.
- Maria sourit au père du président des États-Unis.
- Le père de Maria sourit au président des États-Unis.
- Le président des États-Unis sourit au père de Maria.

Il faut distinguer ces phrases grammaticalement correctes ("bien-formés" dans le langage de la logique)

[19] Cf. le témoignage d'expert que la philosophe Québéquoise Adèle Mercier à donné à l' Ontario Superior Court of Justice (Court files 684/00, 30/2001) en Novembre 2003, argumentant contre le philosophe Robert Stainton que la signification de "mariage" n'excluait pas la possibilité d'un mariage entre deux personnes du même sexe.

de celles qui ne sont pas seulement fausses mais dénouées de sens : "Maria les États-Unis sourit", "Sourit le père de Maria États-Unis" et "Maria Maria Maria", par exemple, ne sont pas des séquences de mots qui forment des phrases en français.

Même si les langues naturelles sont faciles à apprendre, elles sont extrêmement difficiles à décrire – c'est pour cette raison que la linguistique est une science aussi complexe. Une source de ces difficultés réside dans le fait que les règles qui gouvernent la formation des expressions complexes sur la base d'expressions plus simples ne sont pas seulement sensibles à la catégorie grammaticale de ces expressions, mais également à leurs significations. Même si "les États-Unis" est une expression du même type grammatical que "le père de Maria", nous reconnaissons que "Les États-Unis sourient au président" n'est pas doué de sens de la même manière que l'est "Le père de Maria sourit au président". Le fait que les pays ne puissent pas sourire et ne puissent pas avoir de pères (excepté de façon métaphorique) n'est pas dû à la grammaire, mais à la nature des pays, des pères et des sourires.

Dans le cas des langues naturelles, les règles grammaticales ne considèrent donc pas uniquement la catégorie grammaticale des expressions. Le subjonctif en est un exemple probant : le fait qu'il soit correct de dire "je m'attends à ce que tu viennes", mais qu'il ne soit pas correct de dire "j'espère que tu viennes" dépend des *significations* des verbes "s'attendre à ce que" et "espérer que" (et ne dépend pas seulement de leur catégorie grammaticale qui est la même). Un autre exemple est la formation du pluriel en allemand qui, elle aussi, dépend d'autres facteurs que la seule forme des expressions : "Frau" devient "Frauen", "Bau" devient "Bauten" et "Sau" devient "Säue".

C'est sur ce plan-là que les langues formelles diffèrent des langues naturelles : les langues formelles sont construites de manière explicite d'après des règles qui n'admettent pas d'exceptions. La construction faite à partir des composantes de la phrase est plus simple et suit une méthode qui s'explicite facilement . Contrairement aux langues naturelles, les langues formelles sont des 'créations' artificielles : nous déterminons leur vocabulaire, choisissons une interprétation univoque pour chacune de leurs expressions primitives et donnons les règles selon lesquelles on peut former des expressions complexes à partir d'expressions simples. Bien que ce caractère artificiel des langues formelles les rende plus faciles à décrire, il réduit leur expressivité : l'ironie, les métaphores, le double-sens (etc.) sont tous impossibles dans une langue formelle, et son vocabulaire et ses règles de construction de phrases sont très réduites par rapprt aux langues naturelles.

Une autre différence entre langues formelles et naturelles concerne l'ambiguïté. Considérons un cas d'ambiguïté syntaxique. Une séquence de mots telle que :

(1c) Si tu pars je reste et Marie ne sera pas contente.

peut avoir deux analyses syntaxiques :

(1d) Si tu pars (je reste et Marie ne sera pas contente).

(1e) (Si tu pars je reste) et Marie ne sera pas contente.

L'ordre des mots ne détermine pas la structure syntaxique. Il s'agit alors de deux phrases différentes – ce qui se voit dans leur différence dite "prosodique" (dans la prononciation des deux phrases) et également dans leurs formes logiques.[20] Afin d'indiquer ces formes logiques et pour endiguer l'ambiguïté de la phrase initiale (**1c**), nous nous sommes servi des parenthèses qui – dans cet usage-ci, au moins – ne

[20] La forme logique de (**1d**) est celle de "$p \rightarrow (q \wedge \neg r)$", celle de (**1e**) est celle de "$(p \rightarrow q) \wedge \neg r$" ou "$\rightarrow$" est "si ... alors ...", "$\wedge$" est "et", "$\neg$" est "il n'est pas le cas que", "p" est "tu pars", "q" "je reste" et "r" "Marie sera contente". Un autre exemple d'une telle ambiguïté syntaxique est le cas de l'adjectif épithète : un philosophe italien, par exemple, est un philosophe et un italien, tandis qu'un philosophe accompli n'est pas accompli absolument, mais ne l'est qu'en tant que philosophe ; un philosophe continental, finalement, peut, mais ne doit pas, travailler sur le Continent et un philosophe manqué n'est pas un philosophe du tout.

font pas partie du français. Nous avons donc donné les formes logiques de deux interprétations de (**1c**) dans une langue semi-formelle qui reprend le vocabulaire basique du français mais contient plus de symboles structurels. Une langue entièrement formelle permet d'éviter tous les cas d'ambiguïté.

Les langues naturelles ne contiennent pas seulement des expressions et des phrases ambiguës, mais également des expressions indexicales. Une expression indexicale est une expression dont la signification dépend du contexte de son utilisation. Le mot "je", par exemple, se réfère toujours au locuteur, le mot "aujourd'hui" au jour au cours duquel il est utilisé, le mot "ici" à la place où se trouve le locuteur etc.[21] Ces expressions indexicales peuvent mener à des arguments fallacieux. Si j'infère "je serai heureux et sage" de *vos* énoncés "si je fais de la logique, je serai heureux et sage" et "je fais de la logique", j'infère une conclusion différente de la proposition exprimée dans la deuxième partie de votre première prémisse. Cette deuxième partie est vraie si et seulement si *vous* êtes heureux et sage. Les langues formelles, en général, font également abstraction de ce trait des langues naturelles et ne contiennent pas d'expressions indexicales. Par conséquent, les phrases dont les relations sont examinées en logique se distinguent des phrases complètes des langues naturelles en ce qu'elles sont vraies ou fausses quelle que soit la personne qui les affirme et quel que soit le jour ou le lieu de leur énonciation.[22]

Nous avons dit que selon le *principe de compositionalité*, la signification d'une phrase est fonction de la structure syntaxique de cette phrase et des significations des mots qui la composent. La structure syntaxique est alors une règle qui nous indique de quelle manière il faut combiner les significations des mots pour arriver à la signification de la phrase ; elle représente la structure de la phrase qui ne dépend que de la forme des expressions. Mais que veut-on dire par "forme des expressions"? La forme d'une expression est sa catégorie grammaticale, sa *forme syntaxique*. La syntaxe ne considère que les rapports des signes entre eux et fait abstraction de leurs significations. La *sémantique*, à l'inverse, s'occupe de la signification des mots : elle considère le rapport des expressions aux objets et aux situations dont on veut parler. Un concept fondamental de la sémantique est celui de désignation : la relation entre l'expression "le vainqueur d'Austerlitz" et Napoléon, entre "die Sonne" et le soleil, ou encore entre "Louis XIV" et le Roi Soleil. C'est grâce à sa signification que "le vainqueur d'Austerlitz" nous permet de parler du vainqueur d'Austerlitz, c'est-à-dire Napoléon. Outre la désignation, la sémantique examine les concepts de *satisfaction* et de *vérité* : Napoléon satisfait la phrase ouverte "x a vaincu à Austerlitz" et donc la phrase "Napoléon a vaincu à Austerlitz" est vraie.

C'est par la distinction entre syntaxe et sémantique que nous pouvons distinguer les arguments de la colonne du milieu de ceux de la colonne de droite (cf. p. 18) : pour celle de droite, il n'est pas nécessaire de comprendre la signification de "J'étudie la logique" et de "Je serai heureux et sage" pour voir que l'inférence est valide. La validité de cette inférence ne dépend que du fait que ces expressions sont bien formées (= sont des phrases du français), c'est-à-dire de leur syntaxe. C'est pour cela que tout autre argument qui ne se distingue du nôtre que par la substitution d'autres phrases bien formées est également valide.

Cependant, pour les inférences de la colonne du milieu, il faut connaître la signification des mots "mari" et "assassin" – elles ne dépendent pas seulement de la syntaxe, mais également de la sémantique. A la distinction entre syntaxe et sémantique correspond une distinction entre deux types de non-sens. Les deux séquences de caractères "La rit vache" et "Le nombre 2 est bleu" ne veulent rien dire, mais seule la deuxième est une phrase bien formée du français. La première est un non-sens pour des raisons syntaxiques (elle n'est pas bien formée), alors que la deuxième (si elle l'est) l'est pour des raisons

[21] Il s'agit ici d'une description idéalisée : même les significations des indexicaux dépendent souvent du contexte. Nous pouvons, par exemple, utiliser "aujourd'hui" pour parler d'une période de temps plus longue qu'un jour : "Descartes pensait que le vacuum était impossible, mais nous savons aujourd'hui qu'il avait tort."

[22] Nous allons donner, de temps en temps, des phrases temporalisées comme exemples. Nous ignorerons, cependant, toutes les complications liées à leurs temps grammaticaux, excepté dans la discussion sur la logique temporelle au ch. 14.

sémantiques. Selon certains, il s'agit d'une "erreur de catégorie" : par sa signification "... est bleu" n'est applicable qu'à des entités étendues.

Mis à part la syntaxe et la sémantique, il faut reconnaître une troisième dimension, qui est celle de la *pragmatique* et qui peut aussi justifier certains arguments :

P Sam a dit que Marie aurait quand même pu venir.
C Donc, Sam aurait voulu que Marie vienne.

Cet argument, s'il est convaincant, l'est en vertu du fait que Sam ne se serait pas exprimé de la même manière s'il n'avait pas voulu que Marie vienne. Il ne dépend donc pas seulement de la sémantique des mots qu'il a utilisés, mais aussi de l'usage que Sam en a fait. Cette influence est parfois difficile à déterminer exactement : quelqu'un qui dit "ils ont eu un enfant et ils se sont mariés" (et non pas "ils se sont mariés et ils ont eu un enfant"), *dit-il* qu'ils ont eu un enfant *après* leur mariage ?[23] Mais tous les arguments pragmatiques ne sont pas contestables au point de l'exemple célèbre du menteur : quelqu'un qui dit "Je ne dis jamais la vérité" ne peut pas avoir raison – et ceci n'est pas dû à la forme logique ou la signification de la phrase, mais au fait qu'il l'a dit.[24]

Nous distinguons trois types de questions : "quels rapports y a-t-il entre les mots dans une phrase ?", "quels rapports y a-t-il entre les autres parties d'une phrase ?" sont des questions syntaxiques, de grammaire ; "quel rapport y a-t-il entre les mots et les choses ?", "quel rapport y a-t-il entre les phrases et le monde ?" et "qu'est le sens d'une expression ?" des questions sémantiques, et "quel rapport y a-t-il entre la psychologie d'un locuteur et ce qu'il fait avec les mots ?" et "qu'est-ce qu'il a voulu dire avec une phrase qui a comme signification littérale que ... ?", finalement, sont des questions pragmatiques. Une langue comme le français peut alors être décrite à trois niveaux :

par sa syntaxe Quelles sont les expressions bien formées (c'est-à-dire correctes selon les règles de grammaire de cette langue) ? Quelles sont les procédures mécaniques qui permettent d'arriver d'une formule à une autre ? Ex. : "La rit vache" et "$\exists\forall Rxy$" sont mal formés (en français et dans le langage de la logique des prédicats respectivement) ; "Il pleut et je suis triste" implique "il pleut" indépendamment du fait qu'il pleuve ou non ; "$p \wedge q$" implique "q" indépendamment de la signification de "p" et de "q".

par sa sémantique Quelles sont les expressions sensées ? Quelles sont les transitions qui préservent la vérité en vertu de la signification des mots utilisés ? Ex. : "Le nombre 2 est bleu" n'a pas de sens ; "David est le mari d'Annette" implique "David est un homme" en vertu de la signification de "mari" ; "Schnee ist weiss" est vrai en allemand si et seulement si la neige est blanche.

par sa pragmatique Comment ces expressions sont-elles utilisées ? Quelles sont les régularités de leur usage et comment peut-on expliquer leur usage quand ils sont utilisés pour des actes de paroles ? Ex. : "Il fait froid" signifie qu'il fait froid mais peut être utilisé pour donner à quelqu'un l'ordre de fermer la fenêtre, et peut même dire qu'il fait chaud (ce qui serait ironique). Les différences entre "je suis philosophe et heureux" et "je suis philosophe, mais heureux" et entre "ils se sont mariés et ils ont eu un enfant" et "ils ont eu un enfant et ils se sont mariés" sont généralement considérées comme étant de l'ordre pragmatique plutôt que sémantique.

Deux phénomènes rendent la description des langues naturelles particulièrement difficile : d'une part la distinction floue et inconstante entre des considérations syntaxiques et des considérations sémantiques ; et d'autre part l'influence de la pragmatique qui dépend de l'usage que l'on fait de la langue

[23] Il semble incontestable qu'il a au moins *suggéré* qu'ils se sont mariés après la naissance. La différence entre les implications (conséquences logiques) d'une phrase et ses *implicatures* – les croyances qui doivent être attribuées à un locuteur pour rendre son énonciation sensée (cf. Grice 1967) a une importance fondamentale pour la jurisprudence et est également souvent discutée en philosophie du langage contemporaine (cf. par ex. Recanati 2004).

[24] S'il avait raison, alors il serait vrai qu'il ne dit jamais la vérité, alors il dirait la vérité au moins cette fois-ci, donc aurait tort.

en question. L'intérêt des langues formelles vient du fait qu'elles n'ont pas à faire face à ces deux problèmes. Elles évitent le premier parce qu'elles sont des langues artificielles, créées, de manière explicite, sur la base des définitions (qui déterminent la syntaxe) et de la stipulation de toutes les significations du vocabulaire (qui déterminent la sémantique) ; elles évitent le second car elles ne sont pas parlées et qu'elles n'évoluent pas dans le temps.

On appelle "langue naturelle" une langue telle que le français, l'anglais ou l'allemand ; un *idiolecte* est une langue parlée par une seule personne. On appelle "langue formelle" un système symbolique qui génère un ensemble de formules dites "bien formées" à l'aide de définitions récursives. Une définition récursive est une définition qui s'applique à plusieurs niveaux de complexité de manière itérative. Elle exploite ainsi le principe de compositionalité qui nous permet de comprendre des expressions complexes sur la base de notre connaissance des expressions simples et des règles de formations.

C'est pourquoi les mathématiciens utilisent une langue formelle pour parler, par exemple, des ensembles. Un ensemble est une collection de choses qui satisfont une certaine condition : "$\{x|x$ est vert$\}$", par exemple, se réfère à l'ensemble de tout ce qui est vert. Pour appartenir à cet ensemble, un objet doit être vert, et chaque objet vert appartient à cet ensemble. Pour dire qu'un certain chat, Simone, appartient à l'ensemble, nous écrivons "Simone $\in$ $\{x|x$ est vert$\}$", ce qui est une autre manière de dire que Simone est vert. Nous effectuons un certain nombre d'opération avec des ensembles, également représentées par des signes mathématiques. Pour désiger l'ensemble de toutes les choses qui sont soit vertes soit rouges, nous écrivons "$\{x|x$ est vert$\}$ $\cup$ $\{x|x$ est rouge$\}$", où "$\cup$" est le signe pour l'*union* de ces deux ensembles. Pour parler des choses qui sont vertes *et* rouges, nous utilisons "$\{x|x$ est vert$\}$ $\cap$ $\{x|x$ est rouge$\}$" ("$\cap$" est le signe d'*intersection*), ce qui est l'ensemble vide, désigné par "$\emptyset$".

Il s'agit maintenant de construire une telle langue formelle pour la logique propositionnelle que nous appelons "$\mathcal{L}$". Les symboles primitifs de la langue $\mathcal{L}$ sont les suivants :

A1 des propositions atomiques "p", "q", "r", "s", "t" etc.,
A2 des constantes logiques "$\wedge$" (parfois : "&") ("et"), "$\vee$" ("ou"), "$\neg$" (parfois "$\sim$") ("il n'est pas le cas que"), "$\rightarrow$" (parfois : "$\supset$") ("si ... alors $\cdots$") et "$\leftrightarrow$" (parfois : "$\equiv$") ("... si et seulement si $\cdots$"),
A3 des parenthèses "(" et ")" et des virgules ",".

Un exemple d'une définition récursive est la définition suivante de ce qu'est une "formule bien formée" de cette langue $\mathcal{L}$:

B1 Toute proposition atomique est une formule bien formée.
B2 Si "p" et "q" sont des formules bien formées, alors "$(\neg p)$", "$(p \wedge q)$", "$(p \vee q)$", "$(p \rightarrow q)$" et "$(p \leftrightarrow q)$" sont des formules bien formées.
B3 Il n'y a pas d'autres formules bien formées.

En appliquant ces définitions, on peut déterminer que

- "$(p \vee q)$" est une formule bien formée : elle est formée des expressions "p" et "q" (A1) par la règle (B2)
- "$(p \wedge (p \vee q))$" est une formule bien formée : elle est formée des expressions "p" (A1) et "$(p \vee q)$" par la règle (B2). "$(p \vee q)$" est bien formée parce qu'elle est formée des expressions "p" et "q" (A1) par la règle (B2).
- "p" est bien formée (B1).
- "$((p\wedge) \vee (p \rightarrow q))$" n'est pas bien formée : puisque ce n'est pas une proposition atomique (B1), elle devrait, à cause de (B3), être formée par (B2). Mais alors "$(p\wedge)$" et "$(p \rightarrow q)$" devraient être

des formules bien formées. Or, bien que la deuxième le soit, la première ne l'est pas : elle est ni complexe (B2) ni atomique (B1) et ne peut être rien d'autre (B3).

Les parenthèses servent à enlever l'ambiguïté des phrases comme "p et q ou r" – veut-on dire qu'il faut choisir entre p et q d'une part et r d'autre part ("$((p \wedge q) \vee r)$") ou que nous avons de toute façon p et, également à choix, q ou r ("$(p \wedge (q \vee r))$") ? Les parenthèses rendent l'interprétation voulue explicite – quand elle ne sont pas nécessaires, elles peuvent être enlevées.[25]

A partir de la langue formelle $\mathcal{L}$, nous pouvons donc nous faire une idée claire de ce qu'est la forme syntaxique d'une expression : c'est la manière dont elle est formée en appliquant les règles (B1) à (B3) au vocabulaire primitif défini par (A1) à (A3).

Nous voyons aussi comment ces règles récursives génèrent une infinité de formules bien formées d'un vocabulaire primitif qui ne contient qu'un nombre limité de propositions atomiques : à partir de "p", nous formons "$\neg p$", "$\neg\neg p$", "$\neg\neg\neg p$", "$\neg p \vee p$", "$\neg\neg\neg p \wedge \neg p$" etc. Notre compréhension de cette infinité de phrases réside dans le fait que nous voyons comment elles sont construites à partir de "p", "$\neg$", "$\vee$" et "$\wedge$".

1.5 Formalisation

Ce qui distingue des arguments tels que "Sam est le mari d'Annette. Donc, Sam est un homme" des arguments comme "Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage. J'étudie la logique. Donc, je serai heureux et sage" est que les premiers dépendent des significations des mots qui se trouvent à l'intérieur des phrases simples, alors que la validité des deuxièmes ne dépend que des connecteurs (comme "si ... alors $\cdots$") qui relient ces phrases simples. Pour rendre cela plus manifeste, nous introduisons les caractères "p", "q", "r", "s" etc. comme abréviations de phrases telles que "j'étudie la logique", "je serai heureux et sage" :

Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage.	$\rightsquigarrow$	Si p alors q.
J'étudie la logique.	$\rightsquigarrow$	p
Donc, je serai heureux et sage.	$\rightsquigarrow$	Donc, q.

Cet argument est convaincant quelles que soient les phrases que l'on abrège par "p" et "q". Il faut se rappeler que "convaincant" est utilisé ici dans le sens suivant : quelqu'un qui accepte les prémisses (les deux premières lignes), devrait aussi accepter la conclusion (la troisième ligne). L'argument en faveur du bonheur des logiciens est donc aussi convaincant que le suivant :

P1 Si je m'appelle Mario, alors vous allez mourir d'une maladie infernale.
P2 Je m'appelle Mario.
C Donc, vous allez mourir d'une maladie infernale.

Il est évident que cet argument ne vous donne aucune raison d'avoir peur, puisque vous n'avez aucune raison d'en accepter les prémisses. Mais si vous les acceptiez, il faudrait aussi accepter la conclusion.

Quand un argument est convaincant en vertu de sa forme et grâce aux significations des mots logiques qu'il contient, nous l'appelons "valide". À la place du mot du langage ordinaire "donc", nous pouvons

[25] Pour simplifier l'écriture, on supprime souvent les parenthèses extérieures : "$(p \rightarrow q)$" devient "$p \rightarrow q$", "$(p \wedge (q \vee r))$" devient "$p \wedge (q \vee r)$". Nous introduirons plus tard, à la page p. 34 quelques conventions qui nous aident également à limiter des parenthèses.

alors tirer un trait :

(1)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage.}\\ \text{J'étudie la logique.}\end{array}}{\text{Je serai heureux et sage.}}$$

Le trait signifie que l'on peut 'tirer' la conclusion à la suite des deux premières prémisses : que la troisième ligne s'ensuit logiquement ou est une conséquence logique des deux premières. Cette relation de conséquence logique est d'importance primordiale pour la logique : on peut dire que toute la logique essaie de déterminer quelles propositions s'ensuivent de quelles autres. Si la logique concernée nous est donnée par un calcul (un système d'axiomes et de règles d'inférences), on peut dire qu'une proposition est "déductible" (peut être déduite ou inférée) d'une autre (par rapport à ce calcul) : cela veut dire que les règles de ce calcul nous permettent le passage de l'une à l'autre grâce à un schéma d'inférence. On utilise ce signe : "$\vdash$" pour représenter la déductibilité : "$p \vdash q$" veut dire que "q" peut être déduit de "p" à l'aide des règles d'inférence du calcul en question.

Il est crucial de distinguer la *validité* d'un argument de ce qu'on appelle sa *solidité* ("soundness" en anglais) : un argument peut être valide peu importe si ses prémisses sont vraies ou fausses – tout ce qui est requis est que l'implication suivante soit vraie : *si* les prémisses sont vraies, *alors* la conclusion l'est aussi. Pour la solidité, par contre, la vérité des prémisses est requise : les prémisses sont vraies *et* la conclusion s'ensuit de ces prémisses (et, par conséquent, est également vraie).

En introduisant les abréviations "p" pour "J'étudie la logique" et "q" pour "Je serai heureux et sage" et en simplifiant la formule "si … alors $\cdots$" par la flèche "… $\rightarrow \cdots$", nous obtenons, comme forme de l'inférence (1), le schéma suivant :

(2)
$$\frac{\begin{array}{c}p \rightarrow q\\ p\end{array}}{q}$$

Mais comment faut-il interpréter (2) ? Si les symboles vous font peur, substituez toujours les phrases "J'étudie la logique" pour "p" et "Je serai heureux et sage" pour "q". Il est clair, cependant, que ces phrases ont été choisies de manière arbitraire : n'importe quelle autre phrase pourrait être insérée tout en préservant la validité de l'inférence. Nous avons, par exemple, l'inférence suivante qui a elle également la forme de (2) :

(3)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{Si je m'appelle Mario, alors vous allez mourir d'une maladie infernale.}\\ \text{Je m'appelle Mario.}\end{array}}{\text{Vous allez mourir d'une maladie infernale.}}$$

(2) ne représente que le squelette de toutes ces inférences également convaincantes qui ont la même forme que (1) et (3) : (1) et (3) sont également des instances du schéma (2). C'est pour cela que l'on appelle (2) le "schéma" (d'une inférence) et les abréviations "p", "q" etc. parfois des "phrases schématiques".

Le schéma (2) représente une *formalisation* de l'argument principal au sens où

- toutes les expressions non nécessaires à une éventuelle validité de l'inférence sont abrégées ; et
- les expressions pertinentes à la validité éventuelle de l'argument sont remplacées par les expressions correspondantes d'une langue formelle (de $\mathcal{L}$, dans notre exemple).

La formalisation est le dégagement de l'ossature logique d'un raisonnement, par le dépouillement progressif de son contenu non-logique. Le schéma que nous avons dégagé n'est qu'un 'moule' qui donnera lieu à un raisonnement lorsqu'on y laissera couler de la matière. C'est en ce sens-là que la logique est l'art de bien penser : elle nous fournit des recettes pour des arguments logiquement

convaincants, des prototypes de raisonnements qui puissent préserver la vérité des phrases (prémisses) qu'ils prennent comme leurs points de départ.

La formalisation d'un passage de texte est la première étape pour un traitement logique de ce texte (l'évaluation des arguments, l'identification de leurs structure, la distinction entre prémisses et conclusion etc.). Elle est souvent difficile. Considérez l'argument suivant (cf. Mavrodes 1963; Savage 1967; Schrader 1979) :

> Peu importe si l'on croît en Dieu ou pas, Dieu – s'Il existe – est omnipotent et est donc un être qui peut tout faire. L'omnipotence est un trait essentiel de tout ce qui mérite le nom de Dieu. Si Dieu existe, alors Il est omnipotent et peut tout faire. Pouvant tout faire, Il peut créer une pierre si lourde que personne ne peut la soulever. Si personne ne peut soulever cette pierre, alors même Dieu ne peut pas la soulever. Alors Il ne peut pas tout faire. Mais s'Il existe, Il peut tout faire. Alors Dieu n'existe pas.

Il est clair qu'il y a de bonnes raisons de douter de cet argument. Mais lesquelles ? C'est à ce stade-là que la logique peut nous rendre service. Notre doute concerne principalement la solidité de l'argument : nous doutons de sa conclusion et alors soit de la vérité des prémisses soit de la validité de l'argument. Dans les deux cas nous avons l'obligation intellectuelle de préciser nos raisons de douter : quelle prémisse nous paraît disputable ? Quelle étape du raisonnement ne nous semble pas contrainte ? La logique nous permet une formalisation de l'argument qui distingue clairement les prémisses de la conclusion :

P1	Si Dieu existe, alors Dieu est omnipotent.	$p \rightarrow q$
P2	Si Dieu est omnipotent, alors Dieu peut tout faire.	$q \rightarrow r$
P3	Si Dieu peut tout faire, alors Dieu peut créer une pierre si lourde.	$r \rightarrow s$
P4	Si Dieu peut créer une pierre si lourde, une pierre si lourde est possible.	$s \rightarrow t$
P5	Si une pierre si lourde est possible, Dieu ne peut pas soulever une telle pierre.	$t \rightarrow u$
P6	Si Dieu ne peut pas soulever une telle pierre, alors il ne peut pas tout faire.	$u \rightarrow \neg r$
C7	Si Dieu ne peut pas tout faire, alors il n'est pas omnipotent.	$\neg r \rightarrow \neg q$
C8	Si Dieu n'est pas omnipotent, alors Dieu n'existe pas.	$\neg q \rightarrow \neg p$
C9	Si Dieu existe, alors Dieu n'existe pas.	$p \rightarrow \neg p$
C10	Alors Dieu n'existe pas.	$\neg p$

Que dire de cet argument ? Quelles sont ses prémisses, quelles sont ses conclusions ? (**C7**), p. ex., est ici traité comme conclusion (intermédiaire) car, comme nous le verrons, elle s'ensuit d'autres prémisses (de (**P2**)) en particulier). L'affirmation de (**C7**) par quelqu'un qui défend cet argument n'est pas un engagement supplémentaire de sa part : s'il a déjà affirmé (**P2**), l'affirmation de (**C7**) n'y ajoute rien. Dans un certain sens, (**C7**) est donc redondant : le contenu du passage cité reste le même si nous l'enlevons. L'importance de (**C7**) est autre : elle rend intelligible le cheminement de la pensée et nous aide à discerner sa structure.

De quoi dépend la validité de cet argument ? Quelles prémisses peut-on nier tout en acceptant les autres ? C'est ici que la logique nous aide, en nous apprenant que, par exemple :

- Nous ne pouvons pas accepter (**P1**) à (**P6**) sans accepter (**C7**) ou (**C8**).
- Nous ne pouvons pas accepter (**P1**) à (**P3**) et nier que si Dieu existe, il ne peut pas créer une pierre si lourde ($p \rightarrow t$).
- Nous ne pouvons pas accepter (**P1**) à (**C8**) et nier (**C9**).
- Nous ne pouvons pas accepter (**C9**) et nier (**C10**).

En nous apprenant cela, la formalisation limite les possibilités de critiques. Elle nous aide à distinguer les prémisses des conclusions en montrant par exemple que (**C7**) est une conclusion de (**P1**) à (**P6**) (et plus précisément une conclusion de (**P2**)) et que (**C10**) s'ensuit logiquement de (**C9**). La différenciation

entre prémisses et conclusions est une distinction relative : (**C7**) est la conclusion d'une inférence valide qui a comme seule prémisse (**P2**), mais est elle-même une prémisse pour l'inférence qui a (**C9**) comme conclusion.

D'un autre côté, la formalisation rend la critique de l'argument plus facile, en ce qu'elle nous force à distinguer les prémisses les unes des autres. Par conséquent, celles-ci peuvent être évaluées de manières différentes. C'est ainsi que l'on voit que

- La plausibilité de (**P1**) dépend (entre autres) du concept "Dieu".
- La plausibilité de (**P2**) dépend (entre autres) du concept "omnipotent".
- La plausibilité de (**P3**) dépend (entre autres) du concept "une pierre de type F" (si lourde que personne ne peut la soulever).
- La plausibilité de (**P4**) dépend (entre autres) de la question de savoir si tout ce qui peut être créé par Dieu est possible.
- La plausibilité de (**P5**) dépend (entre autres) de la question de savoir si Dieu tombe dans le domaine des choses dont on dit qu'ils ne peuvent pas soulever cette pierre.
- La plausibilité de (**P6**) dépend (entre autres) de la question de savoir ce que l'on entend par "peut tout faire".
- Les autres phrases suivent logiquement de (**P1**) à (**P6**).

Quelqu'un qui veut critiquer l'argument doit donc critiquer une (ou plusieurs) des prémisses (P1) à (P6) : l'argument est valide et la conclusion ne peut donc être attaquée que si l'on attaque une prémisse : étant donné sa validité, seule sa solidité peut encore être mise en doute.

Une personne qui critique le concept d'omnipotence utilisé en (**P2**) en arguant par exemple que l'omnipotence n'inclut pas la capacité d'effectuer ce qui est logiquement impossible,doit par conséquent argumenter qu'il est logiquement impossible pour Dieu, de créer une pierre qui soit si lourde que même Dieu ne puisse la soulever. On pourrait aussi, avec Descartes, nier la prémisse (**P4**), en arguant que Dieu peut faire des choses impossibles. Contre (**P6**), on pourrait dire que l'omnipotence requiert seulement que Dieu puisse accomplir toutes les tâches 'positives' et que la création d'une pierre si lourde que personne ne peut la soulever n'est pas une de ces tâches 'positive'. Il y a de nombreuses façons de critiquer l'argument – mais ceci sort du domaine de la logique pour entrer dans celui de la métaphysique ou, plus particulièrement, de la philosophie de la religion. Le service rendu par la logique ne concerne que la formalisation : la logique nous dit quelles étapes dans l'argument s'ensuivent de quelles autres, dans le sens où quelqu'un qui a accepté (**P2**), par exemple, devrait aussi accepter (**C7**).

La logique n'est pas absolue : l'étape de (**C9**) à (**C10**), par exemple, qui est de la forme $\frac{p \to \neg p}{\neg p}$ ("reductio ad absurdum, cf. 39), peut être contestée : cette inférence est valide dans la logique standard, mais sa validité a été contestée par les partisans d'autres types de logique. Cependant il est important de noter que cette question n'est pas du même registre qu'un doute par rapport à une prémisse, par exemple (**P4**) : en doutant de la validité du schéma d'inférences, c'est-à-dire en niant "$(p \to \neg p) \vdash \neg p$" ("il s'ensuit de "$p \to \neg p$" que $\neg p$"), on doute du fait que toutes les inférences qu'on obtient en remplaçant "p" par des phrases entières soient valides : on est donc de l'avis qu'il y a au moins une inférence qui a cette forme et qui n'est pas valide. On peut justifier un tel doute par des considérations qui n'ont rien à voir avec la métaphysique ou la philosophie de la religion. La justification des schémas d'inférence est le domaine de la *philosophie de la logique*, dont on discutera aussi dans ce livre. Si l'on parvient à établir que "$(p \to \neg p) \vdash \neg p$" n'est pas un principe acceptable de la logique, on met un défenseur de l'argument sous l'obligation de justifier l'inférence suivante :

$$\frac{\text{Si Dieu existe, alors il n'existe pas.}}{\text{Dieu n'existe pas.}} \quad \text{de } (\mathbf{C9}) \text{ à } (\mathbf{C10})$$

par d'autres considérations : il ne peut donc plus dire que c'est par la logique seule que (**C10**) s'ensuit de (**C9**).

Le même argument peut être formalisé de différentes manières et à l'aide de différentes logiques. La qualité d'une formalisation dépend du degré auquel elle rend manifeste la structure d'un argument et de la finesse du grain avec laquelle elle nous permet de l'évaluer et de le critiquer.[26] Pour une formalisation de l'argument contre l'existence de Dieu, par exemple, la logique modale pourrait être utile : elle nous permettrait de rendre explicite la progression, à l'intérieur de la prémisse (**P4**), de "possible pour Dieu" à "possible" et de mieux étudier la relation entre la prémisse (**P4**) (possible pour Dieu, donc possible) et (**P5**) (impossible pour tout le monde, alors impossible pour Dieu).

1.6 Vérité et validité

La logique est l'étude des raisonnements valides. La logique propositionnelle classique, par exemple, nous montre qu'une inférence qui suit le schéma suivant que l'on appelle "principe de conversion" :

$$\frac{q \rightarrow r}{\neg r \rightarrow \neg q}$$

est valide. C'est la validité de ce principe qui soutient la déduction de (**C7**) à partir de (**P2**), par exemple. Dire que les schémas suivants :

$$\frac{q \rightarrow r}{\neg r \rightarrow \neg q} \quad , \quad \frac{\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \end{array}}{q} \quad , \quad \frac{p \rightarrow \neg p}{\neg p}$$

sont valides, c'est affirmer que toute inférence qu'on obtient en remplaçant, dans l'un de ces schémas, les abréviations "p", "q" et "r" par des phrases du langage ordinaire, est valide. Mais en quoi consiste cette validité ?

Il a déjà été dit que pour qu'un argument soit valide, il n'est pas requis que quelqu'un accepte *dans les faits* les prémisses : il suffit que, *s'il* acceptait les prémisses, il devrait aussi accepter la conclusion. En tant que logiciens, nous discutons de la qualité de l'argument contre l'existence de Dieu sans déclarer si ou non nous croyons en Dieu : la logique ne se préoccupe pas de la plausibilité des prémisses, mais se charge d'examiner leurs relations et d'identifier les règles d'inférences utilisées. La logique ne se prononce pas sur la vérité de la conclusion ; elle détermine si ou non une conclusion s'ensuit de quelques prémisses, si ou non on est forcé (sous peine d'être irrationnel ou, au moins, 'illogique') à accepter la conclusion *si* on a déjà accepté les prémisses.

Les arguments, par conséquent, ne peuvent pas être dits "vrais" ou "faux" (ceci relève d'une erreur de catégorie). Un argument peut être impeccable même si toutes ses prémisses sont fausses. La qualité d'un argument est avant tout déterminée par le degré auquel les prémisses nous fournissent une raison d'accepter la conclusion. Dans le cas d'une inférence logique, cette question devient : "est-ce que l'argument *préserve* la vérité des prémisses (s'il y en a)"? Si oui – si la vérité des prémisses entraîne celle de la conclusion – l'argument est dit "valide", autrement – si les prémisses pourraient être vraies sans que la conclusion le soit – l'argument est dit "non valide".

Il peut donc y avoir des arguments valides dont la conclusion est vraie bien que les prémisses soient fausses :

[26] C'est pour cela que les exercices en formalisation doivent être formulés avec délicatesse, comme le témoigne le mythe philosophique d'un étudiant à Oxford, qui, lors d'un examen, aurait obtenu la note maximale en écrivant "p" comme formalisation de l'argument ontologique de Anselm.

P1 Tous les tigres sont des humains.
P2 Tous les humains ont la peau rayée.
C Donc tous les tigres ont la peau rayée.

De même, il peut y avoir des arguments valides dont la conclusion est fausse, et des arguments non valides dont les prémisses et la conclusion sont les deux vraies. Mais ce qui est exclu par notre définition de la validité, c'est un argument valide dont la conclusion est fausse bien que les prémisses soient vraies :

prémisses vraies	conclusion vraie	valide ou non
prémisses vraies	**conclusion fausse**	**non valide**
prémisses fausses	conclusion vraie	valide ou non
prémisses fausses	conclusion fausse	valide ou non

En tant que schéma ou squelette d'inférence valide, une règle d'inférence indique simplement la *forme (logique)* de plusieurs phrases prises ensemble et nous affirme que toute séquence de phrases ayant la même forme constitue une inférence valide. Dans le langage de la logique formelle, un raisonnement est valide en vertu de sa *forme* (i.e. de la forme des prémisses et de celle de la conclusion). Ainsi, tout argument de même forme est valide dans ce langage.

Nous avons rencontré deux notions sémantiques, celle de "validité" et celle de "vérité", qu'il faut distinguer clairement. La vérité appartient à des phrases (complètes) ou des significations de phrases (complètes). Une phrase comme "je suis malade", dite par moi aujourd'hui, exprime la proposition que Philipp est malade le 31 décembre 2006. Si je suis malade, alors cette phrase est vraie. La phrase indexicale est vraie en tant qu'elle exprime un contenu déterminé, tout en étant fausse si énoncée par quelqu'un d'autre qui n'est pas malade ou par moi un jour où je ne suis pas malade.[27] La propriété d'être vraie et la propriété d'être fausse sont des propriétés sémantiques parce que les phrases ne les ont pas simplement en vertu de leur forme – il faut considérer ce qu'une phrase dit pour savoir si oui ou non elle est vraie (si elle exprime un contenu vrai ou faux).

La validité, à l'inverse, n'est pas une propriété des phrases ou de leurs contenus, mais une propriété des arguments et des inférences. Une inférence est dite 'valide' si elle transmet la vérité de ses prémisses à sa conclusion – s'il n'est pas logiquement possible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse. Il ne faut pas simplement considérer la valeur de vérité actuelle de ces phrases, mais leurs valeurs de vérité possibles : il faut considérer la valeur de vérité que la conclusion *aurait* (cas peut-être purement hypothétique) et un cas où les prémisses *seraient* vraies. Les notions "vérité" et "validité" ne s'appliquent donc pas aux mêmes choses : les prémisses et la conclusion sont soit vraies soit fausses, l'inférence est soit valide soit non-valide. Les deux notions se situent à des échelles différentes.

1.7 Utilisation et mention

La distinction entre l'utilisation et la mention d'un mot est cruciale. Les guillemets figurent d'ailleurs parmi les entités syntaxiques préférées des philosophes. Les guillemets nous servent à éviter la *confusion entre utilisation et mention* que le philosophe américain Willard van Orman Quine, le père de la philosophie du 20ème siècle, a stigmatisée comme l'une des erreurs les plus fréquente et conséquente en philosophie. Si je dis

[27] Pour exclure cette variabilité, beaucoup de philosophes disent que la vérité et la fausseté appartiennent en premier lieu à des "propositions" (c'est-à-dire des contenus de phrases complètes et non-indexicales). Bien que les phrases puissent également être dites vraies ou fausses, il s'agit des propriétés dérivées qu'elles ont en vertu du fait qu'elles expriment telles ou telles propositions.

(1f) Paris est une jolie ville.

j'*utilise* le mot "Paris" pour dire de la ville qu'elle est jolie – je mentionne la ville et j'utilise un mot qui la désigne.[28] Si, au contraire, je dis

(1g) "Paris" est un mot du français, "Paris" est mono-syllabique, "Paris" est aussi un prénom, "Paris" est mon mot préféré.

je *mentionne* le mot "Paris" et j'utilise un nom, " "Paris" " (un nom constitué de ⟨ guillemets, P, a, r, i, s, guillemets ⟩), pour parler de ce mot et pour dire qu'il appartient à la langue française, etc. On utilise des mots pour parler des choses et des noms de ces mots pour parler des mots. Rien ne nous empêche de créer des noms pour des mots, en baptisant "Karl", par exemple, mon mot préféré ("Paris"). Etant donné ce baptême, il est correct de dire que Karl est un mot de la langue française, que j'utilise Karl pour me référer à Paris, etc. Même si de telles stipulations sont possibles, elles ne sont pas fréquentes : on utilise généralement les guillemets pour transformer n'importe quelle expression en un *nom* de cette expression.[29] Les guillemets nous servent aussi à parler d'une autre langue que celle que nous utilisons dans la phrase concernée. Considérons la phrase suivante :

(1h) Paris est une ville beautiful.

Cette phrase n'appartient ni au français, ni à l'anglais – elle n'est pas bien formée.[30] La phrase suivante, cependant, est bien formée et est une phrase du français :

(1j) Le mot "beautiful" est utilisé pour dire d'une chose qu'elle est jolie.

La séquence de lettres ⟨ ", b, e, a, u, t, i, f, u, l, " ⟩ *est* un mot du français. Nous pouvons constater que les guillemets nous servent à rendre cohérentes des phrases à première vue mal formées.[31] Mais les guillemets créent aussi leurs propres difficultés. Considérons l'expression "ajouté à sa propre citation" ("appended to its own quotation").[32] Elle nous donne une expression qui se dénote elle-même, c'est-

[28] "Mentionner" n'est donc pas utilisé au sens de "citer", mais au sens de "désigner", "faire mention de" ou "parler de". Malheureusement, il existe un autre usage technique en linguistique selon lequel "mention" désigne le statut d'un signe autonyme.

[29] Les guillemets ont, dans la langue naturelle, beaucoup d'autres fonctions (cf. Recanati 2000) : il peuvent permettre, par exemple, à un locuteur de prendre de la distance par rapport aux mots qu'il utilise ('scare quotes'), ou ils peuvent indiquer qu'on utilise une expression dans un sens métaphorique. Dans ces cas-là, j'utilise des guillemets simples : ' et '. L'usage naturel est tout à fait inconsistant dans son usage des guillemets : ils sont utilisés pour marquer d'autres distinctions de celle entre usage et mention, comme lorsqu'on dit, par exemple, que l'on a lu tel et tel article dans "Le Monde" – se référant au journal et non pas au mot. À l'inverse, les guillemets manquent dans de nombreux cas où il faudrait les mettre : si je dis que je m'appelle Philipp, par exemple, ce que je veux dire est que je m'appelle "Philipp", que mon nom est "Philipp" et que mes parents m'ont baptisé "Philipp". Il ne s'agit pas ici d'entreprendre une réforme du langage ordinaire, mais seulement de prendre connaissance d'une distinction importante que l'on peut négliger s'il n'y a aucun danger d'équivoque. Cependant, ici, nous ferons comme si les guillemets servaient toujours et uniquement à marquer la distinction entre l'utilisation et la mention des mots.

[30] Ceci ne veut pas dire que l'on ne comprenne pas *quelque chose* en entendant cette phrase ou, par exemple, la suivante :

(1i) If philosophy didn't exist, said Voltaire, il faudrait l'inventer.

Néanmoins il s'agit ici d'une citation impropre : ce que Voltaire a dit n'est pas clair et il faudrait ajouter des guillemets pour clarifier sa phrase.

[31] Il peut y avoir plusieurs manières de mettre des guillemets : Considérez le 'limerick' suivant de Richard Cartwright :

According to W. Quine
Whose views on quotation are fine,
Boston names Boston,
And Boston names Boston,
But 9 doesn't designate 9.

La tâche est de placer les guillemets de telle sorte que le résultat soit correct et intéressant. Il existe plusieurs façons de le faire.

[32] Il s'agit ici du fameux paradoxe de Grelling (cf. Grelling et Nelson 1908) dont nous reparlerons à la page p. 231 dans la leçon 13.

à-dire l'expression ""ajouté a sa propre citation" ajouté à sa propre citation", comme on peut voir ci-dessous :

(1k) "ajouté à sa propre citation" ajouté à sa propre citation = "ajouté à sa propre citation" ajouté à la citation de "ajouté à sa propre citation" = "ajouté à sa propre citation" ajouté à ""ajouté à sa propre citation"" = ""ajouté à sa propre citation" ajouté à sa propre citation"

Puisque (**1k**) a la forme a = "a", "a" est une expression qui se dénote elle-même. Ceci, cependant, n'est que rarement le cas et peut entraîner des conséquences paradoxales.[33]

Points à retenir[34]

1. La logique moderne a été créée par Gottlob Frege en 1879.
2. La philosophie est la science des arguments.
3. La logique est l'étude des inférences valides.
4. La logique porte sur un langage simplifié, idéalisé et formel.
5. La logique propositionnelle étudie les connecteurs propositionnels qui relient des propositions ; la logique des prédicats étudie en plus la quantification, les relations et les fonctions.
6. La syntaxe concerne la forme des expressions, la sémantique, leurs significations et la pragmatique, leur usage.
7. La formalisation des arguments est un art.
8. Les arguments ne sont pas vrais ou faux, mais valides ou invalides.
9. Une inférence est valide si et seulement s'il est impossible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse.
10. Il faut distinguer l'utilisation et la mention des mots et mettre des guillemets si l'on veut parler d'une expression linguistique et non pas de la chose qu'elle représente.

[33] Il est possible de reproduire l'argument qui est à la base du fameux paradoxe de Grelling à l'aide du prédicat "... donne une fausseté si ajouté à sa propre citation". Il suffit de se demander si ce prédicat s'applique à lui-même. S'il s'applique de façon réflexive, alors ""donne une fausseté si ajouté à sa propre citation" donne une fausseté si ajouté à sa propre citation" est vrai et la phrase citée est fausse car il s'agit de la citation de "donne une fausseté si ajouté à sa propre citation" suivi de ce même prédicat. Si elle est fausse, elle est ce qu'elle dit d'elle et alors elle est vraie. Les paradoxes de ce type, y compris le paradoxe de Russell, étaient à la base de la fameuse preuve de l'incomplétude de l'arithmétique par (Gödel 1931). Consultez `www.unige.ch/lettres/philo/enseignants/philipp/teaching/paradoxes.html` et la section (15.3) pour en savoir plus.

[34] Chaque chapitre sera suivi d'une liste de dix "points à retenir" qui fournissent au lecteur un résumé succint.

Chapitre 2

Les connecteurs propositionnels

2.1 La formalisation des arguments

Nous avons vu (à la page p. 16) qu'un argument est une inférence s'il est convaincant (s'il l'est) en vertu des significations de certains mots qu'il contient. Et, qu'un argument est formel (est une inférence logique) si ces mots sont des 'mots logiques'.

Les différents systèmes de logiques diffèrent en raison de ce qu'ils considèrent être des 'mots logiques'. La logique standard propositionnelle ne considère que les connecteurs propositionnels (des connecteurs qui relient des phrases entières) comme "... et $\cdots$", "... ou $\cdots$", "il n'est pas le cas que ...", "si ... alors $\cdots$ " et "... ssi $\cdots$" (= "si et seulement si"). La logique standard des prédicats considère en outre les quantificateurs ("pour tous ... $\cdots$", "il y a au moins un ... tel que $\cdots$"), des relations (par ex. "... est identique à $\cdots$") et des fonctions (par ex. "la mère de ..."). La logique des prédicats est appelée ainsi parce qu'elle permet le traitement logique des expressions sub-sententielles (plus petites que des phrases entières), par ex. des termes singuliers (noms) et des prédicats.

Le calcul des propositions (la logique propositionnelle) étudie de quelle manière la vérité (ou la fausseté) d'une phrase complexe est fonction de la vérité (ou la fausseté) des phrases élémentaires qui la composent. Dans des langues naturelles, où la forme grammaticale ne coïncide pas toujours avec la forme logique, cette dépendance des constituantes simples de la phrase complexe n'est pas toujours apparente. C'est pour cela que la logique ne traite pas directement le langage ordinaire, mais travaille à partir d'un langage artificiel et simplifié, déterminé par des définitions explicites. À cet effet, nous avons introduit un langage $\mathcal{L}$, qui sera notre langage de la logique propositionnelle, et dont les symboles primitifs sont les suivants :

A1	des propositions atomiques "p", "q", "r", "s", "t" etc.,
A2	des constantes logiques "$\wedge$" (parfois : "&") ("et"), "$\vee$" ("ou"), "$\neg$" (parfois "$\sim$") ("il n'est pas le cas que"), "$\rightarrow$" (parfois : "$\supset$") ("si ... alors $\cdots$") et "$\leftrightarrow$" (parfois : "$\equiv$") ("... si et seulement si $\cdots$", "... ssi $\cdots$")
A3	des parenthèses "(" et ")".

Nous appelons "$\wedge$" "conjonction", "$\vee$" "disjonction", "$\neg$" "négation", "$\rightarrow$" "implication" et "$\leftrightarrow$" "équivalence".

Nous avons aussi donné une définition récursive de ce qu'est une formule bien formée de $\mathcal{L}$:

B1	Toute proposition atomique est une formule bien formée.
B2	Si "p" et "q" sont des formules bien formées, alors "$(\neg p)$", "$(p \wedge q)$", "$(p \vee q)$", "$(p \rightarrow q)$" et "$(p \leftrightarrow q)$" sont des formules bien formées.
B3	Il n'y a pas d'autres formules bien formées.

On voit que les connecteurs propositionnels binaires s'appliquent à deux phrases pour en faire une troisième, plus complexe. Le seul connecteur unaire que nous étudierons, la négation, ne s'applique qu'à une seule phrase pour en faire une deuxième, plus complexe.

Ces deux définitions du vocabulaire primitif et des règles qui permettent d'en construire des expressions plus complexes, déterminent la *syntaxe* de notre langue $\mathcal{L}$.

En syntaxe, on peut définir ce que l'on appelle le "*connecteur principal*" d'une proposition, c'est-à-dire le connecteur le moins imbriqué dans les parenthèses, celui qui 'vient en premier' mais que l'on 'calcule en dernier'. L'arithmétique nous fournit ici une analogie utile. Dans l'expression "$((2+3)\cdot 4)-5$", le connecteur principal est la soustraction parce que c'est celui que l'on considère en dernier :

$$\begin{array}{l} ((2+3)\cdot 4)-5 \\ \quad ((5)\cdot 4)-5 \\ \qquad (20)-5 \\ \qquad\qquad\qquad = 15 \end{array}$$

De même, dans l'expression "$(p \wedge (q \rightarrow r)) \leftrightarrow s$", le connecteur principal est "$\leftrightarrow$", dans "$\neg(\neg p \wedge \neg q)$" c'est le premier "$\neg$" et dans "$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$" le troisième "$\rightarrow$". Savoir quel connecteur est le connecteur principal d'une proposition dépend essentiellement des parenthèses qui sont utilisées pour l'exprimer. Les parenthèses nous servent à indiquer la portée des opérateurs. Pour vouloir dire par exemple qu'une négation nie l'ensemble d'une conjonction, on la place devant cette conjonction entourée de parenthèses : "$\neg(p \wedge q)$". On remarque la différence entre cette proposition et celle où seul le premier conjoint est nié : "$\neg p \wedge q$". En principe, on aurait dû mettre "$(\neg p) \wedge q$", mais on adoptera la convention que "$\neg$" relie 'plus fortement' que "$\wedge$" : ce qui signifie que "$\wedge$" relie des phrases avec leurs éventuelles négations.

En déterminant que "$\wedge$", par exemple, est un connecteur qui relie deux formules bien formées pour en faire une nouvelle formule bien formée, on n'a encore rien spécifié sur la *signification* de ce connecteur. D'après tout ce que nous savons ('officiellement'[1]), ce connecteur pourrait signifier la même chose que "il est le cas en Australie que ... mais ici il est le cas que $\cdots$", "Sam a dit que ... mais il me semble plutôt que $\cdots$", "... et je suis malade si et seulement si $\cdots$". Mais comment donner une signification précise à ces connecteurs ?

C'est là que *la sémantique* commence à intervenir. Faire la sémantique d'une expression, c'est lui attribuer une signification particulière. Dans les langages naturels, beaucoup de facteurs contribuent à la signification d'un mot, et le même mot peut avoir plusieurs significations (un cas d'ambiguïté) ou varier de signification selon son contexte d'utilisation (un cas d'indexicalité). Dans des langues formelles, qui ne sont pas parlées et sont construites artificiellement, la signification des mots est beaucoup plus facile à déterminer, car en effet la signification d'une phrase coïncide avec ses *conditions de vérité* ; et ce sont ces conditions de vérité qu'on a appelées la *proposition* qui elle, est exprimée par une phrase dans un certain contexte d'énonciation. Dire que la proposition exprimée par une phrase

[1]Je dis "'officiellement' parce que j'ai déjà introduit des significations 'informelles' entre parenthèses. Je l'ai fait pour rendre possible la lecture des formules – mais rien dans notre petite théorie ne détermine qu'avec "et" j'aie voulu parler de la conjonction : j'aurais pu parler d'un connecteur bizarre comme "est vrai selon Sam mais Maria affirme que".

est vraie (et donc que la phrase, telle qu'elle est utilisée dans ce contexte, est elle-même vraie), c'est dire que ses conditions de vérité sont satisfaites. Connaître la signification d'une phrase (savoir quelle proposition elle exprime), c'est pouvoir déterminer, de n'importe quelle situation possible, si la phrase décrit correctement cette situation ou non (si elle est vraie ou fausse par rapport à cette situation). Autrement dit, les conditions de vérité sont des conditions que le monde doit satisfaire pour rendre vraie la phrase en question.[2]

Mais il reste toujours une distinction importante à faire, à savoir celle entre les logiques extensionnelles et les logiques intensionnelles. La logique propositionnelle et la logique des prédicats sont des logiques extensionnelles, alors que la logique modale, la logique epistémique et beaucoup d'autres logiques sont des logiques intensionnelles. Comparons les arguments suivants :

(2a) Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage. J'étudie la logique. Donc je serai heureux et sage.

(2b) Tous les hommes sont mortels. Socrate est un homme. Donc Socrate est mortel.

(2c) Il est nécessaire que 9 soit la somme de 5 et 4. 9 est la somme de 3 et 6. Donc il est nécessaire que la somme de 3 et 6 soit (identique à) la somme de 5 et 4.

(2d) Je sais tout ce que Robert a dit. Tout ce que Robert a dit est qu'il est fatigué et en a marre. Donc je sais que Robert est fatigué et en a marre.

Dans des contextes respectifs, ces quatre arguments sont tous convaincants. Mais seulement les deux premiers sont valides – dans la logique propositionnelle et dans la logique des prédicats respectivement (le premier sera également valide dans la logique des prédicats qui est une extension de la logique propositionnelle). Cela veut dire que si leurs prémisses sont vraies, alors leurs conclusions le sont aussi. On a dit que la validité de ces inférences ne dépend que de leur forme et que toutes les inférences ayant la même forme sont également valides. La première inférence, par exemple, est conforme au schéma valide suivant :

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q} \quad \text{(modus ponendo ponens)}$$

Pour arriver à ce schéma à partir d'une inférence particulière comme (2a), il faut faire abstraction de toutes les particularités des phrases et ne les considérer que par rapport à leur capacité à être vraies ou fausses. Pour savoir si je peux ou non conclure que je serai heureux et sage car je fais de la logique, et que si je fais de la logique, alors je serai heureux et sage ; il me faut connaître la vérité de ces prémisses : si elles sont vraies, alors je serai heureux et sage. Je pourrais conclure mon bonheur et ma sagesse d'une infinité d'autres prémisses, si elles étaient également vraies :

(2a') Si je n'étudie pas la logique, je serai heureux et sage. Je n'étudie pas la logique. Donc je serai heureux et sage.

(2a'') Si je vais à la maison maintenant, je serai heureux et sage. Je vais à la maison maintenant. Donc je serai heureux et sage.

C'est pourquoi la logique propositionnelle standard est une logique que l'on appelle "extensionnelle" : la validité de ses inférences ne dépend que de la vérité (= l'extension) des phrases qu'elles contiennent.

[2]Dans des cas d'indexicalité, les conditions de vérité varient avec le contexte d'énonciation. La condition de vérité de la phrase "J'ai faim maintenant" est que Philipp a faim le 31 décembre 2006, à 18 h : la phrase est vraie (exprime une proposition vraie) si et seulement si Philipp a faim le 31 décembre 2006, à 18 h. Énoncée par quelqu'un d'autre ou à un autre moment, la phrase aurait d'autres conditions de vérité.

Contrastons ce cas avec (**2c**). Savoir si je peux ou non inférer la (vérité de la) conclusion de (la vérité de) ses prémisses ne dépend pas seulement de la vérité de ses prémisses : il importe également de savoir si la deuxième prémisse est nécessaire ou pas. Ceci devient apparent si on remplace la deuxième prémisse par une autre ayant la même valeur de vérité, c'est-à-dire une prémisse qui est également vraie :

(2c') Il est nécessaire que 9 soit la somme de 5 et 4. 9 est le nombre des planètes. Donc il est nécessaire que le nombre des planètes soit la somme de 4 et 5.

(2c") Il est nécessaire que 9 soit la somme de 5 et 4. 9 est mon nombre préféré. Donc il est nécessaire que mon nombre préféré soit la somme de 4 et 5.

Même si leurs prémisses sont vraies, la conclusion de ces deux arguments est fausse. On voit donc que la validité d'une inférence en logique modale ne dépend pas seulement de la vérité des phrases concernées, mais également de leurs intensions,[3] en particulier de la question de savoir si elles sont nécessaires ou non.[4]

La distinction entre logiques extensionnelles et logiques intensionnelles repose sur la distinction entre extension et intension, une distinction technique de la philosophie du langage qui s'applique à toutes les expressions.[5] Ne considérant que les expressions qui sont des phrases (et dont l'extension est donc la valeur de vérité), on obtient un cas spécial de l'extensionnalité : le principe de *vérifonctionnalité*, qui dit que la valeur de vérité d'une phrase complexe ne dépend que des valeurs de vérité de ses phrases constituantes et des connecteurs logiques qui les relient. Le principe de vérifonctionnalité est donc aussi un cas particulier du principe de la compositionalité.

La vérifonctionnalité des connecteurs propositionnels signifie qu'on détermine la signification d'une phrase complexe qui les contient en déterminant sa valeur de vérité dans toutes les différentes possibilités selon lesquelles on peut attribuer des valeurs de vérité à ses constituants. On appelle une telle manière d'attribuer des valeurs de vérité aux constituants une *interprétation* de la phrase complexe. Une interprétation de la phrase complexe "Si Jean est malade, alors Maria est sage et heureuse et Pierre a eu raison", par exemple, consiste en l'attribution de **v** (vrai) à "Jean est malade" et à "Pierre

[3] "Intension" désigne l'ensemble de conditions qui permettent de définir un concept. Bien que l'extension de "la lune" et "le corps céleste le voisin le plus proche de la Terre dans l'espace" ont la même extension (= se réfèrent à la même chose), leurs définitions ou intensions doivent être différentes, parce qu'il est (métaphysiquement) possible que Vénus soit plus proche de la terre que la lune ne l'est maintenant.

[4] La même chose vaut pour la logique epistémique : pour que la conclusion de (**2d**) s'ensuive de ses prémisses, il faut que je *sache* que tout ce que Robert a dit est qu'il est fatigué et en a marre.

[5] La distinction entre "intension" et "extension" a été introduite par Carnap (1947) qui voulait ainsi préciser une distinction faite par Gottlob Frege (1892b) entre le sens ("Sinn", "sense") et la référence (ou dénotation, "Bedeutung", "reference") d'un terme singulier (un mot qui ne désigne qu'une chose) (cf. Frege 1971c: pour une traduction française). Selon Frege, un terme singulier comme "le président des États-Unis" a comme référence un individu spécifique, c'est-à-dire George W. Bush dans notre cas, et comme sens une condition que cet individu doit remplir pour être le référent du terme, c'est-à-dire *être le président des États-Unis.* La différence pour les prédicats ("termes généraux") et les phrases, est déjà plus controversée. Dans la théorie originale de Frege, la référence d'un prédicat comme "... est bleu" était le concept ("Begriff") BLEU ou BLEUITÉ, et la référence d'une phrase était sa valeur de vérité (pour Frege, le sens d'une phrase était la pensée qu'elle exprime). Carnap remplaçait cette distinction par la suivante :

	extension	intension
terme singulier "Fred"	le référent Fred, l'homme	un critère d'identification *le père de Nathalie, frère de Gerhard etc.*
prédicat "bleu"	l'ensemble toutes les choses bleues	le concept fonction qui détermine quels objets, dans une situation considérée, sont les choses bleues
phrase "p"	la valeur de vérité **v** ou **f**	la phrase fonction qui détermine si, dans une situation considérée, "p" est vrai

a eu raison" et de **f** (faux) à "Maria est sage et heureuse". Cette attribution des valeurs de vérité aux constituants simples nous oblige, logiquement, à attribuer **f** à la conjonction "Maria est sage et heureuse et Pierre a eu raison" (puisqu'une conjonction ne peut pas être vraie si un des conjoints est faux) et elle nous oblige aussi à attribuer la valeur **f** à l'implication toute entière, puisque son antécédent est vrai et son conséquent faux. C'est la logique propositionnelle qui détermine ces obligations en nous montrant comment la valeur de vérité de la phrase complexe dépend de l'interprétation choisie.

C'est par une *table de vérité* que l'on montre de quelle manière la valeur de vérité de la phrase complexe est fonction de la valeur de vérité de ses constituants. Par exemple, on dit ce qu'on entend par le connecteur unaire "$\neg$" en disant que "$\neg p$" est vraie si "p" est fausse et que "$\neg p$" est fausse si "p" est vraie. On détermine la signification de "$\wedge$" en disant que "$p \wedge q$" est vraie si "p" et "q" sont toutes deux vraies et fausses autrement. Mais considérons ces connecteurs plus en détail.

2.2 La négation

Dans les langues naturelles, il existe de nombreuses manières de nier une phrase telle que "j'aurais pu l'aider" :

N1 Il n'est pas le cas que j'aurais pu l'aider.

N2 Il était impossible pour moi de l'aider.

N3 Je n'aurais pas pu l'aider.

N4 L'aider m'était impossible.

N5 Aurais-tu pu l'aider ? Non.

N6 Il est faux que j'aurais pu l'aider.

Ce que toutes ces manières de nier "j'aurais pu l'aider" ont en commun, et la raison pour laquelle toutes ces phrases sont formalisées par "$\neg p$" est qu'elles sont vraies si et seulement s'il est faux que j'aurais pu l'aider. L'essence de la négation est donc qu'elle inverse la valeur de vérité de la phrase à laquelle elle est attachée : si cette dernière est vraie, sa négation est fausse ; si elle est fausse, sa négation est vraie. Nous pouvons donc définir la signification de "$\neg$" par la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ce tableau détermine la valeur de vérité de "$\neg p$" pour toutes les 'possibilités logiques' concernant la valeur de vérité de "p".[6] Comme dans une logique qui obéit au principe de bivalence (comme les logiques standards propositionnelles et des prédicats), toute phrase est ou bien vraie ou bien fausse, il n'y en a que deux : "V" ("vrai") et "F" ("faux").[7] Chacune de ses possibilités logiques correspond à une *interprétation* de la phrase "p" où selon l'une elle est vraie (et "$\neg p$" est donc fausse) ; et où selon l'autre, elle est fausse (et "$\neg p$" est donc vraie). Une interprétation est l'attribution d'une valeur de vérité (de "V" ou de "F") à une phrase. Pour donner la sémantique de "$\neg$", il faut spécifier de quelle manière la valeur de vérité d'une phrase complexe qui contient "$\neg$" dépend des valeurs de vérité de

[6] Nous appelons "possibilités logiques" les combinaisons consistantes de valeurs de vérités pour les phrases atomiques : une possibilité logique correspondra à une ligne dans un tableau comme celui que l'on vient de donner.

[7] La définition des valeurs de vérité est une question intéressante. Gottlob Frege les a pris pour des objets ('logiques'). Lorsque j'utilise "V" et "F" dans les tables de vérité, je ne veux pas parler d'objets, mais seulement spécifier la possibilité logique en question (comme possibilité qui est telle que si elle était actuelle, alors la phrase en question serait vraie ou fausse respectivement). Lorsque je parle des valeurs de vérité comme je parlerais des objets, j'utilise "**v**" et "**f**".

ses constituants – c'est ce que fait notre table de vérité. C'est pourquoi la table de vérité ci-dessus détermine (complètement) la signification de "¬".

On peut distinguer la négation interne de la négation externe. La négation externe, qui correspond à notre connecteur "¬", est un opérateur : elle s'applique à une phrase pour en faire une autre phrase (la négation de la première). Au contraire, la négation interne s'applique à un prédicat et en fait un autre, qui, au moins dans les cas paradigmatiques, s'applique à un objet si et seulement si le premier ne s'applique pas à cet objet. Dans les langages naturels, il n'est souvent pas clair quel est le type de négation dans une phrase. Considérons

- Il n'est pas le cas que la solution de cette équation est plus grande que 2.
- La solution de cette équation n'est pas plus grande que 2.

La deuxième phrase, surtout si elle est interprétée comme synonyme de "la solution de cette équation est égale ou plus petite que 2" présuppose que cette équation a une solution, ce que la première phrase ne fait pas. Si la deuxième est prise comme synonyme de "la solution de cette équation est 1 ou 2", elle présuppose même que la solution est un nombre naturel.[8] Ces présuppositions peuvent échouer. C'est pour cela que la négation interne dans les langues naturelles ne manifeste souvent pas ce que nous avons identifié comme l'essence de la négation (en logique) : elle n'est pas toujours vraie si la phrase positive qu'elle modifie est fausse.

Suivant Frege, nous adopterons donc par la suite la thèse selon laquelle toute phrase qui n'est pas vraie est fausse et toute phrase qui n'est pas fausse est vraie.[9] Ceci s'ensuit de notre acceptation des trois principes suivants :

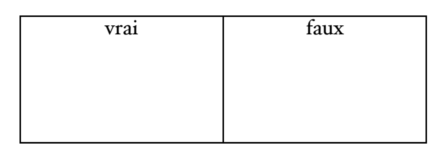
- Le *principe de bivalence* dit que où bien "p" est vrai ou bien "p" est faux (il n'y a pas de troisième 'valeur de vérité' comme 'indéterminé', 'vrai et faux', 'inconnu' etc.).
- Le *principe de non-contradiction* dit que, pour toute phrase "p", il n'est pas possible que "p" *et* "$\neg p$" soient vraies ensemble. Si "p" est vraie, alors "$\neg p$" ne l'est pas ; si "$\neg p$" est vraie, alors "p" ne l'est pas.
- Le *principe du tiers-exclu* dit que soit "p" soit "$\neg p$" est vraie – que "$p \vee \neg p$" ("soit p soit $\neg p$") est une vérité logique.[10]

Il n'y a que très peu de philosophes qui nient le principe de non-contradiction, c'est-à-dire qui pensent que "p" et "$\neg p$" peuvent tous deux être vrais ensemble – on les appelle les 'dialétheistes' et le logicien

[8] Cette distinction a motivé Russell dans son analyse des descriptions définies comme "le roi de France". Si nous nous posons la question de savoir si ou non le roi de France est chauve, une réponse affirmative *et* une réponse négative semble nous obliger à l'affirmation qu'il y a un roi de France, Russell (1905) a argumenté que la négation externe de "le roi de France est chauve" est "il n'est pas le cas qu'il y a exactement un individu qui est le roi de France et qui est chauve".

[9] Par rapport à des langues naturelles, cette présupposition est très douteuse. Mis à part les phrases qui commettent des 'erreurs de catégorie' comme "Le nombre 2 est célibataire", celles-ci contiennent aussi des phrases qui ont des présuppositions qui peuvent ne pas être satisfaites, comme "Le roi de France est chauve" présuppose qu'il y ait un roi de France qui est soit chauve, soit chevelu.

[10] Graphiquement, ces trois principes peuvent être interprétés comme suit : Imaginons une partition de l''espace logique' des valeurs de vérité des phrases. Le principe de bivalence dit alors qu'il ne faut considérer que deux possibilités – qu'une phrase soit vraie ou qu'elle soit fausse :



Le principe du tiers-exclu (= que "$p \vee \neg p$" est une vérité logique) dit qu'il faut placer soit "p" soit "$\neg p$" dans la colonne gauche. Le principe de non-contradiction dit que l'une des deux doit être placé dans la colonne de gauche. Le principe de bivalence dit que tout ce qu'on ne place pas à gauche doit être placé à droite (que la distinction entre les phrases vraies et fausses est une distinction exhaustive).

Graham Priest en est un exemple (cf. Priest 1993). De nombreux philosophes, cependant, nient le principe du tiers-exclu : selon eux, "$p \vee \neg p$" n'est pas une vérité logique. Les intuitionnistes, par exemple, interprètent l'affirmation qu'on a prouvé "$p \vee \neg p$" comme une affirmation que soit on a prouvé que p, soit on a prouvé que $\neg p$ (cf. Dummett 2000). Dans de nombreux cas, ni l'un ni l'autre n'est possible (prenons par exemple "soit il pleut demain, soit il ne pleut pas demain" – comment pourrais-je *prouver* la présence ou l'absence de la pluie pourdemain ?). Enfin, ceux qui nient le principe de bivalence sont ceux qui préfèrent une logique à plusieurs valeurs de vérité, par exemple une logique qui accorde aux phrases dont on ne sait pas si elles sont vraies ou fausses la valeur de vérité 'inconnu'.

Étant donné que la contribution de "$\neg$" aux conditions de vérité d'une phrase complexe qui la contient comme connecteur principal est l'inverse des valeurs de vérité (de "V" en "F" et vice versa), une autre caractéristique de la négation est la loi de la double négation :

(1) $$\frac{\neg\neg p}{p}\ \neg\mathbf{E}$$

La validité de ce schéma d'inférence signifie qu'on peut inférer "p" de la phrase doublement niée "$\neg\neg p$" : elle nous donne le droit d' 'éliminer' la double négation (d'où le nom "$\neg$**E**" pour **E**limination de la (double) négation).[11]

La négation est particulièrement importante pour les preuves par réduction à l'absurde (*reductio ad absurdum*). L'idée d'une telle preuve est la suivante : on suppose qu'une phrase particulière est vraie (même si on croit qu'elle est fausse). Sous cette supposition, on montre qu'il s'ensuit quelque chose d'absurde (une phrase dont on *sait* qu'elle est fausse). On conclut que la supposition initiale était fausse – si elle était vraie, une chose dont on sait qu'elle est fausse serait vraie, alors elle est fausse. Si on abrège par "$\perp$" n'importe quelle phrase dont on sait qu'elle est fausse ("$\perp$" représente donc 'l'absurde'), on peut formuler cette règle comme suit :

(2) $$\frac{p \rightarrow \perp}{\neg p}\ \neg\mathbf{I}*$$

On reviendra sur ce schéma d'inférence plus tard.[12]

L'élimination de la double négation s'ensuit des principes de non-contradiction et du tiers-exclu. La loi de non-contradiction dit qu'il n'est pas possible que "p" et "$\neg p$" soient tous deux vrais. Si alors "$\neg\neg p$" est vrai, alors "$\neg p$" ne l'est pas. Par le principe du tiers exclu, si "$\neg p''$ n'est pas vrai, alors "p" est vrai. Donc : si "$\neg\neg p$" est vrai, alors "p" l'est aussi.

2.3 La conjonction

Considérons les phrases suivantes :

C1 Ils se sont mariés et ont eu un enfant.

C2 Ils ont eu un enfant et se sont mariés.

C3 Pierre et Paul étudient la logique, mais ils sont heureux et sages.

C4 Elle est allée voter bien que sa mère lui disait de rester à la maison.

[11] En acceptant que la règle de l'élimination de la double négation est valide, nous faisons un autre pas qui nous éloigne des langues naturelles. Dans beaucoup de contextes, il y a une différence entre "Je suis d'accord" et "Il n'est pas le cas que je suis en désaccord".

[12] Nous avons rencontré ce schéma d'inférence déjà dans l'argument contre l'existence de Dieu à la p. 27 : conclure de "si Dieu existe, alors il n'existe pas" que Dieu n'existe pas est une instance de $\neg\mathbf{I}*$.

C5 Je suis heureux et sage.

C6 Je suis heureux, mais sage.

Qu'est-ce qui nous permet de dire qu'il s'agit de phrases conjonctives, même si, par exemple "je suis heureux parce que je suis sage" et "je suis heureux ou sage" ne le sont pas ? L'important semble être que la vérité d'une phrase conjonctive entraîne la vérité de ses deux conjoints et que la vérité de ses deux conjoints entraîne la vérité de la phrase conjonctive. On peut donc dire que l'essence de la conjonction, "$\wedge$", est qu'elle rend les inférences suivantes valides :

(3) $\dfrac{p, q}{p \wedge q}\ \wedge\mathbf{I} \qquad \dfrac{p \wedge q}{p}\ \wedge\mathbf{E} \qquad \dfrac{p \wedge q}{q}\ \wedge\mathbf{E}$

Il s'agit des règles d'introduction ("$\wedge$**I**") et d'élimination ("$\wedge$**E**") de notre connecteur "$\wedge$" : on peut inférer une conjonction de ses deux conjoints et on peut inférer les conjoints de la conjonction.

Si on considère que le comportement inférentiel (et donc, dans une logique extensionnelle, la signification) du connecteur "et" est déterminé par $\wedge$**I** et $\wedge$**E** et si on formalise les phrases (**C1**) à (**C6**) par "$\wedge$", on perd de nombreuses nuances de significations que ces phrases ont dans la langue naturelle. Par exemple, on ne fait pas de distinction entre "et" et "mais" (et donc pas de distinction entre (**C5**) et (**C6**)). Frege, en argumentant pour une logique extensionnelle, disait que cette différence n'appartient pas au domaine de la signification au sens restreint du mot, mais au domaine de ce qu'il appelle le "ton" ou la "couleur" ("Färbung") d'une phrase. La signification d'une expression, au sens restreint, est ce qui est préservé par une bonne traduction. Les différences entre "et" et "mais", cependant, sont des différences de tonalité qui peuvent même se perdre dans une bonne traduction.[13]

Nos exemples nous montrent aussi qu'il faut parfois reformuler une phrase pour rendre manifeste sa structure logique : (**C3**), par exemple, devient la phrase barbare : "Pierre étudie la logique et Paul étudie la logique et Pierre est heureux et Paul est heureux et Pierre est sage et Paul est sage".[14] Cette transformation n'est pas toujours évidente par rapport à des phrases de la langue naturelle.[15] C'est aussi pour cette raison que nous travaillerons avec une langue formelle.

La conjonction, formalisée par "$\wedge$", est commutative : cela veut dire que "$p \wedge q$" et "$q \wedge p$" sont équivalentes – il n'y a pas de raisons logiques de les distinguer. Ce qui distingue "Ils se sont mariés et ont eu un enfant" (**C1**) et "Ils ont eu un enfant et se sont mariés" (**C2**) ne concerne donc pas la logique. La logique extensionnelle ne concerne que la manière dont la valeur de vérité d'une phrase de la forme "$p \wedge q$" dépend des valeurs de vérité de "p" et de "q". La signification de "$\wedge$" est donc déterminée par la table de vérité suivante :

[13] En général, le 'ton' sert à manifester l'attitude de celui qui utilise une phrase par rapport à ce qu'il dit. En utilisant "mais" au lieu de "et", par exemple, je peux rendre visible que je pense qu'il y a un contraste entre les deux phrases. En utilisant "canasson" au lieu de "cheval", je peux exprimer une attitude négative etc. Il est souvent difficile de dire qu'elle est l'attitude signalée par l'usage d'un certain mot : il n'est pas, p. ex., exact de dire que "p, mais q" signale toujours un contraste entre ces phrases – parfois le contraste est plutôt entre des raisons pour et contre une autre phrase, comme quand je répond à la phrase d'inviter le prof. X de donner une conférence par "Il est un très bon philosophe, mais actuellement aux États-Unis."

[14] Etant donné que la conjonction est commutative (c'est-à-dire "p et q" et vrai si et seulement si "q et p" l'est aussi), nous n'avons pas besoin de mettre des parenthèses.

[15] Comparons par exemple "Marie et Simone ne sont pas contentes de leurs maris." Le sens de la phrase, mais pas forcément sa forme, nous oblige à transformer cette phrase en "Marie n'est pas contente de son mari et Simone n'est pas contente de son mari *à elle*", même si, par exemple "Marie et Simone ne sont pas contentes des élections" donne "Marie n'est pas contente des élections et Simone n'est pas contente des élections." Un autre problème concerne la conjonction 'collective' comme dans "Pierre et Paul ont soulevé le piano". Ceci peut être vrai sans que "Pierre a soulevé le piano" et "Paul a soulevé le piano" soient vraies. Il ne s'agit donc pas d'une conjonction au sens logique.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

On voit que “$p \wedge q$” n’est vraie que si les deux phrases “p” et “q” sont vraies – si au moins une est fausse, “$p \wedge q$” l’est aussi.

2.4 La disjonction

Considérons les assertions suivantes :

D1 Il pleut ou il ne pleut pas.

D2 [Qu’est-ce que tu veux dans la vie ?] Me marier, être heureux ou gagner un million.

D3 [Qui prendras-tu dans ta voiture ?] Jean-Pierre ou Paul.

D4 [Qui gagnera à la loterie ?] Je vais gagner ou tu vas gagner.

D5 [A quelle heure arrive-t-elle ?] A six ou à sept heures.

D6 Tu es ou seras heureux ou sage.

Ce que toutes ces phrases on en commun, c’est qu’elles sont vraies si un de leurs disjoints est vrai. Il suffit qu’il ne pleuve pas pour que (**D1**) soit vraie, que je me marie pour avoir réussi dans ma vie (**D2**), prendre Paul ou arriver à six heures pour tenir mes promesses (**D3** et **D5**), que tu gagnes (**D4**), que tu sois sage (**D6**). Comme auparavant, il faut parfois élargir les phrases pour rendre explicites leurs formes logiques : (**D6**), par exemple, devient : “tu es heureux ou tu seras heureux ou tu es sage ou tu seras sage”.

D’autre part, il nous faut distinguer la disjonction inclusive de la disjonction exclusive. Une disjonction inclusive est vraie si et seulement si *au moins un* des disjoints est vrai, y compris lorsque les deux phrases disjointes sont vraies. C’est l’interprétation naturelle des phrases (**D2**) et (**D4**) : il serait absurde, au cas où tous mes voeux se réalisent, ou dans celui où nous gagnons tous deux à la loterie, de dire que les réponses aux questions (**D2**) et (**D4**) sont fausses. C’est la disjonction inclusive qui est formalisée par “$\vee$” (qui vient du latin “vel”). Une disjonction exclusive (“aut” en latin) est vraie si et seulement si l’un des disjoints, mais pas les deux, est vrai. C’est l’interprétation naturelle de (**D3**) (étant donné que je n’ai qu’une seule place de libre dans ma voiture) et de (**D5**) (étant donné qu’elle n’arrive qu’une seule fois). Dans certains cas, l’interprétation exclusive est la seule possible, comme pour “boire ou conduire”. L’incompatibilité des disjoints dans un cas de disjonction exclusive vraie peut être due à différentes raisons. Même dans le cas où ces raisons sont des raisons logiques, comme dans (**D1**), nous ne sommes cependant pas obligés de formaliser une disjonction comme disjonction exclusive. Quand il le faut, nous pouvons toujours ajouter “et non pas les deux” à une disjonction inclusive.[16]

L’essence de la disjonction (inclusive) est qu’une phrase disjonctive est vraie si et seulement si au moins l’un de ses disjoints est vrai. La signification du connecteur “$\vee$” est donc déterminée par la table de vérité suivante :

[16] De même, on peut ajouter “ou les deux” pour rendre explicite qu’il s’agit d’une disjonction inclusive, ce qui peut avoir des effets rhétoriques : “Interrogé sur les auteurs [des] attaques [récentes], George W. Bush a estimé “qu’ils sont soit, ou à la fois, et probablement les deux, des baassistes ou des terroristes étrangers”, faisant allusion aux membres du parti du dirigeant déchu Saddam Hussein. “Ils veulent tuer et créer le chaos”, a-t-il souligné, ajoutant que les terroristes “veulent nous voir partir, mais nous ne partons pas”.” (*Le Monde*, 29 octobre 2003) – même s’il nous semble difficile d’imaginer quelqu’un qui soit à la fois iraquien et terroriste étranger.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Comme dans le cas de la conjonction, on peut également caractériser la signification de "$\vee$" en termes d'inférences qui l'introduisent dans des formules ou l'éliminent d'une formule :

(4) $\frac{p}{p \vee q}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{q}{p \vee q}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{p \vee q, \neg p}{q}\ \vee\mathbf{E}$

Les deux règles d'introduction nous disent qu' on peut inférer "$p \vee q$" si l'on a établi "p" (et aussi qu'on peut inférer "$p \vee q$" si l'on a établi "q") et que l'on peut éliminer des disjonctions dont on a établi que l'un des disjoints est faux : si l'un est faux, l'autre doit forcément être vrai. Cette règle d'inférence $\vee\mathbf{E}$ s'appelle "le syllogisme disjonctif" et sa validité avait déjà été reconnue par Aristote. Voici quelques exemples :

- Je serai heureux ou sage. Je ne serai pas sage. Donc je serai heureux.
- Je choisis soit une soupe soit une salade. Je ne choisis pas une soupe. Donc je choisis une salade.
- Il faut soit être vigilant soit ne pas avoir peur. Il n'est pas le cas qu'il faut être vigilant. Donc il faut ne pas avoir peur.

On rencontrera, à la p. 118 du ch. 6, une règle d'élimination de la disjonction un peu plus compliquée que $\vee\mathbf{E}$.

2.5 L'implication et l'équivalence matérielle

Considérons les assertions suivantes :

I1 Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage.

I2 A condition qu'elle fasse les exercices, elle réussira l'examen.

I3 Étant donné que je n'ai rien d'autre à faire, je peux très bien sortir ce soir.

I4 Quand il pleut, je suis triste.

I5 Si je ne m'appelle pas Arthur, je ne ferai jamais de logique.

I6 Si je ne fais jamais de logique, alors je m'appelle Arthur.

Toutes ces phrases peuvent être formalisées par le connecteur "$\rightarrow$" ("si ... alors $\cdots$"),[17] qu'on appelle l'"implication matérielle", à condition qu'elles soient fausses si et seulement si leur antécédent (la phrase qui suit le "si") est vrai et leur conséquent (la phrase qui suit le "alors") est faux. Même si cette condition est certainement nécessaire,[18] il peut paraître douteux qu'elle soit aussi suffisante. Les cas délicats sont ceux dans lesquels l'antécédent est faux : est-ce que cela suffit pour que l'implication soit vraie quelque soit le conséquent ? Dans la langue naturelle, on est dans de nombreux cas tenté de dire non : il faut qu'il y ait une connexion entre l'antécédent et le conséquent, que l'antécédent, s'il est vrai,

[17] "Si ... alors $\cdots$" n'est pas toujours l'expression la plus commode à substituer pour "$\rightarrow$", parce qu'elle nécessite un changement dans l'ordre des phrases. Parfois "$\cdots$ seulement si ..." est plus appropriée car elle relie les mêmes phrases mais dans l'ordre opposé.

[18] Il me semble incontestable que quelqu'un qui affirme (**I1**) à (**I6**) a tort si, respectivement, j'étudie la logique mais je ne serai pas heureux ni sage ; elle fait les exercices mais elle échoue à l'examen ; je n'ai rien d'autre à faire mais il n'est pas le cas que je peux sortir ce soir ; il pleut, mais je ne suis pas triste ; je m'appelle Arthur et ferai de la logique ; je ne fais jamais de logique, mais ne m'appelle pas Arthur.

rende le conséquent probable, qu'il explique pourquoi le conséquent est vrai etc.[19] Les défenseurs de cette thèse et de ce qu'ils appellent l'"implication stricte" pensaient qu'une implication n'est vraie que si l'antécédent nécessite le conséquent – s'il est impossible (et pas seulement faux) que l'antécédent soit vrai et le conséquent soit faux (Ackermann 1950). La logique propositionnelle standard, cependant, n'a pas choisi cette voie : pour elle, il suffit pour la vérité d'une implication "si p alors q" qu'il ne soit pas le cas que "p" est vraie et "q" est fausse – l'antécédent ne formule qu'une condition suffisante, mais aucunement nécessaire pour le conséquent.[20] C'est pour distinguer cette relation d'implication, dont traite la logique standard, des types d'implications qui requièrent un lien plus étroit entre antécédent et conséquent, qu'on appelle la première "implication matérielle".

Il y a différentes manières de justifier cette décision d'interpréter "si p alors q" comme équivalent à "soit $\neg p$ soit q". L'argument le plus pertinent est que cette relation joue certainement un rôle important dans notre raisonnement propositionnel : des 16 connecteurs binaires vérifonctionnels (qui correspondent aux différentes possibilités de distribuer V et F sur quatre places, cf. ci-dessous, p. 48), 'V-F-V-V' est celui qui correspond le plus à notre usage de "si ... alors $\cdots$". Un autre argument consiste à dire que les phénomènes qui intéressaient les défenseurs de l'implication stricte sont mieux expliqués à l'aide d'une distinction entre implication et conséquence (cf. les pages pp. 63 et suivants dans la leçon 3) et entre les conditionnelles indicatives et subjonctives. Supposons que je tienne un crayon particulier et que je ne le lâche pas. Considérons les phrases suivantes :

I7 Si je lâche le crayon, il tombe par terre.

I8 Si je lâche le crayon, il se colle au plafond.

Nous pensons, intuitivement, que si l'une des deux phrases doit être vraie, ce sera plutôt la première. Pourtant, l'antécédent des deux conditionnels ("Je lâche ce crayon") est faux dans la situation envisagée et donc les deux sont vraies dans la logique propositionnelle standard. Au lieu d'introduire une implication plus 'stricte', leur différence est expliquée par la différence entre deux autres phrases, à savoir les suivantes :

(2e) Si je lâchais le crayon, il tomberait par terre.

(2f) Si je lâchais le crayon, il se collerait au plafond.

(**2e**) et (**2f**), qu'on appelle des 'implications subjonctives', ont un autre comportement logique que (**I7**) et (**I8**) : pour qu'elles soient vraies, il est requis qu'il soit *impossible* que je lâche le crayon sans qu'il tombe par terre et qu'il est *impossible* que je le lâche sans qu'il se colle au plafond. Comme la deuxième n'est pas le cas, (**2f**) est faux.[21]

[19] Cependant, cela n'est pas toujours évident. Même dans le langage naturel nous reconnaissons un certain type d'équivalence entre "Si je ne me trompe, vous êtes déjà venu" ("$\neg p \rightarrow q$") et "Soit je me trompe fort, soit vous êtes déjà venu" ("$p \vee q$") et entre "S'il me rencontre, il me salue toujours" ("$p \rightarrow q$") et "Il ne me rencontre jamais sans me saluer" ("$\neg(p \wedge \neg q)$").

[20] Une manière de rendre cela plausible est de penser les tables de vérité comme indiquant les possibilités que l'on exclut en affirmant une phrase complexe. Si je te dis "si tu es gentil, je te donnerai un bonbon", j'exclus la possibilité que tu sois gentil sans recevoir un bonbon. Cependant, je n'exclus pas que je te donne un bonbon pour d'autres raisons que ta gentillesse.

[21] Le problème de l'interprétation des implications subjonctives, qui sont aussi appelées 'contrefactuelles' (puisque l'usage du conditionnel suggère que l'antécédent ne soit pas le cas), est un problème majeur de la philosophie du langage. Certains, dont Quine, ont exprimé des doutes quant à l'existence d'une systématisation générale et satisfaisante de leur usage ordinaire. Comment attribuer, demandent-ils (cf. Quine 1950: 23), des valeurs de vérité aux phrases suivantes qui apparaissent être incompatibles

(2g) Si Bizet et Verdi avaient été des compatriotes, Bizet aurait été italien.

(2h) Si Bizet et Verdi avaient été des compatriotes, Verdi aurait été français.

Une implication matérielle, dans la logique propositionnelle standard, est vraie si et seulement s'il n'est pas le cas que l'antécédent est vrai et le conséquent faux. "Si p alors q" est donc traité comme équivalent à "ou bien $\neg p$ ou bien q". En appliquant le syllogisme disjonctif ($\vee$**E**) à la formule "$\neg p \vee q$", on obtient "Si $\neg\neg p$, alors q". En éliminant la double négation ($\neg$**E**), on retourne à "Si p, alors q". La signification de "$\rightarrow$", qui représente l'implication matérielle, est donc donnée par la table de vérité suivante :

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cette table de vérité pour "$\rightarrow$" a comme conséquence immédiate que toute implication matérielle ayant un antécédent faux (comme (**I5**)) et toute implication matérielle ayant un conséquent vrai (comme (**I6**)) est vraie. Elle dit que si "$p \rightarrow q$" est vrai, alors la vérité de "p" est une *condition suffisante* pour la vérité de "q" et la vérité de "q" est une *condition nécessaire* pour la vérité de "p" : "p" ne peut pas être vrai sans que "q" le soit aussi et la vérité de "p" exclu le cas où "q" est faux. L'implication matérielle est donc étroitement liée à la validité du schéma d'inférence suivant :

(5) $$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \end{array}}{q} \rightarrow \mathbf{E}$$

Cette inférence, qui nous autorise à 'éliminer' une implication si l'on a établit son antécédent est aussi appelée "modus ponens" (parfois, plus exactement, "modus ponendo ponens") : c'est en 'posant' quelque chose (à savoir "p") que nous pouvons 'poser' quelque chose d'autre (à savoir "q").

L'implication matérielle pose quelques problèmes particuliers de formalisation. Dans le langage ordinaire, on trouve souvent des énoncés qui ne formulent pas une condition suffisante, mais seulement une condition nécessaire :

I9 Il n'est content que si elle vient aussi.

(**I9**) ne spécifie pas une condition suffisante pour son bonheur futur, mais une condition nécessaire : si elle ne vient pas, il ne sera pas content. Il faut donc mettre la flèche dans la bonne direction : "s'il est content alors elle vient aussi" – on voit dans cet exemple que le langage ordinaire présuppose souvent un lien de causalité ou d'explication dans des phrases de la forme "si... alors $\cdots$". La logique, cependant, ne s'en occupe pas : tout ce qu'il faut pour rendre vraie la phrase "s'il est content alors elle vient aussi" c'est qu'il ne soit pas le cas qu'il est content et qu'elle ne vient pas.[22]

Un autre problème est posé par l'ordre des constituants : afin de formaliser les phrases suivantes, il faut intervertir l'ordre des phrases simples :

I10 Nous irons faire un pique-nique pourvu qu'il fasse beau temps.

I11 Je t'aide à condition que tu sois gentil.

(**I10**) devient alors "s'il fait beau temps, nous irons faire un pique-nique" ("il n'est pas le cas qu'il fasse beau temps et que nous n'allions pas pique-niquer") et (**I11**) devient "si tu es gentil, je t'aide" ("il n'est pas le cas que je t'aide et tu n'es pas gentil").

Considérons maintenant les phrases suivantes :

[22] Il ne faut pas confondre "... seulement si $\cdots$" avec "... si seulement $\cdots$" : dans le dernier cas, il s'agit d'un "si" ordinaire et "seulement" y est ajouté pour mettre une emphase.

E1 Je suis content si et seulement si elle me salue.

E2 Il me rend toujours visite – et seulement – quand j'ai quelque chose à manger chez moi.

E3 Elle y arrivera au cas où, mais seulement au cas où elle se dépêche.

E4 Elle y arrivera si, mais seulement si elle se dépêche.

Dans ces phrases, on dit que deux phrases sont soit vraies ensemble soit fausses ensembles – elles ont les mêmes valeurs de vérité. L'implication matérielle assure pour une part ceci : si l'antécédent est vrai, le conséquent doit l'être aussi. Ce que ces cas de l'*équivalence matérielle* ajoutent, c'est que si l'antécédent est faux, le conséquent doit l'être aussi. Si on utilise le principe de conversion (que de "si p, alors q", on peut déduire "si $\neg q$, alors $\neg p$"), on voit que l'équivalence matérielle est équivalente à une conjonction de deux implications : (**E1**) est équivalent à "Si elle me saluait, je serais content et si j'étais content, elle me saluerait" – que son salut est une condition suffisante (premier conjoint) et nécessaire (deuxième conjoint) à mon bonheur. On a donc les règles d'introduction et d'élimination suivantes :

(6) $$\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow p}{p \leftrightarrow q} \leftrightarrow \mathbf{I} \qquad \frac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q} \leftrightarrow \mathbf{E} \qquad \frac{p \leftrightarrow q}{q \rightarrow p} \leftrightarrow \mathbf{E}$$

En termes de table de vérité, "$p \leftrightarrow q$" nous dit que "p" et "q" sont soit vraies soit fausses ensembles :

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

2.6 Les tables de vérité

Nous avons vu de quelle manière les différents connecteurs déterminent la valeur de vérité d'une phrase complexe comme une fonction des valeurs de vérité de ses constituants atomiques. C'est ainsi que nous pouvons calculer des tables de vérité (et donc la signification) de phrases complexes : en superposant leurs valeurs de vérité pour les différentes interprétations des phrases simples qu'elles contiennent.

Construisons une table de vérité pour "$\neg(\neg p \vee \neg q)$". Nous commençons par l'interprétation des phrases atomiques : étant donné qu'il y en a deux, "p" et "q", nous avons deux colonnes (quatre 'possibilités logiques') :

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Comme les deux phrases atomiques sont niées dans la formule "$\neg(\neg p \vee \neg q)$", nous ajoutons deux colonnes avec les valeurs de vérité de leurs négations :

p	q	$\neg p$	$\neg q$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

A partir de ces deux nouvelles colonnes, nous calculons la valeur de vérité de leur disjonction :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Dans notre formule initiale "$\neg(\neg p \vee \neg q)$", cette disjonction est niée :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F

Dans la colonne de droite, on retrouve maintenant les valeurs de vérité de la formule initiale "$\neg(\neg p \vee \neg q)$" pour les quatre interprétations différentes de ses phrases atomiques. On voit que "$\neg(\neg p \vee \neg q)$" n'est vraie qu'à condition que les deux phrases atomiques "p" et "q" soient vraies ; si l'une d'entre elles (au moins) est fausse la phrase complexe l'est également.

La table de vérité nous montre de quelle manière la valeur de vérité de cette formule complexe dépend des valeurs de vérité de ses constituants qui – selon le principe de vérifonctionnalité – la 'composent' de manière fonctionnelle.[23]

Il existe une autre méthode pour arriver aux mêmes résultats. Nous commençons directement avec la formule dont les valeurs de vérité pour les différentes interprétations nous intéressent, et faisons une colonne pour chaque phrase atomique et connecteur qu'elle contient :

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$

Nous ajoutons les interprétations pour les phrases atomiques dans toutes les colonnes correspondantes :

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
		V			V
		V			F
		F			V
		F			F

Nous calculons leurs négations :

[23]Cela veut dire que l'attribution des valeurs de vérité aux constituants atomiques *déterminent* la valeur de vérité de la formule complexe. Mathématiquement, une fonction qui relie deux ensembles, $f : A \rightarrow B$, est une relation (un ensemble de paires dont le premier membre appartient à A et le deuxième à B ($\{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$), qui est telle que le choix de a détermine celui de b : il n'est pas le cas qu'on a $\langle a, b'\rangle$ et $\langle a, b''\rangle$ pour deux $b', b'' \in B$ différents : $(f(a) = b' \wedge f(a) = b'') \rightarrow b' = b''\}$.

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
	F	V		F	V
	F	V		V	F
	V	F		F	V
	V	F		V	F

Toujours selon l'ordre dont la formule est construite avec ses constituants, nous calculons la disjonction à partir des colonnes 2 et 5 :

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
	F	V	F	F	V
	F	V	V	V	F
	V	F	V	F	V
	V	F	V	V	F

Nous sommes donc arrivés au connecteur principal, qui est la négation de toute la parenthèse :

$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$q)$
V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	F	V
F	V	F	V	V	F

Nous avons mis la colonne de gauche en gras pour montrer qu'il s'agit de la colonne du connecteur principal et donc de celle où figurent les valeurs de vérité de la formule complexe. Cette colonne ne se trouve pas forcément à gauche.

Comme dans la première méthode, les différentes lignes (les différentes interprétations des phrases atomiques) représentent des possibilités logiques. Si la colonne qui correspond au connecteur principal ne contient que des "V", on appelle la formule en question une *"tautologie"*. Si elle ne contient que des "F", on l'appelle une *"contradiction"*. Une tautologie est une phrase vraie quelle que soit la possibilité logique considérée. Elle est vraie dans toutes les possibilités logiques ; elle est donc une 'nécessité logique'. On appelle de telles nécessités des "vérités logiques". Une phrase est logiquement vraie (une vérité logique) si et seulement si elle est vraie dans toutes les possibilités logiques, *i.e.* si elle est une tautologie.

2.7 Quelques tautologies

La notion de tautologie nous aide à établir la validité des inférences. Considérons l'inférence suivante :

> Si les communistes n'ont pas de succès, la république sera sauvée.
> La république sera sauvée.
> Donc les communistes n'ont pas de succès.

Il s'agit du 'sophisme de l'affirmation du conséquent' qui a la forme suivante.

Si les communistes n'ont pas de succès, la république sera sauvée.	$p \rightarrow q$
La république sera sauvée.	q
Donc les communistes n'ont pas de succès.	p

Mais pourquoi est-ce un sophisme ? Si nous voulons déterminer la validité de cet argument, nous avons à montrer que les prémisses ne peuvent pas être vraies et la conclusion fausse – qu'il n'y a pas d'interprétation qui rende vraies les prémisses et fausse la conclusion. Nous avons donc à montrer que l'implication matérielle correspondante est une tautologie. Construisons une table de vérité pour cette implication matérielle correspondante :

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q$	$((p \to q) \wedge q) \to p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

L'argument n'est pas valide car la troisième ligne ouvre la possibilité selon laquelle les prémisses seraient vraies et la conclusion, fausse. Celui qui pense que les communistes aurons du succès et que la république sera sauvée, pourrait affirmer les prémisses et nier la conclusion.

Cet exemple nous montre que les tables de vérités nous permettent à la fois de savoir si un argument est valide ou non (il est valide si et seulement si l'implication matérielle entre les prémisses et la conclusion est une tautologie), mais aussi de construire des contre-exemples à de fausses affirmations selon lesquelles telle ou telle phrase est tautologique.

Les tables de vérité sont également utiles pour gérer des arguments complexes ayant plusieurs prémisses. Rien ne nous empêche de considérer plus de deux phrases atomiques à la fois. Étant donné que les possibilités logiques sont déterminées par la vérité et la fausseté des phrases atomiques, il faut alors considérer plus de quatre interprétations : 8 ($= 2^3$) pour trois phrases atomiques, 16 ($= 2^4$) pour quatre, 32 (=2^5) pour cinq etc.

Les tables de vérité nous permettent d'illustrer la conséquence suivante du principe de vérifonctionnalité : comme le principe de vérifonctionnalité implique que la valeur sémantique (= la signification) d'un connecteur binaire (= à deux places) est complètement déterminée par sa table de vérité, il s'ensuit qu'il ne peut y avoir que 16 (=2^{2^2}) connecteurs binaires dans la logique propositionnelle. On peut constater cela en considérant les 16 possibilités différentes de distribuer les "V" et les "F" sur les quatre interprétations de "p" et "q" :

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Nous avons déjà considéré les colonnes 2 (disjonction), 4 (p), 5 (implication matérielle $p \to q$), 6 (q), 7 (équivalence), 8 (conjonction), 10 (négation de q), et 13 (négation de p). On retrouve dans la colonne 3, la 'contre-implication' ("$q \to p$") et on remarque que chaque opérateur a sa négation dans la colonne qui lui est symétrique par rapport à la double ligne qui se situe entre les colonnes 8 et 9. Ainsi 15 est la 'non-disjonction' ('rejet' : ni p ni q), 10 la 'non-équivalence' ('alternative' ou disjonction exclusive) et 9 est la 'non-conjonction' ('incompatibilité' : pas à la fois p et q). On reviendra sur les lignes 1 (tautologie) et 16 (contradiction) dans la section 3.2.

Points à retenir

1. La logique propositionnelle étudie les connecteurs propositionnels qui relient des phrases ; la logique des prédicats étudie en outre les quantificateurs, les relations et les fonctions.
2. Le connecteur principal d'une formule est le dernier à être évalué.
3. La syntaxe détermine quelles sont les formules bien formées d'une langue.
4. La sémantique donne les interprétations des signes ; elle leur associe une signification.
5. Selon le principe de vérifonctionnalité (pour la logique propositionnelle), les valeurs de vérité possibles d'une phrase complexe ne dépendent que des valeurs de vérité des phrases simples qui la constituent et des connecteurs qui les relient.
6. "$\neg p$" est vrai si et seulement si "p" est faux.
7. "$p \wedge q$" est vrai si et seulement si "p" et "q" sont vrais ensemble.
8. "$p \vee q$" est vrai si et seulement si au moins un de "p" et "q" est vrai.
9. "$p \rightarrow q$" est vrai si et seulement si soit "p" est faux, soit "q" est vrai.
10. Une table de vérité détermine la signification d'un connecteur propositionnel en montrant de quelle manière la valeur de vérité d'une phrase complexe qui le contient dépend des valeurs de vérités de ses constituants simples.

Chapitre 3

Relations logiques et inférences logiques

3.1 Le langage-objet et le métalangage

Nous avons vu dans la deuxième leçon (p. 37) qu'une négation est vraie si et seulement si la proposition niée *ne* l'est *pas*, qu'une conjonction est vraie si et seulement si le premier *et* le deuxième conjoint sont vrais, qu'une disjonction est vraie ssi le premier disjoint *ou* le deuxième est vrai, qu'une implication matérielle est vraie ssi *si* l'antécédent est vrai, *alors* le conséquent l'est aussi et enfin, qu'une équivalence matérielle est vraie ssi la première proposition est vraie *si et seulement si* la deuxième l'est aussi. Pour spécifier les tables de vérités des connecteurs propositionnels, nous avons utilisé ces mêmes connecteurs. Ces arguments ne sont-ils pas circulaires ? Ne s'agit-il pas d'un cercle vicieux ?

Pour répondre à ces questions, il faut revenir sur la distinction entre usage et mention. Bien sûr il peut y avoir une circularité epistémique – quelqu'un qui ne possède pas les concepts mêmes de ces relations logiques entre phrases, aurait des difficultés à comprendre leur sémantique. Mais, du fait de la distinction entre langage-objet et métalangage, il ne s'agit pas d'une circularité logique, ni d'un cercle vicieux.

Nous nous servons des mots pour parler du monde et des noms des mots pour parler des mots. Mettre des guillemets autour d'une expression linguistique est une manière – mais pas la seule – de former de tels noms.[1] On utilise un mot en énonçant une phrase qui le contient. On mentionne un mot en utilisant un nom pour ce mot (comme, par exemple, l'expression qui est formée par : des guillemets – le mot en question – et encore des guillemets.

Un avantage de la création des noms d'expressions à l'aide de guillemets est qu'elle peut être itérée : "Paris est jolie" parle de (mentionne) Paris et contient (utilise) "Paris". " "Paris" a six lettres" mentionne ou parle du mot "Paris" et contient ""Paris"". " "Paris"" désigne "Paris" qui désigne Paris. Le mot " "Paris"" contient six lettres et une paire de guillemets ; "Paris" contient six lettres et ne contient pas de guillemets ; et Paris contient des personnes, des bâtiments et une université.

Il y a une distinction entre différents niveaux de langage – entre le *langage-objet* et le *métalangage* –

[1] Une autre manière est de citer une phrase et de lui donner un numéro : c'est ainsi que nous donnons des exemples de phrases, comme les phrases (**3a**), (**3b**) et (**3c**) qui se suivent. Nous utiliserons donc les expressions "(**3a**"), "(**3b**") et "(**3c**") comme des noms pour ces phrases.

liée à la distinction entre l'utilisation et la mention d'un mot. La phrase :

(3a) Paris est une jolie ville.

est une phrase du langage-objet, puisqu'elle me sert à parler d'une réalité qui n'est aucunement linguistique. La phrase

(3b) "Paris" est mon mot préféré.

me sert à parler d'un mot du français : (**3b**) fait partie d'un métalangage, c'est-à-dire du langage à l'aide duquel je parle d'un autre langage – du langage-objet dont font partie des phrases comme (**3a**) (qui dans ce cas fait partie de la langue française). En itérant la procédure, on obtient :

(3c) " "Paris" est mon mot préféré." est une phrase bien formée du métalangage.

(**3c**) est une phrase qui appartient à un méta-métalangage, un langage qui permet de parler du métalangage dont fait partie la phrase (**3b**). La distinction entre langage-objet et métalangage est une distinction relative. (**3c**) est dans un métalangage relatif à (**3b**), lequel, à son tour, appartient à un métalangage relatif à (**3a**). C'est par rapport à (**3a**) que (**3c**) appartient à un méta-métalangage.

Nous retrouvons les mêmes phénomènes lorsque nous attribuons la vérité ou la fausseté à une phrase. Pour dire que (**3a**) est vraie, nous disons par exemple :

(3d) La phrase "Paris est une jolie ville." est vraie.

Nous aurions aussi pu utiliser un autre nom pour la même phrase, tel que :

(3e) (**3a**) est vrai.

Il faut distinguer les expressions comme "... est vrai" qui appartiennent au métalangage et les expressions comme "Paris", "$\wedge$" et "$\neg$", qui appartiennent au langage-objet. Les premières prennent des noms de phrases (du langage-objet) pour en faire des phrases (du métalangage), tandis que les dernières prennent des phrases (du langage-objet) pour en faire des phrases (du langage-objet). Pour dire d'une phrase qu'elle est vraie, je dois la mentionner ; pour ceci, il me faut normalement un nom pour elle. Dire d'une phrase qu'elle est vraie, c'est dire – ce principe de disquotation est formulé dans la célèbre "Convention **T**" du logicien polonais Alfred Tarski :

(T) "p" est vrai si et seulement si p

À la gauche de cette équivalence matérielle on trouve une phrase du métalangage, à sa droite une phrase du langage-objet. Nous reviendrons sur ce principe important et la définition que Tarski a donné d'un prédicat de vérité pour un langage-objet dans la sct. 15.1 du ch. 15.

La décision de me servir du français pour les trois langages différents est arbitraire : je peux tout autant choisir l'allemand pour le langage-objet, l'anglais pour le métalangage et réserver le français au méta-métalangage. On aurait alors :

(3a') Paris ist eine schöne Stadt.

(3b') "Paris" is my favourite word.

(3c') " "Paris" is my favourite word." est une phrase bien formée du métalangage.

Etant donné que (3a) est une phrase bien formée du français, (3a') est une phrase bien formée de l'allemand. (3b') est une phrase qui appartient à l'anglais et ne contient pas de mot allemand (puisque le mot ""Paris"" appartient à l'anglais). Finalement, (3c') est entièrement une phrase du français, comme l'est (3c).

Nous nous servons d'un métalangage pour donner des traductions :

(3f) En allemand, l'expression "Paris" est utilisée pour désigner la ville de Paris.

(3f) est une phrase du français dans laquelle on mentionne le mot allemand "Paris". Des clauses comme (3f) peuvent aussi nous servir à spécifier les conditions de vérité d'une phrase :

(3g) "Paris ist eine schöne Stadt" est vraie si et seulement si Paris est une jolie ville.

Les conditions de vérité de la phrase "Paris ist eine schöne Stadt", spécifiées dans (3g), nous donnent la signification de cette phrase. On utilise donc le métalangage (le français, dans ce cas), pour relier les mots d'un langage-objet (ici l'allemand) avec leurs significations.

L'importance de la distinction entre langage-objet et métalangage apparaît si on revient sur la distinction entre vérité et validité. Nous disions qu'on ne peut pas dire d'un argument qu'il est vrai ou qu'il est faux, mais qu'il est valide ou ne l'est pas.[2] Mais alors *cela même* peut être vrai ou faux, c'est-à-dire qu'il peut être vrai que tel et tel argument est valide. Cette dernière phrase, cependant, est une affirmation dans le métalangage ou plus précisément dans le métalangage relatif au langage qui contient "cet argument est valide". Si nous remplaçons "cet argument" par un autre nom de l'argument dont nous voulons parler, par exemple par ""Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage"", nous voyons que "cet argument est valide", à son tour, appartient à un métalangage par rapport au langage dont nous nous servons pour parler du bonheur engendré par la logique. Le prédicat "... est valide", comme le prédicat "... est vrai", s'applique à des expressions linguistiques ; il faut les composer avec les *noms* de ces expressions pour faire une phrase bien formée.

(3a'') Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage.

(3b'') "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage" est valide.

(3c'') " "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage" est valide." est vrai.

La nécessité d'avoir des noms d'expressions pour former des phrases bien formées n'a plus lieu d'être si on transforme des prédicats comme "... est vrai" et "... est valide" en des opérateurs propositionnels (des expressions qui prennent des phrases pour former des phrases) comme "il est vrai que ..." et "étant donné que ..., il s'ensuit de $\cdots$". Mais ces expressions appartiennent aussi au métalangage puisqu'elles nous servent à parler des expressions (phrases, phrases). Au lieu de (3c''), on peut donc aussi dire :

(3c''') Il est vrai que "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; j'étudie la logique ; donc je serai heureux et sage" est valide.

(3c'''), comme (3c''), appartient au métalangage par rapport à (3b''). Au lieu de (3b''), nous pouvons utiliser l'opérateur propositionnel binaire "étant donné que ..., il s'ensuit de $\cdots$" (un opérateur qui prend deux phrases pour en faire une troisième) :

[2] Ce phénomène s'insère dans un cadre général : L'attribution de vérité ou de fausseté n'est pas la seule façon d'exprimer qu'une expression linguistique est correcte ou "bonne". Il y en a beaucoup d'autres. Une question ne peut être ni vraie ni fausse, mais elle peut être appropriée, intéressante, bonne etc. De même, un ordre n'est ni vrai ni faux, mais peut être justifié etc.

(3b”') Étant donné que si j’étudie la logique, je serai heureux et sage, et que j’étudie la logique, il s’ensuit que je serai heureux et sage.

Il est essentiel de ne pas confondre cette relation de “étant donné que ..., il s’ensuit que $\cdots$” avec la relation de “si ... alors $\cdots$”. “Si ... alors $\cdots$” est une expression qui appartient au langage-objet : elle prend (*utilise*) deux phrases pour en faire une troisième. “Étant donné que ..., il s’ensuit que $\cdots$”, au contraire, appartient au métalangage et nous sert à dire (en *mentionnant* les phrases) qu’il y a une relation de *conséquence sémantique* entre deux phrases, que l’une s’ensuit de l’autre. Nous abrégeons la relation exprimée par “étant donné que ..., il s’ensuit que $\cdots$” par un nouveau signe, “$\models$”.[3]

D’autres relations ‘objectuelles’ ont des correspondantes ‘métalinguistiques’. Nous utilisons la flèche ‘simple’ “$\rightarrow$” pour la relation exprimée par “si ... alors $\cdots$” et nous utilisons la flèche longue et ‘épaisse’ “$\Longrightarrow$” pour une relation de conséquence métalinguistique (non-spécifiée). en lieu et place de :

(3h) “Si p alors q” est vrai ssi si “p” est vrai alors “q” l’est aussi.

nous pourrons donc maintenant dire

(3h') “$p \rightarrow q$” est vrai $\iff$ $p \Longrightarrow q$

Il ne s’agit pas ici d’un nouveau formalisme, mais d’abréger de manière semi-formelle des locutions du langage ordinaire, qui, tout au long de ce cours, nous servent de métalangage pour parler de notre langage-objet $\mathcal{L}$, le langage de la logique propositionnelle.

Nous pouvons faire une distinction similaire pour d’autres connecteurs propositionnels. “$\wedge$”, on l’a vu, exprime la relation de conjonction – ce connecteur fait partie du langage-objet dont nous étudions le comportement logique. Nous utilisons un autre connecteur, “&”, pour parler *de* ce langage-objet. “&” appartient par conséquent au métalangage. De même pour notre négation du langage-objet, “$\neg$”, qui correspond, au métalangage, à “$\sim$” et pour “$||$”, qui correspond à “$\vee$”. Nous obtenons :

$$
\begin{array}{rcl}
\text{“}\neg p\text{” est vrai} & \iff & \sim p \\
\text{“}p \wedge q\text{” est vrai} & \iff & p \,\&\, q \\
\text{“}p \vee q\text{” est vrai} & \iff & p \,||\, q \\
\text{“}p \rightarrow q\text{” est vrai} & \iff & p \Rightarrow q \\
\text{“}p \leftrightarrow q\text{” est vrai} & \iff & p \iff q
\end{array}
$$

Nous voyons maintenant que la crainte d’un cercle vicieux n’était pas justifiée : il y a peut-être un cercle epistémique dans le sens que quelqu’un qui ne comprend pas ce qu’est la négation (ne possède pas le concept de négation) ne pourrait peut-être ni comprendre “$\neg$” ni “$\sim$”.

Mais il n’y a pas de cercle vicieux logique : l’explication que nous avons donnée de la signification de la négation “$\neg$” ne contenait pas le signe “$\neg$” qu’on était en train d’expliquer (ce qui constituerait en fait un cas de cercle vicieux). Nous expliquons cela en exploitant notre compétence dans un langage différent – du français qui nous sert de métalangage – qui pourrait lui-même, si on en avait besoin, être formalisé et équipé d’une sémantique rigoureuse (comme nous l’avons fait avec le langage-objet, le langage de la logique des phrases).[4]

---

[3] Dans la leçon 5 (cf. p. 88) nous verrons que “$\models$” n’est utilisé pas seulement pour parler de la relation de conséquence sémantiques, mais aussi pour parler des tautologies (des phrases qui sont des conséquences sémantiques de n’importe quelle phrase).

[4] Il y aura une étape dans la régression du langage objet au méta-langage au méta-méta-langages (et ainsi de suite) où nous

3.2 La validité et la vérité logique

Supposons qu'une inférence logique ait la forme suivante :

(3i) p. Et q. Mais aussi r. Donc s.

Nous avons vu qu'on peut mettre cette inférence dans la forme suivante :

(3i′) $$\frac{\begin{matrix} p \\ q \\ r \end{matrix}}{s}$$

Étant donné la sémantique du connecteur "$\wedge$" ("et"), on peut également l'écrire comme suit :

(3i″) $$\frac{p \wedge q \wedge r}{s}$$

Nous avons dit qu'en affirmant qu'un argument de la forme (3i′) ou (3i″) est valide, on mentionne les phrases "p", "q", "r" et "s" mais on ne les utilise pas. Dire qu'un argument de cette forme est valide revient à dire que

(3j) Si "p", "q" et "r" sont vrais, alors "s" l'est également.

Il s'agit ici d'une affirmation dans le métalangage : on n'utilise pas les phrases "p", "q" et "r" (rappelons qu'il s'agit d'abréviations pour des phrases comme "J'étudie la logique", "il pleut", "Dieu est omnipotent" – on ne parle pas des études, du temps ou de Dieu), mais on les mentionne – on parle de ces phrases et on dit qu'elles se trouvent dans une certaine relation de *conséquence logique*. C'est cette relation de conséquence logique qui rend les inférences valides.

Une inférence est valide si et seulement s'il n'est pas logiquement possible que les prémisses soient vraies et la conclusion fausse – autrement dit, s'il n'y a pas d'interprétation qui interprète les prémisses comme étant toutes vraies et la conclusion comme étant fausse. Une inférence de la forme (3i″) est valide si et seulement si la conclusion, "s", est une conséquence logique des prémisses "p", "q" et "r". C'est dans ces cas-là que l'implication matérielle 'correspondante' ("$(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$") est une tautologie. L'implication matérielle 'correspondante' est l'implication qui a la conjonction des prémisses comme antécédent et la conclusion comme conséquent.

Si, par exemple, nous voulons savoir si l'inférence

(3k) $$\frac{p \rightarrow \neg p}{\neg p}$$

est valide (cf. p. 27 et 39), il faut voir s'il est possible que la prémisse "$p \rightarrow \neg p$" soit vraie et qu'en même temps la conclusion "$\neg p$" soit fausse. Nous en faisons donc les tables de vérité :

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$
V	F	F
F	V	V

p	$\neg p$
V	F
F	V

Nous observons qu'il n'y a pas de ligne dans le premier tableau (à gauche) qui contient un "V" et dont la ligne correspondante dans le deuxième tableau (à droite) contient un "F". Nous pouvons également vérifier la validité de l'argument en faisant la table de vérité de l'implication matérielle.

retomberons dans le langage ordinaire. Mais ceci ne signifie pas qu'il s'agit d'un cercle vicieux. Le fait que l'on puisse toujours continuer à demander "pourquoi ?" ne signifie pas qu'il n'y a pas d'explications (entièrement) suffisantes et acceptables.

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$
V	F	F	V
F	V	V	V

Nous pouvons donc dire : Un argument est valide si et seulement si sa conclusion est une conséquence logique de ses prémisses. Pour ça, il est suffisant et nécessaire que l'implication matérielle soit une tautologie. Nous avons donc la relation suivante : une phrase "q" est une conséquence logique ("$\models$") d'une autre ("p") si et seulement si l'implication 'correspondante' est une vérité logique :

$$p \models q \qquad \Longleftrightarrow \qquad \models p \rightarrow q$$

On parle alors d'"implication formelle" :

implication matérielle de q par p ("p seulement si q")	$\Longleftrightarrow$	"$p \rightarrow q$" est vrai (soit "p" est faux soit "q" est vrai)
implication formelle de q par p ("q" est une conséquence de "p")	$\Longleftrightarrow$	"$p \rightarrow q$" est une tautologie (il n'est pas logiquement possible que "p" soit vrai et "q" faux.)

La distinction 'matériel'/'formel' correspond à la distinction entre langage-objet et métalangage.[5] Lorsque je dis que si p, alors q, j'utilise les phrases "p" et "q" ; lorsque je dis que "q" est une conséquence logique de "p", que l'argument "p ; donc q" est valide ou que "$p \rightarrow q$" est une tautologie, j'utilise des noms pour ces phrases (ces noms sont des expressions de la forme $\langle$ guillemets, la phrase concernée, guillemets $\rangle$) et je dis que ces phrases se trouvent en relation de conséquence logique.

Cette relation de conséquence logique est une relation sémantique puisqu'elle subsiste entre des phrases en vertu de leurs significations (qui nous sont données par les tables de vérité). C'est pour cette raison qu'on parle aussi de *"conséquence sémantique"*, pour distinguer cette relation de la relation de déductibilité qui est parfois appelée "conséquence syntaxique" (et dont on parlera plus tard dans la sct. 4.1).

Nous pouvons maintenant introduire une abréviation spécifique pour dire qu'un argument est valide :

"Un argument de la forme $\dfrac{p \wedge q \wedge r}{s}$ est valide." $\rightsquigarrow$ "$\{p \wedge q \wedge r\} \models s$"

"Un argument de la forme $\dfrac{\begin{array}{c}p\\q\\r\end{array}}{s}$ est valide." $\rightsquigarrow$ "$\{p, q, r\} \models s$"

Dans le cas où on n'a qu'une seule prémisse (par ex. une conjonction, comme dans le premier exemple précédent), nous pouvons omettre les crochets "{" et "}" : on écrira seulement "$p \wedge q \wedge r \models s$". Ce nouveau signe "$\models$" n'est qu'une autre notation pour la flèche double : au lieu d'écrire "$p \wedge q \wedge r \Longrightarrow s$", on écrira "$p \wedge q \wedge r \models s$", au lieu de "$p \& q \& r \Longrightarrow s$" on écrira "$\{p, q, r\} \models s$".

On a remarqué que "$\models$", faisant partie du métalangage, peut tout de même être interprété comme un opérateur propositionnel. Au lieu de le lire comme "... est une conséquence sémantique de $\cdots$" – expression qui a besoin de deux *noms de phrases* pour former une phrase –, on peut aussi l'interpréter

[5] Cette terminologie vient de l'usage des adverbes latins "formaliter" et "materialiter" par les logiciens médiévaux pour marquer la distinction entre langage-objet et métalangage. Ils parlaient également d'un "mode matériel" de l'usage des mots (pour dire que ces mots étaient utilisés) et d'un "mode formel" de leur usage (pour dire qu'ils étaient mentionnés).

comme “Il s’ensuit de la proposition que ... que ···” ou “Étant donné que ..., il s’ensuit que ···”, qui sont des expressions qui ont besoin de deux *phrases* pour former une phrase – mais qui appartiennent néanmoins au métalangage.[6] Interprétant “$\models$” de cette manière, nous pouvons nous passer des guillemets et écrire :

(1) $p \models q$

(1) désigne le résultat de la juxtaposition de l’expression “Il s’ensuit de la proposition que”, de la phrase représentée par “p”, de l’expression “que” et la phrase représentée par “q”. Si “p” représente “Anne est amoureuse de Jean” et que “q” représente “Anne est amoureuse de quelqu’un”, alors (1) devient la phrase suivante :

(2) Il s’ensuit de la proposition qu’Anne est amoureuse de Jean que Anne est amoureuse de quelqu’un.

Même si cette abréviation “$\models$” est communément utilisée et utile, elle entraîne une certaine confusion entre usage et mention. Étant donné qu’on se trouve dans le métalangage, une meilleure manière de dire que “q” est une conséquence sémantique de “p”, serait la suivante :

(3) “p” $\models$ “q”

Dans (3), les phrases “p” et “q” sont mentionnées et “$\models$” est utilisé pour signifier la relation de conséquence sémantique (“$\models$” est lu comme : “a comme conséquence (sémantique)” ou “implique formellement”). (3) rend explicite le fait que la relation de conséquence représentée par “$\models$” appartient au métalangage et non pas au langage-objet.

Néanmoins, (3) pose un problème subtil. En logique, on l’a vu, on n’a pas seulement affaire à des arguments concrets, formulés dans le langage ordinaire (le français), mais à des schémas ou des squelettes d’arguments : on étudie la *forme* des arguments. Un argument n’est considéré comme valide que si tous les autres arguments ayant la même forme le sont aussi. On a essayé de représenter cet aspect de généralité en remplaçant les phrases concrètes (“j’étudie la logique”, “je serai heureux et sage” etc.) par des lettres appelés “schématiques” (“p”, “q” etc.) – et on a vu que les lettres qui substituaient ces phrases ordinaires étaient arbitraires. Cependant, cela pose problème au niveau du métalangage.

Le problème vient du fait que l’on veut dire, par une assertion de la forme “$p \models q$” que, quelles que soient les phrases substituées pour “p” et “q” dans “$p \models q$”, la phrase qui en résulte est vraie. Malheureusement, la phrase ““p” $\models$ “q”” n’affirme pas cela – dans cette phrase, les noms de phrases ““p”” et ““q”” ne désignent que des phrases précises. Afin de mieux comprendre ce problème, nous pouvons penser à la la situation suivante : supposons que nous introduisions un nom ‘variable’ ou ‘schématique’, “Legrand”, pour désigner la personne la plus grande dans la salle. On peut alors l’utiliser dans des phrases telles que “Legrand fait plus de 2 mètres”, “Parmi nous, Legrand est celui qui voit le mieux au cinéma” etc., désignant à chaque fois, quelle que soit la personne la plus grande dans la salle (supposons qu’on ne le sache pas), celle qui sera plus grande que 2 mètres, privilégiée au cinéma etc. Même si nous parvenons, à l’aide de “Legrand”, à avoir un ‘nom variable’ pour une personne, cela ne signifie pas que le *nom* lui-même est variable, mais seulement que la personne qu’il désigne se modifie suivant la composition de la salle dans laquelle nous nous trouvons : dans une autre salle, il désignera une autre personne. Mais cela ne veut pas dire que le nom change : il restera vrai, par exemple, que

[6] Il ne faut pas penser que toute expression appartenant au métalangage opère sur des noms d’expressions. L’opérateur “il est vrai que ...”, l’exemple paradigmatique d’une expression du métalangage, a besoin d’une phrase (et non pas d’un nom d’une phrase) pour en former une phrase plus complexe.

"Legrand" est un nom composé de sept lettres, que nous avons inventé etc., même si la personne désignée par "Legrand" s'appelle "Otto" à une occasion et "Jean-Marc" à une autre. Il n'est pas vrai que la phrase ""Legrand" est composée de quatre lettres" devienne vraie si "Legrand" désigne quelqu'un qui s'appelle "Otto". La variabilité que "Legrand" possède dans le langage-objet est donc perdue au niveau du métalangage : même si "p" et "q" désignent des phrases arbitraires, leurs noms ne désignent pas des phrases arbitraires.

3.3 La quasi-citation

Pour échapper à ce problème, il faut introduire des noms pour des phrases dans notre langage objet. Nous introduisons des lettres minuscules grecques "ϕ" (prononciation : "phi"), "ψ" ("psi"), "χ" ("chi") et "ξ" ("xi") pour parler des phrases de n'importe quelle complexité. "ϕ" est donc le nom d'un nom d'une proposition – ϕ est soit "p", soit "q", soit "$p \wedge q$" ou encore "$(p \rightarrow q) \wedge r$". Il y a donc une différence cruciale entre les lettres romaines et grecques : les lettres romaines nous servent comme ***abréviations*** des phrases. Nous pouvons, par exemple, remplacer toute occurrence de "p" par la phrase "Sam veut se marier" et toute occurrence de "q" par "Marie a faim". Les lettres grecques, au contraire, sont des ***noms*** de phrases : nous pouvons, si nous voulons, remplacer "ϕ" par ""Marie a faim."" et "ψ" par ""Sam veut se marier"". Si ϕ est un nom pour "Marie a faim" et ψ est un nom pour "Sam veut se marier", nous pouvons donc dire :

- "Marie" fait partie de ϕ.
- ψ consiste en quatre mots.

En bref, "ϕ" et "ψ" ne sont pas des abréviations de phrases, mais des abréviations de noms de phrases. Au lieu de (3), nous dirons donc :

(4) $\phi \models \psi$

Néanmoins, nous n'avons pas seulement besoin de noms pour des phrases, mais aussi pour les propositions d'un certain type. Par exemple, nous voudrions dire que toute proposition conjonctive a comme conséquence sémantique chacun de ses conjoints. Jusqu'à maintenant, on s'est servi d'expressions comme "toute proposition ayant la même forme que "$p \wedge q$"", "le résultat de l'addition de phrases au connecteur "... $\rightarrow \cdots$"" etc. Mais ceci ne nous aide pas à exprimer qu'une conjonction implique formellement ses conjoints. Si nous disions

(5) $\phi \wedge \psi \models \phi$

nous ne pourrions plus substituer "ϕ" par ""Sam a faim"" et "ψ" par ""Marie veut se marier"" car dans ce cas-là nous aurions :

(6) "Sam a faim" $\wedge$ "Marie veut se marier" $\models$ "Sam a faim"

(6) est un non-sens, car "$\wedge$" relie des phrases et non pas des noms de phrases. Essayons la chose suivante :

(7) "$\phi \wedge \psi$" $\models \phi$

Le problème avec (7), comme avec (3), est que nous avons perdu la généralité. "$\phi \wedge \psi$" n'est un nom que pour cette expression précise (la lettre grecque "ϕ", suivie de "$\wedge$" et de la lettre grecque "ψ"). Au contraire, nous en avons besoin de manière à mentionner une proposition (arbitraire) qui a une

certaine forme (non-arbitraire).

A ce propos, Quine a introduit ce que nous appelerons la "quasi-citation", qui se fait avec des demi-crochets, appelés "demi-crochets de Quine" ("Quine corners"). Nous stipulons simplement que l'expression

(8) $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$

désignera la formule qui commence avec ϕ (c'est-à-dire la proposition arbitraire dénotée par "ϕ"), continue avec "$\wedge$" et finit par ψ. (8) nous permet de parler de toutes les expressions de n'importe quelle complexité, ayant une certaine forme (en l'occurrence, une forme conjonctive). De la même manière, $\ulcorner(\mu)\urcorner$ dénote le résultat de la mise entre parenthèses de l'expression μ.

En général, des matrices comme par ex."$\ulcorner \ldots \wedge \cdots \urcorner$", "$\ulcorner(\ldots)\urcorner$" etc. nous servent à construire des noms complexes, comme le font par exemple "le père de ..." ou "la moitié de ...". Si Sam est une personne, alors "le père de Sam" dénote le père de cette personne. Si a est un certain nombre, alors "la moitié de a" dénote la moitié de ce nombre.[7] Si ϕ est une certaine phrase, alors $\ulcorner(\phi)\urcorner$ dénote le résultat de la mise entre parenthèses de cette phrase. Si ϕ est "Sam est triste", alors $\ulcorner(\phi)\urcorner$ est l'expression "(Sam est triste)". Si ϕ est "Sam a faim" et ψ est "Marie veut se marier", alors $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ devient "Sam a faim et Marie veut se marier" (le nom de la proposition conjonctive). Nous pouvons, bien sûr, substituer ϕ par "p" et ψ par "q", obtenant alors à partir de (8) l'expression suivante :

(9) "$p \wedge q$"

(9) est un nom de la conjonction des deux phrases simples. Nous pouvons concevoir (8) comme le nom d'une proposition contenant des lacunes "... $\wedge \cdots$", où la première lacune (représentée par les points de suspension "$\ldots$") est remplie par l'expression ϕ et la deuxième lacune (représentée par "$\cdots$") est remplie par ψ. L'avantage d'avoir des noms pour des phrases non-spécifiées est que ϕ et ψ peuvent être de n'importe quelle complexité : dans (8), nous pouvons aussi substituer ϕ par "$p \rightarrow q$" et ψ par "$(p \vee q) \wedge r$". L'avantage des demi-crochets ne concerne que les noms complexes : en l'absence de connecteurs, les demi-crochets n'ont pas d'effet. $\ulcorner \phi \urcorner$ est simplement ϕ.

C'est avec ces demi-crochets que nous parvenons finalement à une formulation satisfaisante de (5) :

(10) $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner \models \phi$

L'expression (10) désigne le résultat de la juxtaposition de l'expression "Étant donné la proposition que", de la phrase *désignée* par ϕ, du connecteur "$\wedge$", de la phrase *désignée* par ψ, de l'expression "il s'ensuit que" et de la phrase *désignée* par ϕ. Si ϕ désigne "Sam a faim" et ψ désigne "Marie veut se marier", alors (10) devient la phrase suivante :

(11) Étant donné que Sam a faim et que Marie veut se marier, il s'ensuit que Sam a faim.

C'est cet usage que nous adopterons par la suite.

3.4 Les tautologies et les contradictions

Une inférence logique est valide si et seulement s'il n'est pas logiquement possible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse, c'est-à-dire si toute interprétation de ses constituants simples

[7]Nous retournerons, dans la sct. 10.1 du ch. 10, à ces noms complexes qu'on appellera "fonctions".

qui rend vraies les prémisses rend également vraie la conclusion. Étant donné la signification de l'implication matérielle "$\rightarrow$" – qu'elle est vraie s'il n'est pas le cas que l'antécédent est vrai et le conséquent faux – une inférence qui a "p" comme prémisse et "q" comme conclusion est valide si et seulement si "$p \rightarrow q$" est une tautologie.

Une proposition est une tautologie si et seulement si elle est vraie dans toutes les possibilités logiques, c'est-à-dire vraie sous toutes les interprétations de ses constituants simples. C'est pour cette raison que les tautologies sont appelées *"vérités logiques"*. La négation d'une tautologie, étant donné la signification de "$\neg$", est une proposition fausse dans toutes les possibilités logiques – il n'y a aucune interprétation de ses constituants simples qui la rende vraie. On appelle ces faussetés logiques des *"contradictions"*.[8]

Il s'ensuit que les tautologies et les contradictions jouent un rôle particulier dans les inférences : une tautologie, puisqu'elle ne peut pas être fausse, peut être inférée de n'importe quelle prémisse. Quelques soient les prémisses dont on infère la tautologie, il n'est pas logiquement possible que ces prémisses soient vraies *et* la tautologie fausse. Une tautologie peut même être inférée d'un ensemble vide de prémisses. Une contradiction, au contraire, est une prémisse dont on peut inférer n'importe quelle conclusion. Quelle que soit la conclusion qu'on veut en tirer, il n'est pas logiquement possible que la prémisse (la contradiction) soit vraie et que la conclusion soit fausse.

Une tautologie paradigmatique est la proposition "$p \vee \neg p$".[9] "$p \wedge \neg p$" est une contradiction exemplaire. Selon les considérations précédentes, on voit que les inférences

$$\frac{q}{p \vee \neg p} \qquad \frac{p \wedge \neg p}{q}$$

sont valides, quelle que soit la proposition désignée par "q" : on peut inférer une tautologie de n'importe quelle proposition et on peut inférer n'importe quelle proposition d'une contradiction. Puisqu'une tautologie s'ensuit de n'importe quelle prémisse, on peut dire de la manière suivante que "$p \vee \neg p$" est une tautologie :

$$\models p \vee \neg p$$

Ceci s'accorde avec notre explication de la conséquence logique : "$\phi \models \psi$" est vraie si et seulement s'il est vrai pour n'importe quels ϕ et ψ que : si ϕ est vrai, alors ψ l'est aussi. S'il est impossible *tout court* que ψ soit faux, alors cette implication est vraie même si ϕ est faux. Pour dire que "$p \wedge \neg p$" est une contradiction, on peut affirmer :

$$\models \neg(p \wedge \neg p)$$

[8]Nous avons déjà rencontré les tautologies et les contradictions dans les colonnes 1 et 16 du tableau des 16 connecteurs binaires possibles (cf. p. 48). Elles correspondent à des "fonctions de vérité" ("truth-functions") dans le même sens qu'une fonction constante peut être appelée "une fonction". Rien ne nous empêche d'introduire des 'connecteurs' "$\top$" et "$\bot$" avec les tables de vérité suivantes :

p	q	$p \top q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \bot q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Comme les valeurs de vérité de "$p \top q$" et de "$p \bot q$" ne dépendent pas des valeurs de vérité de "p" et de "q", une telle stipulation a peu d'intérêt.

[9]Comparez cette phrase avec "Toute proposition $\ulcorner \phi \vee \neg \phi \urcorner$ est une tautologie." Dans "Une tautologie paradigmatique est la proposition "$p \vee \neg p$"", on parle d'une phrase précise, par exemple de "il pleut ou il ne pleut pas". Dans "Toute proposition $\ulcorner \phi \vee \neg \phi \urcorner$ est une tautologie" on parle de toutes les phrases qui ont une certaine forme, c'est-à-dire de celles qui sont composées d'une proposition simple, d'une expression pour la disjonction et de la négation de cette proposition simple. C'est la raison pour laquelle on utilise les demi-crochets de Quine dans ce cas.

Si deux phrases complexes ont la même table de vérité, il n'y a aucune raison logique de les distinguer : en ce qui concerne la logique, elles disent la même chose. Entre les deux, il s'agit d'*équivalence sémantique*. La relation entre la notion d'"équivalence sémantique" du métalangage et l'équivalence matérielle du langage-objet est la même que celle entre la notion de "conséquence sémantique" et l'implication matérielle. Dire que $p \rightarrow q$, revient à dire qu'il n'est pas le cas que "p" est vraie et "q" fausse. Dire que ψ est une conséquence sémantique de ϕ revient à dire qu'il n'y a aucun cas (aucune possibilité logique) où ϕ est vraie et ψ fausse. Dire que $p \leftrightarrow q$, revient à dire que les deux phrases "p" et "q" sont soit les deux vraies soit les deux fausses. Dire que ϕ est sémantiquement équivalente à ψ, finalement, revient à dire qu'elles reçoivent les mêmes valeurs de vérité dans tous les cas possibles, c'est-à-dire que leurs tables de vérité sont les mêmes.[10]

On dit souvent d'une contradiction qu'elle est contradictoire avec elle-même ou qu'elle se contredit elle-même. Nous avons ici une relation du même niveau que la conséquence sémantique : la relation de contradiction appartient aussi au métalangage. Deux phrases sont *contradictoires* si elles ne peuvent pas être vraies ensemble et ne peuvent pas être fausses ensemble ; une seule d'entre elles doit être vraie, puisque la vérité de la première entraîne la fausseté de la deuxième et la fausseté de la deuxième entraîne la vérité de la première.[11]

Le dernier conjoint est important : être contradictoire n'est pas la seule manière d'être incompatible pour des phrases. Comparons les deux paires de phrases suivantes :

(3l) "La logique me rend heureuse." et "La logique ne me rend pas heureuse."

(3m) "La logique me rend heureuse." et "La logique me rend malheureuse."

Dans les deux cas, il est impossible que les deux phrases soient vraies (en même temps, pour la même personne). Mais il y a une différence :

1. Dans le premier cas (**3l**), on peut conclure la vérité de la deuxième proposition par la fausseté de la première.
2. Dans le deuxième cas (**3m**), on ne le peut pas : les deux phrases pourraient être fausses, par exemple dans le cas où la logique me laisse indifférente.

Les phrases de la première paire ne peuvent ni être vraies ensemble ni être fausses ensemble ; les phrases de la deuxième paire ne peuvent pas être vraies ensemble, mais elles peuvent être fausses ensemble. Si deux phrases sont reliées de la même manière que la première paire, c'est-à-dire de telle manière qu'on puisse conclure la vérité de l'une par la fausseté de l'autre *et* la fausseté de l'autre par la vérité de la première, on les appelle *"contradictoires"*. Si les deux phrases sont reliées de la même manière que la deuxième paire, c'est-à-dire de telle manière qu'on ne puisse conclure que la fausseté de l'une à partir de la vérité de l'autre (et donc la fausseté de la deuxième à partir de la vérité de la première) mais pas nécessairement l'inverse, on les appelle *"contraires"*. D'autres exemples de phrases contraires (mais pas contradictoires) sont les paires suivantes :

(3n) "Mon livre est (uniformément) rouge.", "Mon livre est (uniformément) bleu."

---

[10] C'est cette notion d'"équivalence sémantique" qui nous permet de dire que "$p \vee \neg p$" est la *seule* tautologie, et que "$p \wedge \neg p$" est la *seule* contradiction. On y arrive par des transformations de formules. Considérons une tautologie 'complexe', comme "$((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)) \leftrightarrow \neg p$". Puisqu'il s'agit d'une tautologie, elle est vraie dans les quatre manières différentes d'attribuer des "V" et des "F" à "p" et "q". Elle est donc équivalente à "$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$", formule qui combine (par la disjonction) les quatre interprétations possibles de "p" et de "q". En appliquant une des 'lois de distribution' ($\ulcorner(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi))\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))\urcorner$), on obtient "$(p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (\neg p \wedge (q \vee \neg q))$". Puisque les conjoints tautologiques "$(q \vee \neg q)$" n'attribuent rien aux conditions de vérité de la disjonction, on peut les omettre, et ainsi arriver à "$p \vee \neg p$".

[11] J'utilise "entraîne" ici pour désigner la relation de conséquence sémantique, également désignée par "$\models$".

(3o) "Je suis à Genève.", "Je suis à Paris."

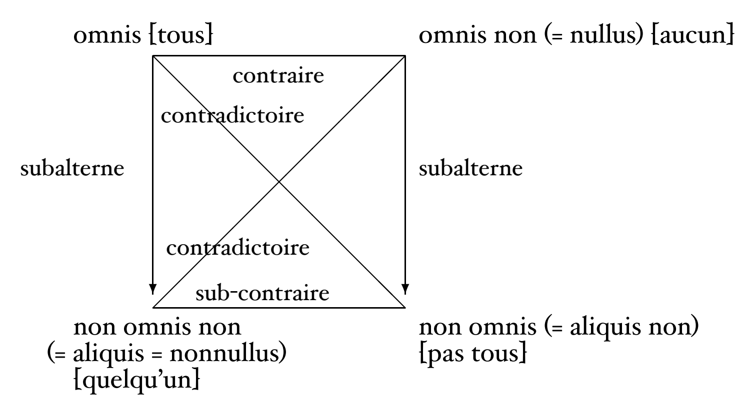
(3p) "Benjamin est célibataire.", "Benjamin est marié."

Mon livre pourrait avoir d'autres couleurs que le rouge et le bleu ; je pourrais être à Lyon et Benjamin est peut-être un enfant de trois ans. On voit ici qu'il faut distinguer la possibilité et l'impossibilité *logique* d'autres formes de possibilités et d'impossibilités. Le fait que deux phrases ne puissent pas être vraies ensemble (qu'elles sont contraires) peut avoir différentes raisons : le monde (**3n**), la métaphysique (**3o**), la langue (**3p**) etc.

Mis à part les relations de contradiction et de contrariété, la tradition a reconnu un troisième type d'opposition qui est la relation de *sub-contrariété*. Deux phrases sont sub-contraires si et seulement s'il n'est pas possible que les deux soient fausses ensemble, même s'il est possible qu'elles soient vraies ensemble. Les deux phrases "il y a une fête gratuite" et "il y a une fête qui n'est pas gratuite", par exemple, peuvent être vraies ensemble (s'il y a et des fêtes gratuites et des fêtes payantes), mais elles ne peuvent pas être fausses ensemble : il n'est pas possible que "il y a une fête gratuite" soit fausse (et donc qu'il n'y ait que des fêtes payantes) et que "il y a une fête qui n'est pas gratuite" soit aussi fausse (et donc qu'il n'y ait pas de fêtes qui ne sont pas gratuites).[12]

3.5 Le carré des oppositions

Une manière de présenter les relations sémantiques parmi des phrases est ce qu'on appelle un "carré des oppositions". Le plus ancien de ces carrés, lié au nom d'Appulée (né +/- en 125 av. J.C.) se fait dans la logique syllogistique comme suit :[13]



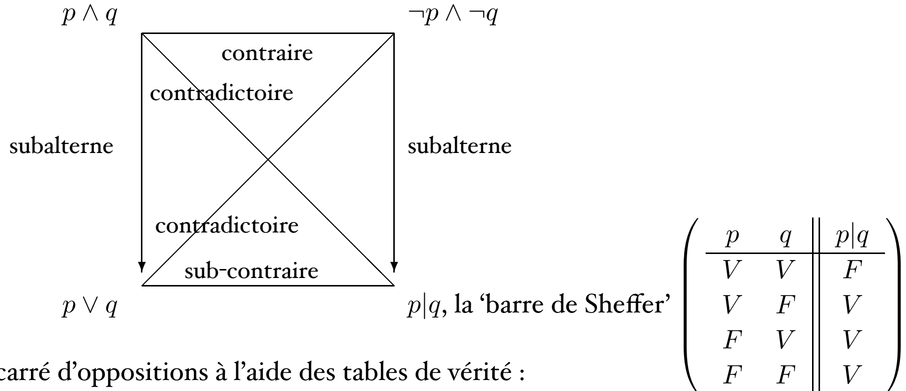
La relation de contradiction qui tire des diagonales entre les coins de ce carré signifie que l'un est la négation de l'autre. Les phrases contraires, cependant, se distinguent par une négation interne : elles ne peuvent pas toutes deux être vraies, mais elles peuvent toutes deux être fausses : il n'est pas possible que toutes les choses soient F et que toutes les choses ne soient pas F (au moins s'il n'est pas le cas qu'il n'y ait rien du tout), mais il est possible qu'il y ait des F (et que donc "toutes les choses ne sont pas F" soit faux) et des non-F (et que donc "toutes les choses sont F" soit également faux). La relation de subalternation est la relation de conséquence sémantique : si toutes les choses sont F (et s'il y a quelque chose), alors il n'est pas vrai que toutes les choses ne sont pas F ; si toutes les choses ne sont pas F (et s'il y a des choses qui peuvent être F), alors il n'est pas le cas que toutes les choses sont F. La sub-contrariété correspond à la vérité logique (= validité) de la disjonction. S'il y a des choses et que

[12] Il faut présupposer, pour pouvoir montrer que les deux phrases ne peuvent pas être fausses ensemble, qu'il y ait des fêtes. Ceci correspond à la présupposition que le 'domaine de quantification' ne soit pas vide. On reviendra sur ces problèmes à la page p. 177 dans la leçon 9.

[13] Nous reviendrons sur ce carré dans le contexte de la logique des prédicats, à la p. 144 dans le chapitre 8.

nous en choisissons une appelée "a", alors soit a est F, soit a n'est pas F. Si a est F, alors il n'est pas vrai que toutes les choses ne sont pas F ; si a n'est pas F, alors il n'est pas vrai que toutes les choses sont F. Alors au moins une des deux phrases préfixées par "non omnis non" et par "non omnis" est vraie. La contrariété veut dire "pas les deux vraies"; la sub-contrariété dit "pas les deux fausses".

On peut adapter le carré des oppositions d'Appulée à la logique propositionnelle comme suit :



p	q	$p\|q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

On vérifie ce carré d'oppositions à l'aide des tables de vérité :

Contrariété : il n'y a pas d'interprétation qui rende "$p \wedge q$" et "$\neg p \wedge \neg q$" vraies.

Sub-contrariété : il n'y a pas d'interprétation qui rende "$p \vee q$" et "$p|q$" fausses.

Subalternation : toute interprétation qui rend "$p \wedge q$" vraie, rend "$p \vee q$" vraie.

Subalternation : toute interprétation qui rend "$\neg p \wedge \neg q$" vraie, rend "$p|q$" vraie.

Contradiction : une interprétation rend "$p \wedge q$" vraie si et seulement si elle rend "$p|q$" fausse.

Contradiction : une interprétation rend "$p \vee q$" vraie ssi elle rend "$\neg p \wedge \neg q$" fausse.

Les cinq relations sémantiques entre phrases correspondent au caractère tautologique d'une certaine proposition complexe :

ψ est une conséquence sémantique de ϕ	ψ vraie si ϕ est vraie	$\ulcorner \phi \rightarrow \neg\psi \urcorner$ tautologie
ϕ et ψ sont sémantiquement équivalentes	vraies ou fausses ensembles	$\ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$ tautologie
ϕ et ψ sont contradictoires	ni vraies ni fausses ensembles	$\ulcorner \neg(\phi \leftrightarrow \psi) \urcorner$ tautologie
ϕ et ψ sont contraires	pas vraies ensembles	$\ulcorner \neg(\phi \wedge \psi) \urcorner$ tautologie
ϕ et ψ sont sub-contraires	pas fausses ensembles	$\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ tautologie

3.6 Implication vs. conséquence

La relation entre des phrases que nous venons de rebaptiser par le nom barbare de "subalternation" est la relation de conséquence (sémantique). Nous avons vu que "q" est une conséquence sémantique de "p" si et seulement si "$p \rightarrow q$" est une tautologie. "$\models$" appartient au métalangage et "$\rightarrow$" appartient au langage-objet.

L'importance d'une distinction entre les deux relations est illustrée par un paradoxe qu'a soulevé pour la première fois Lewis Carroll, l'auteur de *Alice au pays des merveilles*, dans un article de deux pages (Carroll 1895). Achille, le personnage de l'histoire, veut convaincre la tortue de la vérité de "q". Il produit alors un argument du type *Modus Ponens*, dont la tortue accepte la vérité des prémisses :

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \end{array}}{q}$$

La tortue, cependant, réplique que cet argument est un *enthymème*, qu'il y manque une prémisse, à savoir que "q" s'ensuit de "p" et de "$p \rightarrow q$". En réponse, Achille est d'accord d'ajouter cela comme prémisse supplémentaire à l'inférence qui devient alors :

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

Mais la tortue n'est toujours pas convaincue que q. Elle est d'accord qu'il s'ensuit des trois prémisses – "$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$", "$p \rightarrow q$" et "$p$" – que q, mais elle insiste pour qu'on l'ajoute comme prémisse. Achille la lui accorde et se trouve donc dans ce qu'on appelle une "régression à l'infini"; il n'arrivera jamais à convaincre la tortue que q :

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ (p \wedge p \rightarrow q) \rightarrow q \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q \\ (p \wedge (p \rightarrow q) \wedge ((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)) \rightarrow q \\ \hline q \end{array} \qquad \ldots$$

La tortue a pu ridiculiser Achille grâce à l'absence de distinction entre la relation de conséquence sémantique, qui justifie la validité du schéma d'inférence qu'on appelle "modus ponens", et la relation d'implication matérielle.

Après l'avoir clairement distinguée de l'implication matérielle, nous pouvons maintenant noter plusieurs propriétés de la relation de conséquence sémantique qu'on a appelée "$\models$" :[14]

Nous remarquons, tout d'abord, que l'ordre des prémisses n'est pas pertinent pour évaluer un argument comme valide ou non valide :

(perm) $\{p_1, p_2, \ldots\ p_n\} \models r \quad \Longrightarrow \quad \{p_2, p_3, p_1, \ldots\ p_n, \ldots\ p_7, \ldots\} \models r$

i.e. ce n'est pas en changeant l'ordre des prémisses que l'on peut rendre un argument valide, non valide.

En second lieu, la validité est *monotone* :

(mon) $\{p_1, p_2, \ldots\ p_n\} \models r \quad \Longrightarrow \quad \{p_1, p_2, \ldots\ p_n, q_1, q_2, \ldots\ q_m\} \models r$

Si vous tenez un argument valide, votre interlocuteur ne peut pas vous contredire en acceptant l'argument tel qu'il est, mais plutôt en lui *ajoutant* une prémisse supplémentaire. (Dans le cas où l'on ajoute une prémisse qui contredit une prémisse déjà présente, "r" s'ensuit parce que n'importe quelle proposition est une conséquence sémantique d'une contradiction, c'est-à-dire par le schéma d'inférence appelé "ex falso quodlibet".)[15]

La validité est transitive :

(trans) $\{p_1, \ldots\ p_n\} \models r \;\&\; \{r, q_1, \ldots\ q_n\} \models s \Longrightarrow \{p_1, \ldots\ p_n, q_1, \ldots\ q_m\} \models s$

Si "r" s'ensuit des prémisses "p_1", "p_2", etc. et si "s" s'ensuit de cette prémisse intermédiaire "r" et des prémisses "q_1", "q_2", etc., alors on peut directement inférer "s" (sans avoir besoin d'inférer d'abord "r"

[14]Pour faciliter l'exposition, nous ne considérons ici que des arguments qui n'ont qu'un nombre fini de prémisses. Mais les propriétés de la validité en question valent aussi pour des arguments qui en ont un nombre infini.

[15]La règle d'inférence "ex falso quodlibet" correspond à la tautologie "$p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$" dont nous parlerons à la p. 89.

de "p_1", "p_2" etc.).[16]

La validité est réflexive :

(refl) $\{p_1, p_2, \ldots p_n\} \models p_i$ (pour toute proposition $p_i \in \{p_1, p_2, \ldots\}$)

De "Tous les hommes sont mortels. Socrate est un homme", il s'ensuit que Socrate est mortel, mais également que tous les hommes sont mortels et que Socrate est un homme.[17]

3.7 L'interdéfinissabilité des connecteurs

Une implication matérielle telle que "$p \to q$" est vraie si et seulement si, soit "p" est faux, soit "q" est vrai. Nous pouvons formuler ses conditions de vérité en utilisant la disjonction : "$p \to q$" est vrai si et seulement si "$\neg p \vee q$" est vrai. Cette équivalence est une équivalence au niveau du métalangage : "$p \to q$" est une conséquence sémantique de "$\neg p \vee q$" et "$\neg p \vee q$" est une conséquence sémantique de "$p \to q$". En bref, leurs tables de vérité sont les mêmes. On parlera d'"*équivalence sémantique*".

Nous remarquons d'autres équivalences sémantiques. Deux paires d'équivalences importantes sont appelées "lois de Morgan", d'après Auguste De Morgan (1806–1871).[18] En voici une formulation préliminaire :

$$\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$$

Il faut bien interpréter ces équivalences. L'utilisation de la flèche double "$\iff$" signifie qu'il s'agit d'assertions du métalangage. Bien que les équivalences matérielles "$(\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$" et "$(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$" soient également vraies, les lois de Morgan font une assertion plus forte, à savoir que ces équivalences matérielles sont non seulement vraies mais aussi tautologiques.

Les lois de Morgan sont parfaitement générales : elles ne signifient pas seulement, comme notre formulation le veut, que la table de vérité de la négation d'une conjonction de *phrases simples* est équivalente à la disjonction des négations de ces phrases simples, mais elles s'appliquent à toutes les phrases, complexes et simples. Si nous utilisons les lettres minuscules grecques pour signifier ces phrases d'une complexité arbitraire et les demi-crochets de Quine pour construire des noms de phrases ayant une certaine forme, on obtient la formulation correcte :

$$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner \iff \ulcorner\neg\phi \vee \neg\psi\urcorner$$
$$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner \iff \ulcorner\neg\phi \wedge \neg\psi\urcorner$$

Ces deux équivalences sémantiques nous informent que nous pouvons, en toute généralité, remplacer une proposition $\ulcorner\neg(\phi\wedge\psi)\urcorner$ (c'est-à-dire toute négation d'une conjonction) par la proposition $\ulcorner\neg\phi\vee\neg\psi\urcorner$

[16] On obtient une formulation plus facilement reconnaissable comme celle d'un principe de transitivité si on assume qu'il n'y a pas de prémisses supplémentaires "q" et une seule prémisse initiale "p" : $p \models r \;\&\; r \models s \Longrightarrow p \models s$.

[17] Si l'ensemble des prémisses ne contient qu'un seul membre, on a une inférence triviale (mais valide !) : "Il pleut ; donc, il pleut." Ceci ne veut pas dire que la logique justifie le raisonnement circulaire : la logique ne nous montre pas qu'il pleut, mais qu'il pleut *s'il pleut*.

[18] D'après Łukasiewicz (1934a), Guillaume d'Ockham les avait déjà reconnues.

(c'est-à-dire une disjonction de négations).[19] Les lois de Morgan nous permettent de 'pousser' des négations devant des conjonctions et des disjonctions à l'intérieur de ces formules, en échangeant le connecteur "$\wedge$" ou "$\vee$" avec son connecteur 'opposé' "$\vee$" ou "$\wedge$".

C'est grâce à cette généralité que les lois de Morgan nous permettent de *définir* "$\wedge$" à partir de "$\vee$" et de "$\neg$". Mais qu'est-ce qu'une définition ? Une définition, dans l'usage que nous en faisons ici, est une équivalence sémantique qui introduit une nouvelle expression. C'est grâce à l'équivalence sémantique que le *definiendum* (la nouvelle expression à définir) peut être substituée dans n'importe quel contexte au *definiens* (les expressions 'anciennes' qui définissent la nouvelle expression). Au lieu de définir l'implication matérielle "$\rightarrow$" par sa table de vérité, nous pouvons nous servir de l'équivalence sémantique entre $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ et $\ulcorner \neg\phi \vee \psi \urcorner$ (si nous avons déjà introduit "$\vee$" et "$\neg$") :

(12) $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner \quad :\Longleftrightarrow \quad \ulcorner \neg\phi \vee \psi \urcorner$

(12) nous assure que toutes les formules ayant la forme exposée à gauche ont la même table de vérité que la formule exposée du côté droit de l'équivalence. Ainsi, ii nous avons déjà défini les connecteurs "$\vee$" et "$\neg$", nous pouvons introduire l'expression de gauche (le *definiens*) comme une autre manière d'écrire celle de droite (le *definiendum*). Le fait que nous interprétons l'équivalence sémantique comme équivalence qui détermine la signification du connecteur principal de la formule à gauche est indiqué par les deux points " :" devant le signe d'équivalence sémantique. Par (12), nous annonçons notre intention d'utiliser la formule de gauche comme variante notationnelle de celle qui est à droite.[20]

Nous pouvons donc maintenant constater que les connecteurs propositionnels introduits ne sont pas tous indépendants (qu'ils peuvent être définis en d'autres termes) :

1. Si l'on ne prenait que "$\neg$" et "$\wedge$" comme primitifs (comme Brentano (1874) et Johnson (1947)), nous pourrions définir les autres comme suit :

$$\begin{aligned} \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi) \urcorner \\ \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner \neg(\phi \wedge \neg\psi) \urcorner \\ \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner \quad &:\Longleftrightarrow \quad \ulcorner \neg(\phi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\phi \wedge \psi) \urcorner \end{aligned}$$

2. On pourrait aussi (comme Russell et Whitehead (1910) et Hilbert et Ackermann (1928)) ne

[19] Nous avons besoin des demi-crochets car

$$\begin{aligned} \neg(\phi \wedge \psi) \quad &\Longleftrightarrow \quad \neg\phi \vee \neg\psi \\ \neg(\phi \vee \psi) \quad &\Longleftrightarrow \quad \neg\phi \wedge \neg\psi \end{aligned}$$

sont mal formées. Si on remplace ϕ par "Marie a faim" et ψ par "Sam veut se marier", on obtient la proposition mal formée ""Marie a faim" $\wedge$ "Sam veut se marier"" – qui est mal formée puisque "$\wedge$" est un connecteur propositionnel et non pas une relation entre des phrases. On pourrait penser qu'il faut simplement ajouter des guillemets :

$$\begin{aligned} \text{“}\neg(\phi \wedge \psi)\text{”} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{“}\neg\phi \vee \neg\psi\text{”} \\ \text{“}\neg(\phi \vee \psi)\text{”} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{“}\neg\phi \wedge \neg\psi\text{”} \end{aligned}$$

Ces formulations posent également un grave problème du fait de ne pas être générales. Les expressions à gauche et à droite de la flèche double "$\Longleftrightarrow$" ne dénotent que ces expressions particulières. Celle en haut à gauche, par exemple, désigne l'expression qui commence par une négation, continue avec une parenthèse, la lettre grecque "ϕ", le signe de la conjonction, la lettre grecque "ψ" et une parenthèse.

[20] Lorsque la définition est basée sur une identité plutôt que sur une équation, nous ajoutons les deux points au signe d'identité : "Définissons "a" comme suit : $a := \sqrt{b}$ ...". A la place des deux points, on utilise aussi "déf." comme index :

$$\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner \overset{}{_{\text{déf.}}\!\!\longleftrightarrow} \ulcorner \neg\phi \vee \psi \urcorner \qquad a \ {_{\text{déf.}}\!\!=} \sqrt{b}$$

prendre que "$\neg$" et "$\vee$" comme primitifs , et définir les autres en ces termes.

3. Si on ne prenait que "$\neg$" et "$\rightarrow$" comme primitifs (comme Frege (1879) et Łukasiewicz (1904)), on pourrait définir les autres comme suit :

$$\begin{array}{rcl}
\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\phi \rightarrow \neg\psi)\urcorner \\
\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg\phi \rightarrow \psi\urcorner \\
\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)\urcorner \\
 & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\neg((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\psi \rightarrow \phi))\urcorner
\end{array}$$

Dans ces définitions, les signes définis n'apparaissent pas à la droite d'une définition (ils apparaissent dans l'avant-dernière ligne, dans une simple équivalence qui nous sert de modèle pour la définition). Nous avons le droit d'enchaîner des définitions. Ayant défini "$\wedge$", par exemple, à partir de "$\neg$" et de "$\rightarrow$", nous pouvons l'utiliser ensuite avec "$\neg$" et "$\rightarrow$" pour définir "$\vee$".

Les équivalences sémantiques ne nous servent pas seulement à réduire le nombre de connecteurs primitifs (c'est-à-dire ceux qui ne sont pas définis en termes d'autres connecteurs), mais elles sont également utiles pour la simplification de formules difficiles.

1. La conjonction et la disjonction sont commutatives ; "$p \wedge q$" et "$q \wedge p$" sont équivalentes, ainsi que "$p \vee q$" et "$q \vee p$" :

$$\begin{array}{rcl}
\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\psi \wedge \phi\urcorner \\
\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\psi \vee \phi\urcorner
\end{array}$$

2. Une autre 'loi' (équivalence sémantique générale) nous permet de distribuer la conjonction sur une disjonction et vice versa :

$$\begin{array}{rcl}
\ulcorner\phi \vee (\psi \wedge \chi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)\urcorner \\
\ulcorner\phi \wedge (\psi \vee \chi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)\urcorner
\end{array}$$

Cette loi, comme son équivalent en algèbre "$x(y + z + \ldots + w) = xy + xz + \ldots + xw$", nous permet de 'factoriser', c'est-à-dire de transformer

$$(p \vee t) \wedge (q \vee r \vee s)$$

en

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (t \wedge q) \vee (t \wedge r) \vee (t \wedge s)$$

3. Étant donné ce que nous avons dit des tautologies et des contradictions, il est toujours possible d'omettre une tautologie qui apparaît à l'intérieur d'une conjonction et une contradiction à l'intérieur d'une disjonction :

$$\begin{array}{rcl}
\ulcorner\phi \wedge (\psi \vee \neg\psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \phi \\
\ulcorner\phi \vee (\psi \wedge \neg\psi)\urcorner & \Longleftrightarrow & \phi
\end{array}$$

4. D'autres simplifications sont rendues possibles par le fait que ϕ est équivalent à toutes les phrases

suivantes :

$\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$, $\ulcorner\phi\wedge\phi\urcorner$, $\ulcorner\phi\vee\phi\urcorner$, $\ulcorner\phi\vee(\phi\wedge\psi)\urcorner$, $\ulcorner\phi\wedge(\phi\vee\psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi\wedge\psi)\vee(\phi\wedge\neg\psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi\vee\psi)\wedge(\phi\vee\neg\psi)\urcorner$

Points à retenir

1. Il faut distinguer différents niveaux de langage. "Désignation", "vérité" et "validité" sont des expressions qui appartiennent au métalangage.
2. Deux phrases sont en relation de conséquence sémantique s'il n'est pas et seulement s'il n'est pas logiquement possible que la première soit vraie et la deuxième fausse ; s'il y a et seulement s'il y a une inférence valide de l'une à l'autre.
3. Pour rendre compte de la généralité des lois logiques, il convient d'introduire des noms "ϕ", "ψ" etc. pour des phrases arbitraires.
4. Pour dire qu'une loi logique s'applique à toutes les phrases d'une certaine forme, il faut utiliser les crochets de Quine. "$\ulcorner\phi \wedge \neg\psi\urcorner$" est une expression qui est composée de guillemets, de ϕ, du signe de conjonction "$\wedge$", de "$\neg$", de ψ et encore de guillemets.
5. Une inférence qui a "p" comme prémisse et "q" comme conclusion est valide si et seulement si "$p \rightarrow q$" est une tautologie.
6. Une tautologie peut être inférée de n'importe quelle prémisse ; on peut inférer n'importe quelle conclusion d'une contradiction.
7. Mis à part la conséquence sémantique (ou : subalternation), il y a d'autres relations métalinguistiques entre des phrases : l'équivalence sémantique (mêmes tables de vérité), la contradiction (exactement une est vraie), la contrariété (pas les deux vraies), la sub-contrariété (pas les deux fausses).
8. La validité ne concerne pas l'ordre des prémisses ; elle est monotone, transitive et réflexive.
9. Les lois de Morgan :
   $$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner \iff \ulcorner\neg\phi \vee \neg\psi\urcorner$$
   $$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner \iff \ulcorner\neg\phi \wedge \neg\psi\urcorner$$
10. Les lois de distributivité :
    $$\ulcorner\phi \vee (\psi \wedge \chi)\urcorner \iff \ulcorner(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)\urcorner$$
    $$\ulcorner\phi \wedge (\psi \vee \chi)\urcorner \iff \ulcorner(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)\urcorner$$

Chapitre 4

La méthode axiomatique

4.1 Déductibilité syntaxique vs. validité sémantique

En utilisant les tables de vérité pour déterminer la validité ou la non-validité d'un argument, nous avons supposé que les phrases sont vraies ou fausses, c'est-à-dire qu'elles possèdent l'une ou l'autre de ces valeurs de vérité. La méthode des tables de vérité est une méthode *sémantique* précisément parce qu'il est fait référence à des propriétés (la vérité et la fausseté) qui sont 'extérieures' à la proposition, au sens où ces propriétés supposent l'existence d'un monde distinct de la proposition, un monde sur lequel 'porte' la proposition.

Il existe toutefois une autre méthode, dite *syntaxique*, permettant de tester la validité d'un argument, qui ne suppose pas d'emblée que les phrases aient une valeur de vérité. L'idée centrale consiste à essayer de *dériver* ou de *déduire* la conclusion de l'argument en partant de ses prémisses et en procédant *pas à pas*, au moyen de règles déterminées, jusqu'à sa conclusion.

Pour mieux comprendre cette méthode de *dérivation*, il est utile de considérer une métaphore empruntée aux échecs : les prémisses constituent les positions initiales des pièces sur l'échiquier ; les règles de dérivation correspondent aux règles qui permettent de déplacer les pièces et de poursuivre le jeu, et la conclusion correspond aux positions des pièces sur l'échiquier après un certain temps de jeu. Les règles des échecs sont 'syntaxiques' parce que vous n'avez pas besoin de savoir que telle pièce est 'le roi', ou telle autre 'le fou', pour apprendre à les manipuler. (En l'occurrence, l'interprétation 'monarchique' des échecs est parfaitement conventionnelle.)

Par conséquent, nous pouvons distinguer trois degré d'abstraction linguistique qui correspondent à différents niveaux de formalisation :

1.	"La terre tourne"	signification	vérité
2.	"p"	–	vérité
3.	ϕ	–	–

Le premier niveau correspond au langage naturel, dans lequel les phrases sont douées de sens et ont des conditions de vérité. Le second niveau correspond aux phrases sur lesquelles porte la méthode sémantique, qui ont des conditions de vérité mais qui ne sont que des variables sans signification déterminée. C'est à ce niveau-là qu'on examine les schémas ('squelettes') d'inférences dont on établit la validité par des tables de vérité. Le troisième niveau, dans lequel on fait abstraction non seulement de la signification des phrases, mais aussi de leur vérité ou fausseté, correspond aux phrases sur lesquelles

porte la méthode syntaxique, et sont considérées comme de purs symboles sans signification déterminée et sans valeur de vérité particulière. De plus, le niveau (1) est formalisé par le niveau (2), qui est à son tour formalisé par le niveau (3).

Qu'une phrase puisse ou non être dérivée d'autres phrases est une question qui concerne uniquement la syntaxe : il s'agit de la question de savoir s'il est possible de manipuler les symboles représentant les phrases appelées "prémisses", selon certaines règles purement structurelles, de manière à arriver à des symboles représentant une autre proposition, appelée "conclusion". Cette question est du même ordre que celle de savoir si, selon les règles du jeu, telle ou telle position peut être atteinte par telle ou telle pièce d'échec se trouvant dans telle ou telle position. Bien qu'elle admette en principe une réponse mécanique, une telle réponse (comme c'est le cas pour les échecs) est souvent loin d'être triviale : souvent, il faut souvent faire preuve d'ingéniosité.

Nous utiliserons le symbole "$\vdash$" pour signifier la 'conséquence' au sens syntaxique, c'est-à-dire la *déductibilité* (ou "dérivabilité"), et établirons plusieurs correspondances entre cette relation de dérivabilité $\vdash$ et la relation de conséquence sémantique (ou validité) $\models$. Nous devons au préalable fournir une définition rigoureuse du langage formel de la logique des phrases.

4.2 Le langage de la logique propositionnelle

Pour avoir une idée claire de ce que sera la syntaxe de notre logique propositionnelle, nous devons d'abord définir son langage formel de manière plus rigoureuse que précédemment (cf. p. 33) :

Définition 2. *L'alphabet du langage $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle classique se compose des signes suivants :*

- *des phrases atomiques "p_0", "p_1", "p_2" ... (une infinité dénombrable)*[1]
- *les connecteurs "$\neg \ldots$" ("ne-pas"), "$\ldots \wedge \cdots$" ("et"), "$\ldots \vee \cdots$" ("ou"), "$\ldots \rightarrow \cdots$" ("si-alors") et "$\ldots \leftrightarrow \cdots$" ("ssi")*
- *des symboles auxiliaires : parenthèses, virgules*

Au lieu de "p_0", nous écrivons parfois "p", pour "p_1" "q", "r" pour "p_2" etc.

Cette définition (2) nous permet de définir $\mathcal{L}$, notre langage formel de la logique des phrases. Nous déterminons ainsi quelles phrases font partie de ce language, en définissant ce qu'est une formule bien-formée de $\mathcal{L}$:

Définition 3. *Une formule propositionnelle est définie de manière récursive comme suit :*

- *Toute phrase atomique de la forme "p_i" (pour n'importe quel $i \in \mathbb{N}$) est une formule propositionnelle.*
- *Si ϕ est une formule propositionnelle, alors $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.*
- *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*

Comme au préalable, nous utilisons des minuscules grecques "ϕ", "ψ", "χ", ... pour les noms des formules arbitraires (pas nécessairement atomiques). Il s'agit des noms métalinguistiques : "ϕ" ne fait pas partie de $\mathcal{L}$, notre langage-objet, mais nous sert à parler *de* ses formules. L'ensemble de toutes les formules du langage $\mathcal{L}$ est dénoté par "$\mathsf{Fml}(\mathcal{L})$". Les demi-crochets de Quine sont utilisés pour parler de

[1] Les phrases atomiques sont souvent appelées "phrases variables", pour indiquer qu'elles sont considérées comme variables dans les schémas d'inférence. Puisque nous introduirons plus tard (dans le chapitre 8) les variables (souvent appelées "variables individuelles") de la logique des prédicats, qui sont d'un autre type (elles peuvent, par exemple, être liées par des quantificateurs etc.), j'évite cette dénomination trompeuse.

toutes les formules ayant une forme particulière. "$\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$", par exemple, est un nom pour une formule arbitraire qui consiste en une parenthèse, un signe de négation, une phrase (simple ou complexe) et encore une parenthèse : "$(\neg p_1)$", mais aussi "$(\neg\neg p_1)$" et "$(\neg(p_0 \wedge p_1))$" en sont des exemples.[2]

Pour rendre nos formules plus faciles à lire, nous adoptons les conventions suivantes :

- "$\neg$" relie son argument plus fortement que "$\wedge$" et "$\vee$" : quand il précède une seule proposition, le connecteur "$\neg$" sera donc écrit sans parenthèses. Au lieu de "$\neg(p) \wedge \neg(p \vee q)$", nous écrivons donc "$\neg p \wedge \neg(p \vee q)$".
- Pour des occurrences répétées de "$\wedge$" et "$\vee$", on adoptera la convention "groupement à gauche": les parenthèses qui se ferment vers la gauche sont implicites. Nous écrivons donc "$(p \wedge q \wedge r)$" pour "$((p \wedge q) \wedge r)$".
- Les parenthèses extérieures (qui ne sont ni précédées ni suivies d'un connecteur) sont implicites. Au lieu de "$(p \wedge q)$", nous écrivons "$p \wedge q$".

On peut omettre davantage de parenthèses en donnant des priorités aux connecteurs, dans l'ordre suivant : "$\leftrightarrow$", "$\rightarrow$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\neg$". Ainsi, "$\neg p \wedge q$" correspond à "$(\neg p) \wedge q$", "$(p \vee q \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$" à "$((p \vee q) \rightarrow r)) \leftrightarrow (((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee r)$" etc.

Nous pouvons également définir ce qu'est une théorie :

Définition 4. *Une théorie est un ensemble (fini ou infini) de formules propositionnelles.*

Nous abrégeons des théories par "Th_1", "Th_2" etc. Pour ne parler que d'une seule théorie, nous utilisons "Th". Notons qu'une théorie Th peut avoir un seul membre, p.ex. $\mathsf{Th} = \{\phi\}$, ou être vide $\mathsf{Th} = \emptyset$.

Notons que ces définitions étaient purement syntaxique : nous n'avons fait aucune référence aux significations ou valeurs de vérité des formules propositionnelles. Nous avons seulement considéré leur forme et la manière dont elles sont construites à partir des phrases simples.

L'avantage d'une définition syntaxique rigoureuse de notre langue est qu'elle nous permet de revenir sur la question d'interdéfinissabilité des connecteurs. Nous avons déjà vu de quelle manière nous pouvions définir "$\wedge$" en termes de "$\vee$" et de "$\neg$" grâce aux lois de Morgan. Nous allons à présent avoir un résultat plus radical : il est possible de définir *tous* les connecteurs binaires à partir d'un seul. Mais pour y parvenir, nous devons d'abord élargir (temporairement) notre langage.

Considérons le connecteur "$|$", appelé "barre de Sheffer" ("Sheffer's stroke") (Scheffer 1913). Il est défini par la table de vérité suivante :

ϕ	ψ	$\ulcorner\phi\vert\psi\urcorner$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

On voit que $\ulcorner\phi|\psi\urcorner$ représente la 'non-conjonction' de ϕ et de ψ ; $\ulcorner\phi|\psi\urcorner$ veut dire que ϕ est incompatible avec ψ, et qu'au moins l'une de ces deux formules (peut-être les deux) est fausse. "$|$" correspond donc, comme signe du langage-objet, à la relation métalinguistique de contrariété ; $\ulcorner\phi|\psi\urcorner$ est équivalente (sémantiquement) à $\ulcorner\neg\phi \vee \neg\psi\urcorner$ et à $\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$.

Ajoutons "$|$" à notre langue de la manière suivante.

[2] De manière encore plus mathématique, la définition (3) stipule que l'ensemble des formules bien-formées $\mathsf{Fml}(\mathcal{L})$ soit "fermé" sous certaines opérations, à savoir la négation, la conjonction, la disjonction et l'implication : si ϕ et ψ appartiennent à $\mathsf{Fml}(\mathcal{L})$, alors il en va de même pour toutes les formules que nous pouvons obtenir de ϕ et ψ par les opérations de négation, conjonction, disjonction et implication.

Définition 5. *Soit $\mathcal{L}$ la langue définie par les définitions (2) et (3). Nous construisons une langue $\mathcal{L}^*$ en ajoutant à (2) la clause*

- *" | " ("est incompatible avec")*

et en ajoutant à (3) la clause

- *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi|\psi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.*

Nous pouvons montrer que dans $\mathcal{L}^*$, tous les autres connecteurs sont définissables à partir de "|" :

$$\begin{array}{rcl}
\ulcorner\neg\phi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner\phi|\phi\urcorner \\
\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi|\psi)|(\phi|\psi)\urcorner \\
\ulcorner\phi\vee\psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner((\phi|\phi)|(\psi|\psi))\urcorner \\
\ulcorner\phi\rightarrow\psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi|(\psi|\psi))\urcorner \\
\ulcorner\phi\leftrightarrow\psi\urcorner & :\Longleftrightarrow & \ulcorner((\phi|(\psi|\psi)) \mid ((\phi|\phi)|\psi)) \;\mid\; (\psi|(\phi|\phi)) \mid ((\psi|\psi)|\phi)\urcorner
\end{array}$$

Ces définitions sont 'correctes' dans le sens qu'il s'agit réellement d'équivalences sémantiques ; c'est-à-dire que les formules à droite du signe de définition ont la même table de vérité que celles de gauche, ce qui garantit leur intersubstituabilité dans tous les contextes extensionnels.[3]

4.3 Un peu d'histoire

La logique classique moderne, telle qu'elle est enseignée dans ce cours, repose sur les travaux de *Gottlob Frege* (1848–1925), mathématicien et philosophe allemand de la deuxième moitié du 19ème siècle. Frege a observé que les raisonnements des mathématiciens de son temps étaient 'intuitifs' dans le sens où ils utilisaient des connecteurs 'logiques' ("donc", "il s'ensuit que", "par conséquent" etc.) pour marquer les différentes étapes de leurs raisonnements sans pour autant être capables d'en donner une justification méticuleuse. Ils sautaient, pour ainsi dire, des étapes. Le problème que pose cette méthode de 'raccourcis', bien qu'elle soit certainement pratique dans l'enseignement des mathématiques et inévitable dans la vie mathématique de tous les jours, est qu'il est très difficile, lorsqu'une preuve n'aboutit pas ou qu'un résultat paradoxal est obtenu, d'identifier l'endroit exact où le raisonnement prend la mauvaise route et où l'erreur a été commise. En insistant sur le fait que les raisonnements

[3] En fait, il suffit de montrer la définissabilité de "¬" et de "∨" en termes de "|". La définissabilité des autres s'ensuit alors comme suit :

$$\begin{array}{rcl}
\ulcorner\phi\vee\psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\neg\phi\wedge\neg\psi)\urcorner \\
 & :\Longleftrightarrow & \ulcorner(((\phi|\phi)|(\psi|\psi))|((\phi|\phi)|(\psi|\psi))) \mid (((\phi|\phi)|(\psi|\psi))|((\phi|\phi)|(\psi|\psi)))\urcorner \\
\ulcorner\phi\rightarrow\psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner\neg(\phi\wedge\neg\psi)\urcorner \\
 & :\Longleftrightarrow & \ulcorner((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \mid ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi)))\urcorner \\
\ulcorner\phi\leftrightarrow\psi\urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner(\phi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\phi)\urcorner \\
 & :\Longleftrightarrow & \ulcorner(\;((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \mid ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \;\mid \\
 & & \;((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi))) \mid ((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi))) \;\;) \;\;\mid \\
 & & (\;((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \mid ((\phi|(\psi|\psi))|(\phi|(\psi|\psi))) \;\mid \\
 & & \;((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi))) \mid ((\psi|(\phi|\phi))|(\psi|(\phi|\phi))) \;\;)\urcorner
\end{array}$$

Il est clair que les équivalences non-abrégées pour l'implication et l'équivalence sont parfaitement illisibles et qu'une logique qui n'opérerait qu'avec la barre de Sheffer serait impossible à pratiquer (et difficile à enseigner). Son importance réside dans le fait que l'on puisse définir la négation et la conjonction à partir de "|" – la définissabilité des autres connecteurs s'ensuit, puisque tous les autres connecteurs sont eux-mêmes définissables à partir de "¬" et "∧".

en mathématiques devaient être sans lacunes, tels que chaque assertion s'ensuive logiquement des précédentes, Frege a développé, dans son "idéographie" (Frege 1879),[4] ce qui est aujourd'hui considéré comme la logique classique, propositionnelle et des prédicats.

Frege n'était pas le seul, mais le plus méticuleux, des pionniers des mathématiques modernes. L'italien Giuseppe Peano (1858–1932) et l'américain C.S. Peirce (1839–1914) en sont d'autres.[5] Frege utilisait une notation bi-dimensionnelle qui, bien qu'elle ait eu certaines avantages, s'est avérée trop compliquée par la suite. Pour une implication matérielle "$p \rightarrow q$", Frege écrivait, par exemple, la formule suivante :

q

p

La formule commence par un trait vertical, appelé 'trait de jugement', qui signifie que l'implication est non seulement entretenue ou supposée, mais également affirmée.[6] Le trait horizontal suivant est appelé 'trait de contenu'. Il indique que la formule qui suit exprime une phrase sensée, à savoir un contenu susceptible d'être soit vrai, soit faux.

Mis à part la notation bi-dimensionnelle de Frege,[7] il y a la notation 'algébrique' de George Boole (où la négation "$\neg p$" est exprimée par une barre "$\overline{p}$"[8] et la notation dite 'polonaise' de Jan Łukasiewicz, qui permet de supprimer toute ponctuation sans risquer l'équivoque.[9] Aujourd'hui on utilise généralement

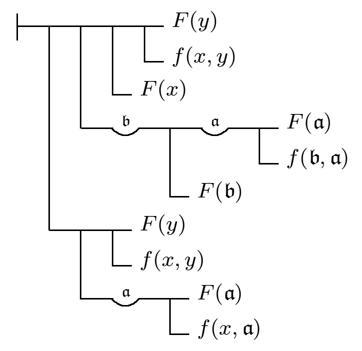
---

[4] Le développement d'une notation formelle de la pensée est une tentative de réaliser l'idée de Leibniz d'une langue caractéristique universelle. Sur son histoire, cf. Barnes (2002).

[5] Frege avait, bien sûr, d'autres prédécesseurs, notamment les deux mathématiciens anglais, George Boole (1815–1864), l'inventeur de l'algèbre Booléenne et Auguste de Morgan (1806–1871), qui a été le premier à remarquer que la logique d'Aristote était incapable de justifier les inférences basées sur des propriétés de relations (par exemple l'inférence de "Sam aime Marie" à "Sam aime quelqu'un" et à "Marie est aimée par quelqu'un") et en a développé une logique. S'inspirant du raisonnement algébrique, Boole a classifié les connecteurs propositionnels d'après leurs effets sur des classes. Cette "algèbre de la logique" fut perfectionnée par Jevons, Venn, Schröder et Whitehead.

[6] Wittgenstein, dans le *Tractatus*, a accusé le 'trait de jugement' d'introduire un élément étranger au formalisme : d'après lui, la logique ne s'occupe point de la question de savoir si ses phrases sont affirmées ou non. Frege avait argumenté qu'il était nécessaire de considérer toutes les prémisses comme affirmées pour distinguer le discours scientifique (qui cherche à découvrir des vérités, y inclut les vérités logiques) du discours tenu sur scène, Wittgenstein (1921: §4.442) a avancé que les acteurs, pour convaincre leur public, utilisaient eux-aussi le trait de jugement.

[7] Pour un exemple plus compliqué de la logique des prédicats (théorème 71 de la *Begriffsschrift*) :



Dans notre notation (future), ceci est équivalent à la formule $(\forall a(f(x,a) \rightarrow F(a)) \rightarrow (f(x,y) \rightarrow F(y))) \rightarrow (\forall b(F(b) \rightarrow \forall a(f(b,a) \rightarrow F(a))) \rightarrow (F(x) \rightarrow (f(x,y) \rightarrow F(y))))$

[8] Cette notion permet une formulation très élégante des lois de Morgan comme 'loi d'élimination des barres doubles' :

$$\ulcorner(\overline{\phi \wedge \psi})\urcorner \iff \ulcorner(\overline{\overline{\phi} \vee \overline{\psi}})\urcorner$$
$$\ulcorner(\overline{\phi \vee \psi})\urcorner \iff \ulcorner(\overline{\overline{\phi} \wedge \overline{\psi}})\urcorner$$

[9] Dans la notation polonaise, les connecteurs sont représentés par des lettres qui précèdent immédiatement ce sur quoi ils portent. L'opérateur principal est donc toujours placé en tête. Si "N" représente la négation, "A" la disjonction, "K" la

un composé de la notation de Peano (qui contenait un simple point "." pour la conjonction) et celle des logiciens et philosophes anglais Bertrand Russell et Alfred North Whitehead (qui utilisaient "$\supset$" pour l'implication matérielle et "$\equiv$" pour l'équivalence matérielle ; la flèche "$\rightarrow$" vient de Hilbert).

Même si Frege a été le philosophe-mathématicien le plus important à sortir la logique du dogmatisme aristotélicien et à la libérer du paradigme stérile de la syllogistique qui l'avait dominée pendant plus de deux mille ans, ses travaux n'ont pas été reconnus durant sa vie. C'est l'oeuvre volumineuse *Principia Mathematica* de Russell et Whitehead (Russell et Whitehead 1910) qui mit sa contribution en lumière.

Dès le début du développement d'une logique capable de formaliser les raisonnements des mathématiciens, elle a été utilisée pour l'axiomatisation de l'arithmétique (cf. Frege (1884) et Dedekind (1888)). Les deux volumes des *Grundgesetze* ("lois fondamentales de l'arithmétique"), Frege (1893) et Frege (1903)) ont achevé ce travail. Ce qui n'était jusqu'à la fin du 19ème siècle qu'une étude de certaines entités élusives qu'on appelait des 'nombres' est alors devenue une science, fondée sur une base solide. Il était finalement possible de donner des réponses à des questions aussi fondamentales que "qu'est-ce qu' un nombre ?", "sous quelles conditions "n" (p.ex. : "2+2") et "m" (p.ex. : "4") dénotent-ils le même nombre ?", "en quel sens les nombres naturels font-ils partie des nombres rationnels ?", etc.

En dérivant les théorèmes mathématiques d'axiomes purement logiques, par des preuves qui suivent des règles d'inférence logiques, Frege avait une motivation philosophique dans son projet de poser les mathématiques sur une base logique. Contre Kant, il voulait montrer que les phrases mathématiques n'étaient pas synthétiques : Kant, dans sa *Critique de la Raison Pure* (Kant 1781 1787), affirmait que les mathématiciens dérivent leurs connaissances de la construction de concepts, c'est-à-dire de l'intuition qui leur est donnée *a priori*, indépendamment de la perception. Contre Kant, Frege maintenait que les mathématiques étaient aussi analytiques (et a priori) que les lois logiques dont ils peuvent être dérivés. Cette position en philosophie des mathématiques, qui conçoit les mathématiques comme réductibles à la logique, a reçu le nom de "*logicisme*".

C'était dans le premier volume des "lois fondamentales de l'arithmétique" (Frege 1893) que Bertrand Russell (1872–1970) a découvert ce qu'on appelle aujourd'hui le 'paradoxe de Russell'. Russell, dans une lettre écrite à Frege en 1902, a remarqué que les axiomes que Frege avait donné pour l'arithmétique (en particulier son fameux axiome V qui dit que toute condition (prédicat) détermine un ensemble) permettaient la formation de l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Il en dérivait une contradiction, montrant ainsi que les axiomes de Frege ne pouvaient pas tous être vrais.

Un ensemble tel que $\{x \mid x$ est un nombre naturel $\}$ ou $\{x \mid x$ est une vache suisse $\}$ ne se contient pas lui-même, puisqu'un ensemble n'est pas un nombre ni une vache suisse. Un ensemble tel que $\{x \mid x$ est un ensemble $\}$, cependant, *est* un membre de lui-même. Pour dériver le paradoxe, construisons maintenant l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes et appelons-le "a" :

$$a := \{x \mid x \notin x\}$$

Nous pouvons maintenant formuler la question de savoir si a se contient lui-même, c'est-à-dire si $a \in a$. Aucune réponse cohérente à cette question ne peut être donnée :

R1 Si a se contient lui-même ($a \in a$), alors a satisfait la condition qui définit cet ensemble : alors a est l'un des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes (c'est-à-dire que a est un ensemble x tel que $x \notin x$). Alors il ne se contient pas lui-même.

R2 Si, à l'inverse, a ne se contient pas lui-même ($a \notin a$), alors a satisfait la condition de ne pas se

conjonction et "C" l'implication, "$\neg p \vee q$" devient "$ANpq$", "$\neg(p \vee q)$" devient "$NApq$", "$((p \vee q) \wedge \neg r) \rightarrow \neg(p \vee q)$" devient "$CKCApqrNrNApq$" (ce qui se 'décompose' en "$C(K(C(Apq)r)Nr)(N(Apq))$" sans univoque) etc.

contenir lui-même (c'est-à-dire que a est un x tel que $x \notin x$) ; comme cette condition définit quels ensembles appartiennent à a, alors a se contient lui-même.

Nous obtenons alors une preuve de l'assertion suivante :

$$a \in a \iff a \notin a$$

a se contient lui-même si (**R1**) et seulement si (**R2**) a ne se contient pas lui-même. Il s'agit d'une contradiction. On peut donc inférer, par réduction à l'absurde, qu'au moins une des prémisses desquelles la contradiction a été inférée doit être fausse. Comme ces prémisses étaient les axiomes du système de Frege, la contradiction a montré que ces axiomes ne pouvaient pas tous être vrais.

Frege a été anéanti par cette découverte de Russell ; il a essayé de rectifier son système dans le deuxième volume des *Grundgesetze* (Frege 1903) (cette tentative a reçu le nom "Frege's Way Out"), mais il n'en était pas satisfait. Par la suite, il a abandonné son logicisme et en fut affligé jusqu'à sa mort.[10] Ses changements ont été attestés inadéquats par Leśniewski en 1938 (cf. Quine 1955).

Une conclusion qu'on tirait du paradoxe de Russell était que certains ensembles sont trop 'grands' pour pouvoir appartenir à d'autres ensembles : les ensembles ne peuvent pas tous être membre d'autres ensembles. La théorie des ensembles, développée à la fin du 19ème siècle par le mathématicien Georg Cantor (Cantor 1883: cf. par ex.), a dû reconnaître ce qu'on appelle des "classes propres", c'est-à-dire des entités qui, comme les ensembles ordinaires, contiennent des membres, mais qui ne peuvent pas eux-mêmes être membres d'autres ensembles. Mais comment les exclure ?

Russell et Whitehead, dans les *Principia Mathematica*, ont développé ce qu'on appelle une théorie des types. De manière analogue à la distinction entre langage-objet et métalangage, ils attribuaient à chaque expression un 'type' de la manière suivante : Les choses qui ne sont pas des ensembles sont du type 0, les ensembles qui ne contiennent que des choses qui ne sont pas des ensembles sont du type 1, les ensembles qui ne contiennent que des entités du type 0 et 1 sont du type 2 etc. Ils stipulaient qu'une expression de la forme "$x \in y$" n'est bien formée que si l'entité dénotée par "x" est d'un type inférieur au type de l'entité dénotée par "y", excluant ainsi l'auto-référentialité dans "$a \in a$" qu'il voyaient comme source du paradoxe.

Un autre approche consistait dans une théorie axiomatique. Le mathématicien Ernst Zermelo (1908) a formulé des axiomes pour la théorie des ensembles, de manière à ce qu'ils ne permettent pas de construire le paradoxe de Russell. Il était donc possible de remplacer la notion intuitive d'"ensemble' (une sorte de collection d'objets dans laquelle on fait abstraction de tout ce qui leur est particulier) par une définition rigoureuse : on appelle "ensemble" tout ce qui satisfait les axiomes d'une certaine théorie Th, appelée "théorie des ensembles". La notion intuitive (et 'sémantique') a donc été remplacée par une notion purement structuraliste ('syntaxique').[11] Impressionné par Frege et par son développement d'une notion purement syntaxique de preuve dont la correction peut être vérifiée mécaniquement,

[10] Certains philosophes ont tenté de réanimer le logicisme au cours de ces vingt dernières années en développant l'arithmétique sur la base d'un axiome plus faible que le fameux axiome V de Frege, à savoir le principe de Hume. Le principe de Hume dit que deux concepts déterminent le même nombre si et seulement si les choses dans leurs extensions se trouvent dans une correspondance bijective : "coûteau sur la table" et "fourchette sur la table" sont équinumériques (déterminent le même nombre) ssi pour toute fourchette, il y a un coûteau sur la table, et vice versa. L'intérêt philosophique de ce projet porte alors sur la question de savoir en quel sens le principe de Hume mérite d'être appelé "principe logique" (cf. Wright 1983; Hale et Wright 2001).

[11] Pour mieux comprendre l'approche 'structuraliste', considérons les axiomes de Peano pour l'arithmétique qui stipulent que les nombres naturels constituent une 'progression' : 0 est un nombre naturel, et tout 'nombre successeur' ("+1") d'un nombre naturel est un nombre naturel. Le problème avec ces axiomes est que mis à part la série que nous reconnaissons intuitivement comme celle des nombres naturels, à savoir $\langle 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \rangle$, beaucoup d'autres 'progressions' les satisfont, par ex. les nombres paires $\langle 0, 2, 4, 6, \ldots \rangle$. Dans ce cas, un structuraliste défendrait la position selon laquelle nous n'avons aucune raison d'attribuer le nom de "nombres naturels" à la première progression sans l'attribuer à la deuxième.

le mathématicien allemand David Hilbert (1862–1943) a fondé une école de philosophie des mathématiques, aujourd'hui appelée *"formalisme"*. Le formaliste considère les mathématiques et la logique comme des manières de manipuler des symboles en suivant certaines règles. Les mathématiques que les réalistes prennent pour une science d'une réalité abstraite et éternelle d'objets mathématiques sont considérées par les formalistes comme une activité linguistique.

Le formalisme fut fortement influencé par le développement de différentes géométries. Kant pensait que la géométrie euclidienne était la science de l'espace et qu'elle était présupposée par tous nos jugements spatiaux. En fait, beaucoup de nos jugements en géométrie sont basés sur la perception, et ses axiomes (comme, par exemple, le 5ème axiome d'Euclide qui dit que par un point a donné extérieur à une droite d donnée, il ne passe qu'une seule droite parallèle à d) semblent évident. Pourtant, au cours du XIX-ème siècle, Lobachevsky notamment avait réussi à construire des géométries sans cet axiome. On découvrait qu'en dehors de la géométrie euclidienne, il existait d'autres systèmes d'axiomes non équivalents, mais qui traitaient également de notions 'géométriques' comme "point", "ligne", "parallèle" etc. Comme ces systèmes d'axiomes étaient également consistants, la question se posa de savoir si ces différents systèmes étaient des théories rivales portant sur le même domaine, en donnant une description soit vraie soit fausse d'une réalité indépendante ou s'il s'agissait plutôt de différents langages qui définissaient leurs notions de manière implicite et ne se trouvaient pas en désaccord. Les formalistes ont pris la deuxième voie et ont décidé de considérer les mathématiques comme construction de systèmes formels qui définissent eux-mêmes le domaine dont ils parlent. Hilbert défendait la position selon laquelle il n'existe pas de contenu intuitif à "point", "ligne", "parallèle" etc. mis à part des significations que les définitions purement structuralistes leur attribuaient dans le cadre d'une géométrie axiomatique (cf. Hilbert 1899).

Hilbert a fondé les métamathématiques, une science qui utilise les outils et les méthodes de la logique et des mathématiques ordinaires pour parler des systèmes formels. Au lieu de développer telle et telle axiomatisation d'un domaine mathématique (comme la logique propositionnelle, des prédicats, l'arithmétique ou la géométrie), les métamathématiques étudient de telles axiomatisations et essayent d'en établir des propriétés telles que la consistance, la complétude, la décidabilité etc. Hilbert a formulé un programme de 'méta-mathématisation' des mathématiques en 1920. Ce "programme de Hilbert" essayait de montrer que la totalité des mathématiques pouvait être déduite d'un system d'axiomes et démontré être consistant.

Cependant, ce programme fut heurté par l'annonce d'une découverte historique du jeune logicien autrichien Kurt Gödel qui, en 1931, a démontré l'incomplétude de l'arithmétique (Gödel 1931). Gödel démontrait que tout système formel consistant et susceptible de formaliser en son sein l'arithmétique des nombres entiers, est incomplet. Autrement dit, il permet la formulation d'une formule qui – d'après le système – exprime une phrase vraie mais qui ne peut pas être démontrée dans ce système. Nous reviendrons sur cette découverte au chapitre 15 (p. 231 et suivantes).

En lien avec le paradoxe de Russell, d'autres problèmes, des 'paradoxes sémantiques' tels que le 'paradoxe du menteur', ont également été soulevés :

(M) (**M**) est une phrase fausse.

(**M**) est une phrase qui s'appelle "(**M**)" et parle donc d'elle-même. Si (**M**) est vraie, alors elle est ce qu'elle dit, alors elle est fausse. A l'inverse, si (**M**) est fausse, alors elle est ce qu'elle dit, alors elle vraie. On a donc une preuve de la contradiction suivante :

(**M**) est vraie $\Longleftrightarrow$ (**M**) est fausse.

Il semblait donc qu'un prédicat aussi fondamental que "… est vrai" est contradictoire. En 1933, le logicien et métamathématicien Alfred Tarski (1933), issu de la fameuse école polonaise de logique (Twardowski, Łukasiewicz, Adjukiewicz, Kotarbiński, Leśniewski), est parvenu à donner une définition non-contradictoire de "… est vrai", en faisant la distinction entre langage-objet et métalangage. Ce fut le début de la sémantique systématique.[12]

Outre le logicisme de Frege et le formalisme de Hilbert, une troisième tradition en philosophie des mathématiques a émergé au début du 20ème siècle, à savoir l'*intuitionnisme* du logicien hollandais Lutinez Egbertus Jan Brouwer (1881–1966). Brouwer (1918) et son étudiant Arendt Heyting (1956) adhéraient à une philosophie constructiviste qui rejetait les preuves non-constructives. Un exemple d'une preuve non-constructive est une preuve qui démontre une disjonction $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$ sans pour autant montrer lequel des disjoints est vrai.[13] Les intuitionnistes ont également rejeté le principe du tiers exclu. Ce rejet était justifié par leur interprétation de la disjonction : prouver que $p \vee q$, pour les intuitionnistes, veut dire prouver soit que p soit que q : nous ne pouvons pas prouver une disjonction sans prouver au moins un des disjoints. Ils ont également donné une interprétation 'prouvabiliste' à la négation ; prouver que $\neg p$, c'est prouver qu'on ne peut pas prouver que p. C'est pour cette raison qu'ils rejetaient le tiers exclu : il existe de nombreux cas dans lesquels on n'arrive ni à prouver que p ni à prouver que $\neg p$. L'école des intuitionnistes a donc développé sa propre logique (la logique dite 'intuitionniste'), dans laquelle $\ulcorner \phi \vee \neg\phi \urcorner$ n'est pas un théorème.

Au centre de cette grande renaissance que la logique et les mathématiques ont connues entre 1879 et 1931 se trouvaient donc les notions que l'on discutera par la suite : la distinction entre la syntaxe et la sémantique, les notions purement syntaxiques d'un calcul (un système axiomatique) et d'une preuve (un raisonnement à l'intérieur d'un tel système).

4.4 Ce qu'est un calcul

Si on entend par "logique" un ensemble de phrases considérées comme valides (par rapport à cette logique) ou une relation de conséquence sémantique particulière, un calcul est un système formel qui *axiomatise* cet ensemble de phrases ou cette relation de conséquence. Une telle axiomatisation consiste en la différentiation de deux types de phrases : d'*axiomes* et de *théorèmes* – telles que les théorèmes peuvent être déduits des axiomes. Les axiomes forment le noyau de la formalisation ; typiquement, ils postulent que la relation de conséquence a certaines propriétés particulières. Les théorèmes nous permettent d'évaluer la qualité d'une axiomatisation particulière ; ils sont des phrases dérivées du calcul

---

[12] Nous retournerons au paradoxe du menteur à la p. 231.

[13] Une telle preuve est celle que l'on a déjà rencontrée dans la première leçon (p. 12) :

Théorème 6. *Il y a des nombres transcendants (= non-rationnels) a et b tels que a^b est rationnel.*

Preuve Considérons le nombre réel $c := \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Soit $c \in \mathbb{Q}$, soit $c \notin \mathbb{Q}$ (le principe du tiers exclu). Dans les deux cas, il y a des nombres transcendants a et b tels que a^b est rationnel.

1. $c \in \mathbb{Q}$. Alors $a := \sqrt{2}$ et $b := \sqrt{2}$, comme $\sqrt{2}$ est transcendant. $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = c$ est, sous cette supposition, un nombre rationnel.
2. $c \notin \mathbb{Q}$. Alors $a := c$ et $b := \sqrt{2}$ (c et $\sqrt{2}$ sont transcendants sous cette supposition). $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = (\sqrt{2})^2 = 2$ est un nombre rationnel.

Nous concluons, par la règle d'inférence qu'on appelle "élimination de la disjonction" (cf. p. 112), que l'affirmation est prouvée. □

Cette preuve ne nous fournit pas des nombres transcendants spécifiques a et b tels que a^b soit rationnel. Elle montre qu'il doit y en avoir, sans pour autant nous en fournir d'exemplaires particuliers. C'est pour cette raison-ci qu'elle est appelée "non-constructiviste" : elle ne nous permet pas de 'construire' des nombres concrets qui prouvent l'affirmation.

à l'aide des règles d'inférence permises dans ce calcul.

Le calcul, lui aussi, n'est rien d'autre qu'un ensemble de phrases ; c'est une entité purement syntaxique, comme une langue, et comme une langue il est construit à l'aide d'une définition récursive – à la différence qu'il ne s'agit pas d'une définition de "formule bien formée" (cf. p. 33), mais d'une définition de "théorème". Les axiomes correspondent aux phrases atomiques (= la 'base' de la récursion) et les théorèmes aux formules bien formées :

Définition 7 (Calcul)**.** *Un calcul est un ensemble de formules propositionnelles déterminé par un ensemble de formules propositionnelles qui sont appelées "axiomes" et des règles d'inférence. Un élément de cet ensemble est appelé "théorème". Ce qu'est un théorème est déterminé par la définition récursive suivante :*

- *Tout axiome est un théorème.*
- *Une formule propositionnelle obtenue par l'application d'une règle d'inférence à des théorèmes est un théorème.*
- *Rien d'autre n'est un théorème.*

On peut dire qu'un calcul est un ensemble de formules généré par les règles d'inférence sur la base des axiomes.[14] Les règles d'inférence sont des schémas d'inférences ayant la forme suivante :

(1) $$\frac{\phi, \psi, \chi, \ldots}{\xi}$$

Les formules ϕ, ψ, χ, ... sont appelées *"prémisses"* de la règle d'inférence, la formule ξ *"conclusion"*. A ce stade, il n'est pas requis que ces règles d'inférence soient valides ou que ces prémisses soient vraies. Il ne s'agit pas ici de notions sémantiques, mais d'une pure manipulation syntaxique de symboles.[15] Une règle d'inférence nous permet de 'générer' des théorèmes à partir des axiomes : dire que (1), par exemple, est une règle d'inférence d'un certain calcul, est dire que toute formule ξ obtenue en remplaçant ϕ, ψ et χ par des théorèmes du calcul est un théorème.

Pour dire qu'une formule propositionnelle ϕ est un théorème d'un calcul particulier HC, nous écrivons "HC $\vdash \phi$". "$\vdash$", on l'a dit, représente la relation de *déductibilité* : "HC $\vdash \phi$" veut dire que ϕ peut être déduite des axiomes du calcul HC – c'est à dire qu'il y a dans HC une preuve dont ϕ est la conclusion. Mais qu'entendons-nous par cette notion de 'preuve' ?

4.5 La notion de preuve

La notion syntaxique la plus importante de la logique est celle de *preuve*. Ce fut en clarifiant la notion de preuve que Frege a apporté sa contribution la plus importante au développement moderne des mathématiques et de la logique. Une preuve est une séquence de formules bien formées qui satisfait quelques critères purement syntaxiques.

Une preuve est relative à un certain calcul. Une séquence de formules propositionnelles est une preuve d'un certain calcul si elle ne consiste qu'en : soit (i) des formules qui sont des axiomes, soit (ii) des formules pouvant être obtenues en appliquant une règle d'inférence à des formules qui la précèdent dans la séquence. "HC $\vdash \phi$" signifie qu'il y a une preuve, dans HC, dont ϕ est la conclusion : il y a une

[14] Il s'agit à nouveau d'une condition de 'clôture' d'un ensemble telle que celle que nous avons recontré dans la n. 2 à la p. 71

[15] Cependant, pour que le calcul soit *correct* par rapport à une sémantique particulière, il est requis que les axiomes soient des tautologies et que les règles d'inférence soient valides. Nous reviendrons sur cette question (de la correction du calcul) par la suite (cf. par ex. p. 129)

séquence de formules dont ϕ est le dernier membre et qui ne contient que des axiomes de HC ou des formules obtenues par les règles d'inférence propres à HC.

On peut inférer ou déduire des phrases non seulement à partir d'un calcul, mais aussi à partir d'une théorie. ϕ peut être inférée d'une théorie Th par rapport à un calcul HC si on peut construire, en appliquant des règles d'inférence de HC aux membres de Th et aux axiomes de HC, une preuve qui a ϕ comme conclusion. La théorie en question peut alors être conçue comme un calcul élargi par d'autres axiomes. Nous avons ainsi une définition 'officielle' de preuve :

Définition 8 (Preuve dans HC). *Une preuve, dans un calcul* HC *et à partir d'une théorie* Th*, est une séquence finie de phrases* $\langle \phi_1, \dots \phi_n \rangle$ *telle qu'on a, pour tout* i *entre* 1 *et* n *(*$1 \leq i \leq n$*) que* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \cup \{\phi_1, \dots, \phi_{i-1}\} \vdash \phi_i$*.*

Etant donné que la théorie Th en question peut être vide, cette définition nous fournit aussi la notion de preuve dans un certain calcul HC.

Il est important de noter qu'une preuve est toujours une séquence *finie* de formules. Une preuve, étant une séquence de formules, constitue un discours réalisable en principe par un logicien, mathématicien ou philosophe humain (donc ayant une période de vie finie). Nous pouvons maintenant définir le signe "$\vdash$" représentant la relation de déductibilité :

Définition 9 (Déductibilité dans HC). *Si* HC *est un calcul,* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle, nous définissons "*$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$*" (quel que soit le nombre naturel* $n \in \mathbb{N}$*) par induction mathématique sur les nombres naturels :*

- *Si* ϕ *est un axiome de* HC*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
- *Si* ϕ *est un membre de* Th*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*
- *Si nous avons* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{m_i} \psi_i$ *(avec* $m_i < n$*) pour toutes les prémisses* ψ_i *d'une règle d'inférence de* HC*, alors* $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ *pour la conclusion* ϕ *de cette règle d'inférence.*

Le nombre n dans "$\vdash^n$" nous indique la longueur de la preuve.[16] "$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$" veut dire qu'il existe, dans HC et à partir de Th, une preuve de n étapes de ϕ. (1) et (2) dans la définition (9) signifient qu'à n'importe quelle étape, on peut considérer les axiomes et les phrases de la théorie comme prouvés (ils ont une preuve 'de longueur 0'). (3) nous permet de prouver une phrase qui s'ensuit par une règle d'inférence de phrases prouvées à des étapes antérieures. Nous écrivons "$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi$" pour dire qu'il y a un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ (qu'il y a une preuve d'une certaine longueur). Voici un exemple : la séquence des trois phrases $\langle$ "$p \rightarrow q$" ,"p" , "q" $\rangle$ est une preuve relative à une théorie $\mathsf{Th} = \{$"$p \rightarrow q$","p"$\}$ et un calcul HC qui reconnaît *modus ponens* comme règle d'inférence :

$$\mathsf{HC} \cup \{\text{“}p \rightarrow q\text{”}, \text{“}p\text{”}\} \vdash^0 p \rightarrow q$$
$$\mathsf{HC} \cup \{\text{“}p \rightarrow q\text{”}, \text{“}p\text{”}\} \vdash^1 p$$
$$\mathsf{HC} \cup \{\text{“}p \rightarrow q\text{”}, \text{“}p\text{”}\} \vdash^2 q$$

Dans les deux premières lignes, nous appliquons les conditions (1), (2) et la définition (9) : "$p \rightarrow q$" et "p" sont les deux membres de Th et nous pouvons donc les prouver 'gratuitement'. Dans la troisième ligne, nous réalisons la condition (3) : la règle *modus ponens*, appliquée aux deux premières lignes, nous permet d'inférer "q".

[16] Il ne s'agit pas toujours de la longeur minimale : si nous avons $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^2 p$, par exemple, nous aurions également $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^3 p$, $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^4 p$ etc. Cette charactéristique correspond au fait que nous pouvons toujours 'prolonger' des preuves en rajoutant des étapes superflues (par exemple des dérivations de "$p \rightarrow p$"). Nous n'aurions pas, par contre, $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^1 p$ si $\mathsf{Th} = \{$ "p","$p \rightarrow q$" $\}$ – parce que dans ce cas-ci la plus courte preuve possible (par *modus ponens*) aura deux étapes.

On a utilisé dans la définition de "$\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$" une procédure de preuve très commune en métamathématiques (ou métalogique), à savoir une *preuve par induction (mathématique)*. Une preuve par induction exploite le fait que les nombres naturels $\mathbb{N}$ forment une progression : on prouve, par induction, que tout nombre $n \in \mathbb{N}$ a une certaine propriété F en montrant que le nombre 0 a cette propriété et que, si un nombre n l'a, alors son 'successeur' $n + 1$ l'a aussi. On a donc montré par les deux premières conditions que $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^0 \phi$ si ϕ est un axiome ou un membre de Th et que si on a $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \psi_i$ pour toutes les prémisses ψ_i d'une inférence valide, on a $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n+1} \phi$ pour sa conclusion ϕ.[17]

On voit que les notions de "calcul", "axiome", "théorème" et "preuve" sont des notions purement syntaxiques : elles s'appliquent à des formules propositionnelles uniquement en vertu de leurs formes et indépendamment de leurs significations ou valeurs de vérité.

4.6 Un calcul pour la logique propositionnelle

Nous allons maintenant considérer une axiomatisation particulière de la logique propositionnelle. Cette axiomatisation consiste en une infinité d'axiomes – heureusement, beaucoup de ces axiomes sont de la même forme. C'est pourquoi nous donnons les axiomes comme *schémas*, ce qui veut dire que toutes les formules propositionnelles de $\mathcal{L}$ ayant la même forme que les formules qu'on énumère dans la suite sont des axiomes de notre calcul HC.

Définition 10 (HC). *Le calcul* HC *a comme axiomes toutes les formules de $\mathcal{L}$ qui ont la forme d'un des schémas suivants :*

H1	$\ulcorner \phi \to \phi \urcorner$	*réflexivité*
H2	$\ulcorner (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)) \urcorner$	*transitivité*
H3	$\ulcorner ((\phi \wedge \psi) \to \chi) \to (\phi \to (\psi \to \chi)) \urcorner$	*conditionaliser l'antécédent*
H4	$\ulcorner (\phi \to (\psi \to \chi)) \to ((\phi \wedge \psi) \to \chi) \urcorner$	*augmenter l'antécédent*
H5	$\ulcorner \phi \to (\phi \vee \psi) \urcorner$	*introduire "$\vee$" à droite*
H6	$\ulcorner \psi \to (\phi \vee \psi) \urcorner$	*introduire "$\vee$" à gauche*
H7	$\ulcorner (\phi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\phi \vee \psi) \to \chi)) \urcorner$	*alternative*
H8	$\ulcorner (\phi \wedge \psi) \to \phi \urcorner$	*éliminer "$\wedge$" à droite*
H9	$\ulcorner (\phi \wedge \psi) \to \psi \urcorner$	*éliminer "$\wedge$" à gauche*
H10	$\ulcorner (\phi \to \psi) \to ((\phi \to \chi) \to (\phi \to (\psi \wedge \chi))) \urcorner$	*composition*
H11	$\ulcorner (\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi) \urcorner$	*conversion*
H12	$\ulcorner \phi \to (\neg\phi \to \psi) \urcorner$	*ex falso quodlibet*
H13	$\ulcorner (\phi \to (\phi \wedge \neg\phi)) \to \neg\phi \urcorner$	*reductio ad absurdum*
H14	$\ulcorner ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)) \to (\phi \leftrightarrow \psi) \urcorner$	*introduire "$\leftrightarrow$"*
H15	$\ulcorner (\phi \leftrightarrow \psi) \to ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)) \urcorner$	*éliminer "$\leftrightarrow$"*
H16	$\ulcorner \phi \vee \neg\phi \urcorner$	*tautologie*

La seule règle d'inférence de HC *est modus ponens* MP *:* $\dfrac{\phi, \ulcorner \phi \to \psi \urcorner}{\psi}$.

[17] Nous rencontrerons encore quelques preuves par induction mathématique : elles ont toutes en commun qu'elle prouvent

1. qu'un certain caractéristique est possédé par un des membres de la progression (cette étape de la preuve est appellée "base de l'induction") ;
2. que le caractéristique en question est 'hérité' par les membres successifs dans la progression : si le n-ième membre le possède, alors le $(n + 1)$-ième le possède aussi (ce qui est appellé le "pas de l'induction"). Dans cette preuve, nous supposons que la conclusion voulue est vraie de n ("hypothèse de l'induction") et la prouvons pour $n + 1$.

MP signifie : si une implication matérielle $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et son antécédent ϕ ont été prouvés, alors le conséquent ψ de cette implication matérielle peut aussi être considéré comme prouvé.

Il y a plusieurs calculs équivalents pour la logique des phrases.[18] Celui que nous avons donné n'est ni le plus court ni le plus simple, mais il est à mon avis l'un des plus pratiques pour obtenir des preuves.

Dire que ces axiomes sont des schémas signifie que toute phrase pouvant être dénotée par l'un des noms complexes donnés est un axiome du calcul : "$p \rightarrow p$", par exemple, est un axiome parce que cette phrase complexe est de la même forme que le schéma $\ulcorner\phi \rightarrow \phi\urcorner$. Nous disons alors que la phrase complexe est une *instance* du schéma. La phrase "$(q \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$" est un axiome parce qu'elle est de cette même forme (une instance du même schéma), "$(p \vee ((q \wedge (r \leftrightarrow s)) \rightarrow t) \rightarrow (p \vee ((q \wedge (r \leftrightarrow s)) \rightarrow t)$" l'est aussi, et ainsi de suite.[19] On peut donc constater que HC contient une infinité d'axiomes. De la même manière, les phrases "$p \leftrightarrow p$", "$(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge q)$", "$(p \vee ((q \wedge (r \leftrightarrow s)) \rightarrow t) \leftrightarrow (p \vee ((q \wedge (r \leftrightarrow s)) \rightarrow t)$" sont des théorèmes parce qu'ils peuvent, par MP, être déduits des instances des schémas d'axiomes $\mathbf{H_{14}}$ et $\mathbf{H_1}$.

L'équivalence des différentes axiomatisations de la logique des phrases signifie qu'elles ne se distinguent que par le choix de leurs axiomes : elles ont la même règle d'inférence et se composent des mêmes théorèmes. Opérer un choix parmi ces différents types d'axiomatisation est donc une question pratique, indépendante de considérations purement logiques. Le fameux logicien français Jean Nicod (duquel l'Institut Nicod à Paris a tiré son nom) a montré que la barre de Sheffer permet la formulation d'un calcul équivalent à HC qui n'a qu'un seul axiome (cf. Nicod 1917–1920) :[20]

$$\ulcorner(\phi|(\psi|\chi)) \quad | \quad ((\xi|(\xi|\xi)) \,|\, ((\rho|\psi) \,|\, ((\phi|\rho)|(\phi|\rho))))\urcorner$$

[18] En 1879, Frege fut le premier à axiomatiser la logique propositionnelle et à fournir des règles formelles d'inférence. Bertrand Russell a ensuite développé plusieurs calculs. Dans son article "The theory of implication" (Russell 1906), Russell a donné les schémas d'axiomes suivants :

1	$\ulcorner\phi \rightarrow \phi\urcorner$
2	$\ulcorner\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \psi)\urcorner$
3	$\ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))\urcorner$
4	$\ulcorner(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))\urcorner$
5	$\ulcorner(\neg\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \phi)\urcorner$
6	$\ulcorner(\phi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow \neg\phi\urcorner$
7	$\ulcorner(\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\phi)\urcorner$

Dans les *Principia Mathematica*, Russell et Whitehead ont proposé :

1	$\ulcorner(\phi \vee \phi) \rightarrow \phi\urcorner$
2	$\ulcorner\psi \rightarrow (\phi \vee \psi)\urcorner$
3	$\ulcorner(\phi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \phi)\urcorner$
4	$\ulcorner(\phi \vee (\psi \vee \chi)) \rightarrow (\psi \vee (\phi \vee \chi))\urcorner$
5	$\ulcorner(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow (\phi \vee \chi))\urcorner$

Hilbert et Ackermann ont montré que l'axiome 4 n'était pas indépendant (c'est-à-dire qu'il pouvait être déduit des autres). Un autre système axiomatique est celui de **?** :

1	$\ulcorner(\phi \vee \phi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))\urcorner$
2	$\ulcorner\phi \rightarrow (\neg\phi \vee \psi)\urcorner$
3	$\ulcorner(\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi\urcorner$

On voit alors qu'il est parfaitement possible qu'une phrase qui est un théorème dans un calcul soit un axiome dans un autre. Bien qu'ils se distinguent par leurs axiomes, ces calculs sont tous équivalents dans le sens qu'ils permettent la dérivation des mêmes phrases (et qu'ils ont en conséquence les mêmes théorèmes).

[19] Une autre manière de formuler un calcul est de spécifier les axiomes utilisant des abréviations pour des phrases "p" et "q" et d'adopter une règle d'inférence supplémentaire de *substitution* qui dit que tout résultat d'une substitution d'une phrase par une autre dans un axiome résulte aussi en un théorème.

[20] Wajsberg et Łukasiewicz ont aussi établi chacun un système d'un seul axiome. Leurs systèmes ont l'avantage supplémentaire de ne contenir que quatre phrases différentes.

Les axiomes que nous venons de donner dans notre calcul HC ne forment pas une axiomatisation indépendante. Il serait possible de dériver certains de ces axiomes à partir des autres.

4.7 Les preuves dans/sur le calcul

Considérons quelques preuves dans ce calcul. Pour commencer, nous démontrons que la disjonction est commutative, c'est-à-dire que toute phrase ayant la même forme que "$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$" est un théorème :[21]

(1)	HC $\vdash p \rightarrow (q \vee p)$	$\mathbf{H_6}$
(2)	HC $\vdash q \rightarrow (q \vee p)$	$\mathbf{H_5}$
(3)	HC $\vdash (p \rightarrow (q \vee p)) \rightarrow ((q \rightarrow (q \vee p)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (q \vee p)))$	$\mathbf{H_7}$
(4)	HC $\vdash (q \rightarrow (q \vee p)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (q \vee p))$	(MP) de (1) et (3)
(5)	HC $\vdash (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$	(MP) de (2) et (4)

Nous énumérons les lignes de la preuve dans la colonne de gauche pour une référence future. Dans la colonne de droite, nous indiquons soit le numéro du schéma d'axiomes dont la ligne en est une instance, soit la règle d'inférence utilisée et les lignes auxquelles elle a été appliquée. Dans la troisième ligne, par exemple, nous avons substitué χ dans $\mathbf{H_7}$ par "$q \vee p$". La difficulté principale avec les preuves dans les calculs est de savoir quelles sont les formules qu'il faut substituer dans les schémas d'axiomes pour être ensuite capable de déduire la conclusion voulue avec MP.

Il est évident qu'une preuve comme celle de la commutativité de la disjonction est purement formelle : il s'agit d'une manipulation de symboles qui ne fait aucune référence à leurs significations. Nous aurions pu argumenter la commutativité de la disjonction d'une autre manière : de manière sémantique, en considérant que la table de vérité donnée pour "$\vee$" était symétrique et qu'on pouvait librement échanger "p" pour "q" sans aucune altération dans la table de vérité,[22] ou encore par un argument pragmatique, en argumentant que l'usage du "ou" inclusif dans le langage ordinaire ne distingue pas l'ordre des disjoints.[23] La preuve syntaxique est particulière en ce qu'elle est une application complètement mécanique de schémas d'axiomes et de règles d'inférence, application qui peut être vérifiée par un ordinateur. Etant donné que les schémas d'axiomes $\mathbf{H_5}$, $\mathbf{H_6}$ et $\mathbf{H_7}$ stipulent un certain rôle pour le signe "$\vee$", ce signe s'applique à deux phrases quel que soit leur ordre respectif – peu importent les autres aspects de sa signification.

Il n'est pas tout à fait correct, par conséquent, de dire que ce qu'on a prouvé par la preuve purement syntaxique était 'la commutativité de la disjonction'. Au sens restreint, tout ce qu'on a prouvé est que toute formule $\ulcorner(\phi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \phi)\urcorner$ est un théorème du calcul HC. Parler d'une preuve à propos de la *disjonction*, présuppose déjà une certaine interprétation de ce signe "$\vee$", qui n'est pas forcée par le calcul, mais compatible avec lui. Jusqu'à maintenant, tout ce que nous avons pu dériver de HC à propos de "$\vee$" est que quelque soit la relation signifiée par "$\vee$" (son interprétation), elle sera commutative.

Nous voyons qu'un calcul peut admettre différentes interprétations. Si ce n'était que pour l'axiome $\mathbf{H_7}$, "$\vee$" pourrait aussi signifier la conjonction. Les axiomes ne spécifient que des conditions nécessaires

[21]Nous relâcherons par la suite nos règles strictes sur l'usage des guillemets. "HC $\vdash p \vee \neg p$", par exemple, est une phrase qui appartient au métalangage (elle dit *de* la phrase "$p \vee \neg p$" qu'elle peut être dérivée dans HC). Nous l'écrivons sans guillemets pour ne pas trop nous compliquer la vie.

[22]Les deux conditions sont équivalentes : échanger la première et la quatrième ligne et la deuxième et la troisième revient à remplacer "p" par "q" et vice versa.

[23]Ce dernier argument serait difficile à faire : il semble que les disjoints ne sont pas éhangeable dans "il gagne mille euro par mois ou même plus", par exemple – un autre exemple qui montre à quel point nous 'idéalisons' le langage naturelle en logique.

pour qu'une interprétation des symboles qu'ils contiennent soit admissible ou acceptable. Même la conjonction d'un grand nombre de conditions nécessaires ne constitue pas toujours une condition suffisante. Dans un tel cas, on dirait que le calcul HC n'a pas de *modèle* unique, un modèle étant une structure mathématique (comme, par exemple, notre système de connecteurs propositionnels donné par les tables de vérité) dont nous nous servons pour interpréter un calcul purement syntaxique.[24] Les axiomes restent indéterminés parmi différentes interprétations sans en spécifier une comme la seule correcte.[25]

Puisque le raisonnement sémantique 'par modèles' nous est souvent beaucoup plus naturel que la manipulation purement syntaxique de symboles non-interprétés, les preuves dans les calculs axiomatiques deviennent vite assez compliquées.[26] Pour une preuve plus compliquée, voici une démonstration que "$(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$" est un théorème :

(1)	HC $\vdash p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$	$\mathbf{H_{12}}$
(2)	HC $\vdash (p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow ((p \wedge \neg p) \rightarrow q)$	$\mathbf{H_4}$
(3)	HC $\vdash (p \wedge \neg p) \rightarrow q$	(MP) de (1) et (2)
(4)	HC $\vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow p$	$\mathbf{H_9}$
(5)	HC $\vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow \neg p$	$\mathbf{H_8}$
(6)	HC $\vdash ((\neg p \wedge p) \rightarrow p) \rightarrow (((\neg p \wedge p) \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg p \wedge p) \rightarrow (p \wedge \neg p)))$	$\mathbf{H_{10}}$
(7)	HC $\vdash ((\neg p \wedge p) \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg p \wedge p) \rightarrow (p \wedge \neg p))$	(MP) de (4) et (6)
(8)	HC $\vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow (p \wedge \neg p)$	(MP) de (5) et (7)
(9)	HC $\vdash ((\neg p \wedge p) \rightarrow (p \wedge \neg p)) \rightarrow (((p \wedge \neg p) \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \wedge p) \rightarrow q))$	$\mathbf{H_2}$
(10)	HC $\vdash ((p \wedge \neg p) \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \wedge p) \rightarrow q))$	(MP) de (8) et (9)
(11)	HC $\vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow q)$	(MP) de (3) et (10)
(12)	HC $\vdash (\neg p \wedge p) \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q))$	$\mathbf{H_3}$
(13)	HC $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$	(MP) de (11) et (12)
(14)	HC $\vdash ((q \wedge p) \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow q))$	$\mathbf{H_3}$
(15)	HC $\vdash (q \wedge p) \rightarrow q$	$\mathbf{H_8}$
(16)	HC $\vdash q \rightarrow (p \rightarrow q)$	(MP) de (14) et (15)
(17)	HC $\vdash (\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)))$	$\mathbf{H_7}$
(18)	HC $\vdash (q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q))$	(MP) de (13) et (17)
(19)	HC $\vdash (\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$	(MP) de (16) et (18)

On voit dans cette preuve que de nombreuses étapes intermédiaires sont nécessaires pour prouver des phrases à première vue 'triviales' comme l'équivalence entre $\ulcorner \neg\phi \vee \psi \urcorner$ et $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$. Les huit premières lignes, par exemple, servent à établir la commutativité de la conjonction ; à la ligne 11 on a l'équivalent de l'affirmation que n'importe quelle phrase s'ensuit d'une contradiction.

Notre exemple montre aussi qu'il est assez pénible de faire des preuves dans un calcul. L'utilité principale de ces calculs ne réside cependant pas dans leur application pour faire des preuves, mais dans le fait que ces preuves sont parfaitement mécaniques : pour tester, par exemple, que la preuve donnée pour $\ulcorner(\neg\phi \vee \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ est correcte il suffit de vérifier que les instances des schémas d'axiomes

[24]L'interprétation de "$\vee$" comme conjonction, compatible avec $\mathbf{H_7}$, poserait des problèmes avec $\mathbf{H_5}$ et $\mathbf{H_6}$, mais rien ne nous garantit qu'il y aura toujours assez d'autres axiomes pour parvenir à une interprétation unique.

[25]Nous adoptons donc en logique un point de vue structuraliste (cf. p. 75) : aucun théorème de la logique propositionnelle saura distinguer une interprétation de "$\vee$" comme "où" d'une interprétation qui lit "$p \vee q$" comme "p ou q et soit il pleut soit il ne pleut pas".

[26]C'est aussi pour cela qu'on a donné des noms aux différents schémas d'axiomes (comme "réfléxivité" pour l'axiome **H1**) – ces noms ne font pas partie du calcul 'officiel', mais nous servent à mieux retenir les schémas et à faciliter leur utilisation.

en soient réellement des instances et que la règle MP ait été appliquée correctement – c'est un travail qu'un ordinateur peut faire. Les calculs trouvent donc leur principale utilité dans la *vérification* de preuves.

Un autre point fort des calculs est qu'il est relativement simple d'établir des théorèmes métamathématiques qui prouvent qu'un certain calcul a une certaine propriété métamathématique. Un théorème métamathématique sur HC n'est pas un théorème de HC, mais un théorème obtenu par des méthodes de preuves 'ordinaires' en mathématique qui parlent *de* HC et en établissent des propriétés. En faisant ces preuves, nous opérons dans un métalangage par rapport au langage de HC et nous mentionnons ses formules.

Par exemple, nous pouvons prouver (dans le métalangage) que si HC peut prouver (dans le langage-objet) deux implications matérielles telles que le conséquent du premier est l'antécédent du deuxième, alors HC peut également prouver l'implication matérielle du conséquent du deuxième par l'antécédent du premier (cf. 2 en bas). On peut également prouver que s'il y a deux preuves pour deux phrases, il y aura aussi une preuve pour la phrase complexe qui est leur conjonction (cf. 3). La première preuve établit la transitivité de la relation de déductibilité $\vdash$ de HC, la seconde que l'on peut combiner deux preuves dans une seule preuve.[27]

Théorème 11. *Soient ϕ, ψ, χ des formules propositionnelles :*

(2) $\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi \quad \& \quad \mathsf{HC} \vdash \psi \to \chi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{HC} \vdash \phi \to \chi$[28]

(3) $\mathsf{HC} \vdash \phi \quad \& \quad \mathsf{HC} \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{HC} \vdash \phi \wedge \psi$

Preuve

Preuve de (2) : L'antécédent de (2) signifie qu'il y a des nombres n_1 et n_2 tels que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi \to \psi \qquad \mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi \to \chi$$

Un des deux nombres n_1 et n_2 est plus petit que l'autre. Supposons que $n_1 < n_2$. Nous devons démontrer qu'il existe un nombre n_3 tel que

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_3} \phi \to \chi$$

Par $\mathbf{H_2}$, nous savons que

$$\mathsf{HC} \vdash^{0} (\phi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi))$$

Avec (MP), nous pouvons donc dériver à partir de "$\mathsf{HC} \vdash^{n_1} \phi \to \psi$" :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_1+1} (\psi \to \chi) \to (\phi \to \chi)$$

Avec (MP), nous dérivons à partir de ceci et de "$\mathsf{HC} \vdash^{n_2} \psi$" ce dont nous avons besoin pour prouver (2) :

$$\mathsf{HC} \vdash^{n_2+1} \phi \to \chi$$

[27] Dans la leçon 3 (p. 64), nous avons établit un résultat similaire pour la relation *sémantique* $\models$ de conséquence logique. Nous reviendrons sur ce parallélisme dans le chapitre 7.

[28] Notez l'utilisation des signes "&" et "$\Longrightarrow$" qui appartiennent au métalangage.

Preuve de (3) : L'antécédent de (3), "HC $\vdash \phi$ & HC $\vdash \psi$", signifie qu'il y a des nombres n_1 et n_2 tels que

$$\text{HC} \vdash^{n_1} \phi \qquad \text{HC} \vdash^{n_2} \psi$$

Supposons que $n_1 < n_2$. Nous devons démontrer qu'il y a un nombre n_3 tel que

$$\text{HC} \vdash^{n_3} \phi \wedge \psi$$

Par $\mathbf{H_1}$, nous savons que

$$\text{HC} \vdash^{0} (\phi \wedge \psi) \to (\phi \wedge \psi)$$

Par $\mathbf{H_3}$, nous savons également que

$$\text{HC} \vdash^{0} ((\phi \wedge \psi) \to (\phi \wedge \psi)) \to (\phi \to (\psi \to (\phi \wedge \psi)))$$

En appliquant (MP) à ces deux théorèmes, nous obtenons :

$$\text{HC} \vdash^{1} \phi \to (\psi \to (\phi \wedge \psi))$$

A partir de cette ligne et de "HC $\vdash^{n_1} \phi$", nous dérivons par (MP) :

$$\text{HC} \vdash^{n_1+1} \psi \to (\phi \wedge \psi)$$

A partir de cette ligne et de "HC $\vdash^{n_2} \psi$", nous dérivons par (MP) :

$$\text{HC} \vdash^{n_2+1} \phi \wedge \psi$$

□

Cette preuve n'est pas faite *dans* le calcul HC : elle explique comment nous pouvons manipuler des preuves de ce calcul pour en obtenir d'autres. Elle établit ainsi un résultat en métamathématique : elle ne prouve pas de théorème (de HC), mais montre que si des phrases de telles formes sont des théorèmes, alors une autre phrase d'une autre forme l'est également. Elle nous montre ce que nous pouvons achever avec notre outil purement syntaxique HC.

En nous montrant comment combiner les deux preuves de ϕ et ψ en une preuve de $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$, notre preuve en métamathématique profite du fait que les preuves à l'intérieur de HC sont purement mécaniques. C'est parce qu'elles se font toujours de la même manière que nous pouvons les généraliser.

Points à retenir

1. Mis à part la méthode sémantique des tables de vérité, il existe une méthode syntaxique, qui ne fait pas seulement abstraction des significations des phrases, mais aussi de leurs valeurs de vérité.
2. Il est possible de définir la syntaxe de la langue $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle de manière rigoureuse.
3. Tous les connecteurs de la logique propositionnelle sont définissables par un seul, la barre de Sheffer.
4. La logique moderne pris sa source dans les travaux de Frege (*Idéographie*, 1879) et les travaux de

Russell et Whitehead (*Principia Mathematica*, 1910).

5. La révolution en logique a rendu possible d'importants progrès en mathématiques (axiomatisation de l'arithmétique et de la géométrie) et leur a ajouté deux nouvelles branches, les métamathématiques (étude des calculs formels, Hilbert) et la théorie des ensembles (Cantor, Zermelo).
6. Dans la première moitié du 20ème siècle, les trois grands courants en philosophie des mathématiques étaient le logicisme de Frege (les mathématiques comme partie de la logique), le formalisme de Hilbert (les mathématiques comme manipulation des symboles) et l'intuitionnisme de Brouwer et Heyting (constructivisme, rejet du tiers exclu).
7. Un calcul consiste en des axiomes et des règles d'inférences qui permettent de déduire des théorèmes à partir des axiomes.
8. Il est possible de définir de manière purement syntaxique ce qu'est une preuve (dans un certain calcul).
9. La logique propositionnelle peut être axiomatisée de différentes manières.
10. Il faut distinguer les preuves dans le calcul (qui se font par les règles d'inférences et des substitutions dans des axiomes) et les preuves sur le calcul (qui parlent, par exemple, en général de l'existence de certaines preuves) qui se font par les méthodes mathématiques 'ordinaires'.

Chapitre 5

La méthode des arbres

5.1 La sémantique de la logique propositionnelle

Nous avons introduit dans la leçon 4 une méthode purement syntaxique de faire des preuves, laquelle nous a permis de déduire des phrases à partir de quelques axiomes d'un calcul. Il nous fallait faire abstraction non seulement des significations de ces phrases, mais aussi de leurs valeurs de vérité. Bien que nous n'ayons aucunement utilisé ce fait, les phrases ainsi prouvées étaient des tautologies (ce que l'on peut aisément prouver par des tables de vérité). On peut donc se demander quelle est la relation entre la méthode des tables de vérité qui nous permet de vérifier si une phrase donnée est une tautologie et la méthode des calculs axiomatiques qui nous permet de dériver, à l'aide de MP, des théorèmes à partir des axiomes $\mathbf{H_1}$ à $\mathbf{H_{16}}$. Pour pouvoir répondre à cette question, nous devons introduire une sémantique rigoureuse pour le langage $\mathcal{L}$ de la logique propositionnelle, dont on a défini la syntaxe dans la leçon 4 (cf. p. 70).

Comme la logique propositionnelle obéit au principe de vérifonctionnalité (cf. p. 36), sa sémantique nous permet d'attribuer des valeurs de vérité, **v** ("vrai") ou **f** ("faux"), à des formules complexes sur la base des valeurs de vérité des phrases atomiques dont elles sont composées.[1]

Définition 12 (Interprétation propositionnelle atomique)**.** *Une interprétation propositionnelle atomique I^* est une fonction qui assigne à toute phrase atomique "p_i", $i \in \mathbb{N}$, l'une des valeurs de vérité* **v** *ou* **f***. En formules :* $I^* : \{\text{“}p_i\text{”} \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$

La définition 12 ne couvre que le cas des phrases atomiques. La définition générale nous montre comment étendre, par des clauses récursives, une telle interprétation propositionnelle atomique à une interprétation (attribution de valeurs de vérité) de toutes les formules de notre langage :

Définition 13 (Interprétation propositionnelle)**.** *Étant donné une interprétation propositionnelle atomique I^*, nous définissons une interprétation propositionnelle I (qui est une fonction associant à toute formule propositionnelle une et une seule valeur de vérité ; en symboles : $I : \mathsf{Fml}(\mathcal{L}) \rightarrow \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$) par des clauses récursives :*

I1 *Si ϕ est une phrase atomique "p", $I(\phi) := I^*(\text{“}p\text{”})$*

---

[1] J'utilise "**v**" et "**f**" pour indiquer qu'on traite ici les valeurs de vérité comme des 'objets', c'est-à-dire des choses qui peuvent être valeurs de fonctions. Par contre, l'utilisation de "V" et "F" dans les tables de vérité pourrait être paraphrasée de manière à ne pas 'réifier' (traiter comme objets) les valeurs de vérité (cf. n. 7 à la p. 37). Au lieu de dire, par exemple, que "$p \rightarrow q$" reçoit "F" comme valeur de vérité dans la deuxième ligne de la table de vérité pour cette phrase complexe (phrase qui m'engage à l'existence de valeurs de vérité), on pourrait dire que la phrase est fausse si son antécédent est vrai et son conséquent faux.

I2 $I(\neg\phi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{v} \end{cases}$

I3 $I(\phi \wedge \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{v} \textit{ et } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{f} \textit{ ou } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I4 $I(\phi \vee \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{v} \textit{ ou } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{f} \textit{ et } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I5 $I(\phi \rightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{f} \textit{ ou } I(\psi) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & \textit{si } I(\phi) = \mathbf{v} \textit{ et } I(\psi) = \mathbf{f} \end{cases}$

I6 $I(\phi \leftrightarrow \psi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \textit{si } I(\phi) = I(\psi) \\ \mathbf{f} & \textit{si } I(\phi) \neq I(\psi) \end{cases}$

On reconnaît, dans la spécification de cette fonction I, le même raisonnement qui nous a permis de définir les connecteurs par des tables de vérité. Les interprétations correspondent aux possibilités logiques, aux lignes dans une table de vérité. Une interprétation atomique I^* qui attribue **v** à "p", "q" et "r" et **f** à "s" et "t" ($I^*(\text{“}p\text{”}) = I^*(\text{“}q\text{”}) = I^*(\text{“}r\text{”}) = \mathbf{v}$ & $I^*(\text{“}s\text{”}) = I^*(\text{“}t\text{”}) = \mathbf{f}$), par exemple, nous donnera une interprétation I qui attribuera **v** à "$p \wedge q$", à "$p \vee s$" etc. et **f** à "$p \rightarrow s$", "$t \vee s$" etc. Elle correspond à une possibilité logique dans laquelle "p", "q" et "r" sont vraies et "s" et "t" fausses. Elle correspond aussi à la quatrième ligne dans la table de vérité de ces cinq phrases (qui comporte, au total, 32 lignes) : V-V-V-F-F.

Si une phrase "p" reçoit la valeur **v** sous une interprétation I, nous pouvons dire que cette interprétation *satisfait* la proposition : elle nous montre comment le monde pourrait être si "p" était vraie.

Définition 14 (Satisfaisabilité)**.** *Une formule propositionnelle ϕ est satisfaisable si et seulement si elle est vraie sous au moins une interprétation de ses constituants simples.*

Si une phrase ϕ reçoit la valeur **v** sous une interprétation I, nous pouvons dire que cette interprétation nous montre comment construire un *modèle* de cette proposition : un modèle pour ϕ est une structure (normalement mathématique) dont ϕ, sous une certaine interprétation de ses constituants simples, est une description correcte. La *théorie des modèles* est cette branche de la sémantique formelle qui étudie les interprétations des systèmes formels par des structures mathématiques, souvent construites à l'aide de la théorie des ensembles.

Nous pouvons maintenant donner une définition rigoureuse de la relation de conséquence sémantique.

Définition 15 (Conséquence sémantique)**.** *Une formule propositionnelle ψ est une conséquence sémantique d'une formule propositionnelle ϕ (écrit : "$\phi \models \psi$") si et seulement si toute interprétation qui satisfait ϕ satisfait également ψ.*

Si aucune interprétation qui assigne **v** à ϕ n'assigne **f** à ψ, alors il n'y a que des "V" dans la table de vérité pour $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ – il s'agit d'une implication formelle.

Puisqu'une interprétation correspond à une possibilité logique et réciproquement, nous pouvons donner une définition de ce que sont une tautologie et une contradiction en termes d'"interprétation" :

Définition 16 (Tautologie)**.** *Une formule propositionnelle ϕ est une tautologie si et seulement si elle est vraie sous toutes les interprétations. ϕ est une contradiction si et seulement si elle n'est vraie sous aucune interprétation (elle est donc fausse sous toutes les interprétations).*

Nous utilisons le signe "$\models$" de la conséquence sémantique pour dire qu'une phrase est une tautologie : "$\models \phi$" veut dire que ϕ est une conséquence sémantique de n'importe quelle phrase ou, de manière équivalente, que ϕ est une tautologie.

Utilisant "$\exists \ldots (\cdots\cdots\cdots)$" pour dire "il y a un ... qui $\cdots$" et "$\forall \ldots (\cdots\cdots\cdots)$" pour dire "tous les ... sont $\cdots$", nous pouvons écrire les trois dernières définitions comme suit :

(1)	ϕ est satisfaisable	$:\Longleftrightarrow$	$\exists I\ (I(\phi) = \mathbf{v})$
(2)	ϕ est une tautologie	$:\Longleftrightarrow$	$\forall I\ (I(\phi) = \mathbf{v})$
(3)	ϕ est une contradiction	$:\Longleftrightarrow$	$\forall I\ (I(\phi) = \mathbf{f})$
(4)	ϕ est une conséquence sémantique de ψ	$:\Longleftrightarrow$	$\forall I\ (I(\phi) = \mathbf{v} \Rightarrow I(\psi) = \mathbf{v})$

Bien que toute tautologie (ainsi que toute formule de notre langage) soit composée d'un nombre fini de phrases simples, il y a non seulement une infinité de formules bien formées, mais également une infinité de tautologies.[2] Puisqu'elles sont de grande utilité pour faciliter les preuves, il convient tout de même d'en mentionner quelques-unes en particulier :

T1	$\models \ulcorner(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi))\urcorner$	analyse de "$\leftrightarrow$"
T2	$\models \ulcorner(\phi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \psi)\urcorner$	analyse de "$\to$"
T3	$\models \ulcorner(\phi \to \psi) \leftrightarrow \neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner$	analyse de "$\to$"
T4	$\models \ulcorner\neg(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \vee \neg\psi)\urcorner$	de Morgan
T5	$\models \ulcorner\neg(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi)\urcorner$	de Morgan
T6	$\models \ulcorner(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))\urcorner$	distributivité
T7	$\models \ulcorner(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \leftrightarrow ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi))\urcorner$	distributivité
T8	$\models \ulcorner(\phi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\phi)\urcorner$	conversion
T9	$\models \ulcorner((\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \neg\psi)) \leftrightarrow \neg\phi\urcorner$	réduction à l'absurde
T10	$\models \ulcorner(\phi \to \neg\phi) \leftrightarrow \neg\phi\urcorner$	réduction à l'absurde
T11	$\models \ulcorner(\neg\phi \to \phi) \leftrightarrow \phi\urcorner$	'conséquence miraculeuse'
T12	$\models \ulcorner\psi \to (\phi \to \psi)\urcorner$	verum sequitur ad quodlibet
T13	$\models \ulcorner\neg\phi \to (\phi \to \psi)\urcorner$	ex falso sequitur quodlibet
T14	$\models \ulcorner((\phi \to \psi) \wedge \phi) \to \psi\urcorner$	modus ponendo ponens
T15	$\models \ulcorner((\phi \to \psi) \wedge \neg\psi) \to \neg\phi\urcorner$	modus tollendo tollens
T16	$\models \ulcorner(\neg(\phi \wedge \psi) \wedge \phi) \to \neg\psi\urcorner$	modus ponendo tollens
T17	$\models \ulcorner((\phi \vee \psi) \wedge \neg\phi) \to \psi\urcorner$	modus tollendo ponens
T18	$\models \ulcorner((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) \to (\phi \to \chi)\urcorner$	transitivité de l'implication
T19	$\models \ulcorner\phi \to \phi\urcorner$	'identité'
T20	$\models \ulcorner\phi \vee \neg\phi\urcorner$	tiers exclu
T21	$\models \ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\phi)\urcorner$	non-contradiction

Quelques-unes de ces tautologies ont une très longue histoire.[3]

Dans le cas où une équivalence matérielle est tautologique, on parle d'"équivalence sémantique". Deux formules qui sont sémantiquement équivalentes peuvent être substituées l'une à l'autre dans n'importe quelle formule sans affecter sa table de vérité. Nous constatons ainsi que la définition de l'équivalence matérielle en terme d'implication matérielle et la définition de l'implication matérielle en terme de négation et disjonction, ou de négation et conjonction, sont *correctes* : les tautologies **T1**, **T2** et **T3** nous assurent que nous pouvons universellement substituer le *definiendum* au *definiens* ('annulant' ainsi

[2] Pour comprendre cela, il suffit de remarquer que $\ulcorner(\phi \vee \neg\phi) \vee \psi\urcorner$ est une tautologie pour n'importe quelle formule ψ.

[3] Notamment la réduction à l'absurde : "Si tu sais que tu es mort, alors tu es mort (car on ne peut savoir une chose fausse) ; si tu sais que tu es mort, alors tu n'es pas mort (car un mort ne sait rien) ; donc, tu ne sais pas que tu es mort." (un stoïcien, rapporté par Origène ; d'après Blanché (1996: 70–71)). La 'conséquence miraculeuse' ("consequentia mirabilis") se trouve, d'après Blanché (1996: 71), déjà chez Aristote : "S'il ne faut pas philosopher, il faut philosopher (pour prouver qu'il ne faut pas philosopher) ; donc il faut philosopher." (*Protréptique*)

notre définition). De même, **T4** et **T5** nous assurent de la correction des lois de Morgan, ainsi que **T6** et **T7** de la correction des lois de distributivité.[4]

Les implications matérielles tautologiques sont des implications formelles, c'est-à-dire des relations de conséquence sémantique. Elles nous garantissent la correction des règles d'inférence : le fait que $\ulcorner((\phi \rightarrow \psi) \wedge \phi) \rightarrow \psi\urcorner$ soit une tautologie (**T14**), par exemple, nous montre que la règle *modus ponens* (MP), à partir de vérités, ne produit que des vérités – que le cas que les prémisses de ce schéma d'inférence soient vraies et la conclusion fausse ne peut pas arriver et, par conséquent, que le schéma d'inférence est valide. De même, les autres implications formelles nous assurent de la correction des règles d'inférence dérivées ("dérivées" parce qu'elles n'étaient pas mentionnées dans notre définition initiale du calcul). C'est grâce à (**T8**), par exemple, que nous pouvons passer de $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ à $\ulcorner\neg\psi \rightarrow \neg\phi\urcorner$, ce que nous pouvons adopter comme la règle d'inférence dérivée appelée "conversion" (CP) :

(5) $$\frac{\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner}{\ulcorner\neg\psi \rightarrow \neg\phi\urcorner}\ \text{CP}$$

De telles règles d'inférence dérivées facilitent les preuves dans le calcul parce qu'elles épargnent la pénible tâche qui consiste à chercher les substitutions adéquates dans les axiomes.

Bien que, par exemple, la tautologie **T14** et la règle MP (et **T8** et CP) soient intimement liées (dans la mesure où la première nous assure de la correction de la deuxième), il faut tout de même les distinguer. Les tautologies sont des phrases du langage-objet qui (quoique dénuées de contenu d'après certains philosophes) parlent des objets (dans le sens dans lequel "Soit Socrate est mort, soit il ne l'est pas" parle de Socrate). Les règles, en revanche, sont des énoncés métalinguistiques, parlant de toutes les phrases ayant une certaine forme syntaxique : MP nous dit, par exemple, que de deux formules $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et ϕ nous pouvons inférer une troisième, à savoir ψ.

Il a été dit que les implications formelles nous permettent de faciliter les preuves à l'aide de règles d'inférence dérivées. Mais est-ce vraiment le cas ? Qu'est-ce qui nous assure que notre méthode purement syntaxique respecte les relations sémantiques ? Afin de répondre à ces questions, il faut traiter de la relation entre "$\vdash$" et "$\models$" plus en détail.

5.2 Les relations entre conséquence sémantique et déductibilité

Nous avons vu que la logique traite de la relation de conséquence et cherche à déterminer quelles phrases s'ensuivent de quelles autres. Nous avons développé des notions précises de conséquence sémantique ($\models$) et de déductibilité syntaxique ($\vdash$). Maintenant, nous devons nous demander quelles sont les relations entre ces deux 'types' de 'conséquence'. Quel est le rapport entre "$\phi \models \psi$" ("ψ est une conséquence sémantique de ϕ") et "$\phi \vdash \psi$" ("ψ peut être dérivé de ϕ dans un certain calcul") ?

Pour notre calcul HC, deux théorèmes importants en métamathématiques (des preuves *sur* le calcul) nous assurent que les deux notions sont équivalentes. D'une part, HC est correct : HC ne prouve que des tautologies ; d'autre part, HC est aussi complet : HC prouve toutes les tautologies :

théorème de correction : HC est correct : tout théorème est une tautologie.

théorème de complétude : HC est complet : toute tautologie est un théorème.

[4] Nous parlons ici de "correction" dans le sens qu'une phrase ou règle d'inférence est "correcte" ssi elle est ou correspond à une tautologie. On reviendra sur cette notion ci-dessous, cf. p. 129.

Nous avons donc la relation suivante (pour n'importe quelle formule propositionnelle ϕ) :

$$\mathsf{HC} \vdash \phi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathsf{HC} \models \phi$$

La direction '$\Longrightarrow$' est assurée par le théorème de correction et signifie que HC ne prouve pas *trop*, c'est-à-dire ne prouve pas plus que les vérités logiques. La direction inverse '$\Longleftarrow$' est assurée par le théorème de complétude : HC prouve assez – en d'autres termes, il n'y a pas de vérités logiques qui ne soient pas prouvables dans HC.

Pris ensemble, les théorèmes de correction et de complétude nous assurent que notre axiomatisation de la logique propositionnelle par le calcul HC est *adéquate* : on a réussi à prouver toutes les phrases que l'on voulait, et pas plus. Ils nous montrent que le calcul syntaxique est en harmonie avec sa sémantique.

Théorème 17 (Correction de HC)**.** *Soit* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle :*

(6) $\quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi \qquad \Longrightarrow \qquad \mathsf{Th} \models \phi$

Preuve Par induction sur tous les nombres naturels n,[5] nous prouvons que :

(HI) $\quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi \qquad \Longrightarrow \qquad \mathsf{Th} \models \phi$

(i) Si $n = 0$, alors soit ϕ est un axiome de HC, soit un élément de Th.[6] Par les tables de vérité, nous prouvons que tous les axiomes $\mathbf{H_1}$ à $\mathbf{H_{16}}$ sont des tautologies. Dans le cas où ϕ est un élément de Th ($\phi \in \mathsf{Th}$), il est évident que $\mathsf{Th} \models \phi$.

(ii) Hypothèse d'induction : Supposons que $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^n \phi$ et que (**HI**) est vraie pour tous les nombres naturels $n' < n$. Si ϕ est un axiome ou un théorème, "$\mathsf{Th} \models \phi$" est vrai (par (i)). La seule autre possibilité est que l'on ait obtenu ϕ par l'application de MP à deux autres théorèmes. Dans ce cas, il y a une formule ψ et des nombres naturels n' et n'' (les deux $< n$) tels que :

(1) $\quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n'} \psi \rightarrow \phi$

(2) $\quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n''} \psi$

(3) $\quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash^{n} \phi$

Par l'hypothèse d'induction, nous savons que (**HI**) est vrai pour les lignes (1) et (2). Nous avons :

$$\mathsf{Th} \models \psi \rightarrow \phi$$
$$\mathsf{Th} \models \psi$$

Puisque nous savons que MP est une règle d'inférence valide, nous pouvons inférer à partir de (3) :

$$\mathsf{Th} \models \phi$$

□

Pour une preuve de correction il suffit de prouver que les axiomes sont des tautologies et que les règles d'inférence sont valides. Par la définition de la validité, il s'ensuit que tous les théorèmes sont des

[5] Une preuve par induction sur les nombres naturels montre qu'une certaine phrase est vraie de 0 ("base de l'induction") et que, si elle est vraie pour n ("hypothèse d'induction"), alors elle est aussi vraie pour $n + 1$ (cette deuxième étape s'appelle le "pas de l'induction"). En montrant ainsi que la phrase est vraie de 0 et qu'elle est héritée par tous les successeurs de 0, nous démontrons que la phrase est vraie de tous les nombres (cf. p. 80).

[6] Ceci s'ensuit de la notion même de preuve dans HC.

tautologies.

La complétude d'un calcul est, en général, beaucoup plus difficile à prouver que sa correction. Nous nous limitons donc ici à énoncer le théorème :[7]

Théorème 18 (Complétude de HC)**.** *Soit* Th *une théorie et* ϕ *une formule propositionnelle :*

(7) $\mathsf{Th} \models \phi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi$

Les tautologies sont les formules propositionnelles logiquement valides de la logique propositionnelle. Etant donné que toute interprétation assigne soit **v** soit **f** à une phrase donnée, une contradiction est une phrase dont la négation est une tautologie (et vice versa).

La plus grande partie de nos formules propositionnelles et toutes les phrases (traitées comme) simples ne sont ni des contradictions ni des tautologies. Une tautologie étant une *nécessité* logique et une contradiction étant une *impossibilité* logique, il s'agit donc de phrases *contingentes*, vraies sous quelques interprétations (et dans quelques mondes possibles), mais fausses sous d'autres.

Les théorèmes de correction et de complétude nous montrent que ces notions sémantiques de tautologie, contradiction et satisfaisabilité ont des contreparties purement syntaxiques. Dans le calcul HC, nous pouvons dire qu'une phrase est prouvable si elle peut être dérivée des axiomes à l'aide de la règle d'inférence MP. Le théorème de correction limite ce que nous pouvons prouver par le calcul : elle signifie que seules les tautologies peuvent être prouvées, que le calcul ne prouve pas trop. L'inverse, cependant, est également vrai : comme nous allons voir dans la leçon 7 (p. 135), le calcul HC prouve assez : pour toute tautologie, il nous permet de déduire une contradiction à partir de la négation de cette tautologie.

Nous pouvons formuler ces observations de la manière suivante : disons que la *clôture déductive* d'une formule propositionnelle ϕ est l'ensemble de toutes les formules qui peuvent être déduites de ϕ à l'aide des axiomes et la règle d'inférence de HC.[8] Adoptons la définition suivante :

Définition 19 (Consistance)**.** *Une phrase* ϕ *est consistante si et seulement si la clôture déductive de* ϕ *ne contient pas une phrase* ψ *et sa négation* $\ulcorner\neg\psi\urcorner$.

Comme toute phrase fait partie de sa clôture déductive et parce que, si $\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner$ appartient à une clôture déductive, alors ϕ et ψ y appartiennent également, une contradiction sera inconsistante d'après notre définition. Parce que MP ne nous permet pas de déduire une contradiction à partir d'une phrase qui n'est pas elle-même sémantiquement équivalente à une contradiction, *seulement* des contradictions seront inconsistantes.

Nous pouvons facilement étendre notre définition à des ensembles de phrases : la clôture déductive d'un ensemble de phrases est l'ensemble de toutes les phrases qui peuvent en être déduites ; un ensemble de phrases est consistant si et seulement si sa clôture déductive ne contient pas une phrase et sa négation. La clôture déductive des axiomes de HC est l'ensemble des théorèmes. Une contradiction, nous l'avons vu, nous permet de déduire n'importe quelle proposition : $\ulcorner(\phi \wedge \neg\phi) \rightarrow \psi\urcorner$ est un théorème pour n'importe quelle formule ψ. Au lieu de définir une phrase inconsistante comme phrase dont la clôture déductive contient une phrase et sa négation, nous aurions aussi pu la définir comme phrase dont la clôture déductive est *triviale*, c'est-à-dire contient toute proposition.[9]

[7] Nous donnerons une preuve de la complétude de HC dans la leçon 7 (cf. p. 135). La méthode des arbres que nous introduirons par la suite nous facilitera cette tâche.

[8] Nous avons déjà utilisé cette notion dans la n. 2 à la p. 71.

[9] Les dialéthéistes, qui acceptent des contradictions vraies, remplacent le principe de non-contradiction par un principe de

Grâce aux théorèmes de correction et de complétude, la notion purement syntaxique de consistance correspond à une notion sémantique : dire qu'une formule propositionnelle est consistante (notion syntaxique) revient à dire qu'elle n'est pas une contradiction (notion sémantique) ; dire que deux formules sont consistantes revient à dire qu'elles ne sont pas contraires, c'est-à-dire qu'elles peuvent être vraies ensemble. La notion syntaxique de consistance correspond donc à la notion sémantique de satisfaisabilité :

Théorème 20 (Adéquation). *Une théorie* Th *est consistante si et seulement s'il y a une interprétation qui rend vraies toutes les formules propositionnelles* $\phi \in \mathsf{Th}$. *Autrement, elle est inconsistante (c'est-à-dire elle est inconsistante si et seulement si aucune interprétation ne rend vraies toutes les formules propositionnelles* $\phi \in \mathsf{Th}$*).*

La consistance est une relation entre des (ensembles de) phrases : on dit qu'une phrase ϕ est consistante avec deux autres phrases, ψ et χ, si et seulement s'il y a une interprétation qui rend vraies les trois phrases ϕ, ψ et χ. La consistance est intimement liée à la relation de conséquence sémantique : une phrase ϕ est une conséquence sémantique d'une théorie Th si et seulement si sa négation $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est inconsistante avec Th. Dans ce cas, toute interprétation qui rend vraie $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ (et qui donc rend fausse ϕ), doit aussi rendre fausse au moins une des prémisses dans Th.

Définition 21 (Conséquence sémantique d'une théorie). *Une formule propositionnelle* ϕ *est une conséquence (sémantique) d'une théorie* Th *(écrit : "*$\mathsf{Th} \models \phi$*") si et seulement si toute interprétation qui rend vraies toutes les formules propositionnelles dans* Th *rend vrai* ϕ.[10]

Si ϕ est une conséquence de la théorie vide ($\mathsf{Th} = \emptyset$) et s'ensuit donc seulement des axiomes d'un certain calcul, nous écrivons "$\models \phi$" au lieu de "$\emptyset \models \phi$". "$\models \phi$" veut donc dire que toute interprétation rend vraie ϕ, c'est-à-dire que ϕ est valide ou est une tautologie.

Etant donné que la notion de consistance s'applique à une phrase si et seulement si la négation de cette phrase n'est pas une tautologie, nous avons les relations suivantes :

correction	tout théorème est une tautologie	toute phrase satisfaisable est consistante
complétude	toute tautologie est un théorème	toute phrase consistante est satisfaisable

Il s'agit ici d'une application métalogique de la règle d'inférence de conversion : si tout théorème est une tautologie, tout ce qui n'est pas vrai sous toutes les interprétations (n'est pas une tautologie, donc a une négation satisfaisable) ne peut pas être prouvé (n'est pas un théorème, donc a une négation consistante) ; si toute tautologie est un théorème, tout ce qui ne peut pas être prouvé (a une négation consistante) n'est vrai sous aucune interprétation (a une négation satisfaisable).

L'harmonie entre la syntaxe et la sémantique de la logique propositionnelle nous donne une corres-

non-trivialité : au lieu de dire qu'une phrase est prouvable si et seulement si la clôture déductive de sa négation est inconsistante, ils disent qu'elle l'est si et seulement si la clôture déductive de sa néLgation est non-triviale – c'est-à-dire les deux conditions ne coïncident pas dans une logique qui n'accepte pas le principe de l'*explosion déductive* (ou : *ex falso quodlibet*) qui dit que n'importe quelle formule s'ensuit d'une contradiction.

[10] Pour l'écrire formellement :

(8) $\mathsf{Th} \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall I\ \forall \psi \in \mathsf{Th}\ \ (I(\psi) = \mathbf{v} \ \rightarrow\ I(\phi) = \mathbf{v})$

pondance parfaite entre les notions sémantiques et syntaxiques :

$$
\begin{array}{rcl}
\phi \text{ s'ensuit de } \mathsf{Th} & \Longrightarrow & \phi \text{ est une conséquence syntaxique de } \mathsf{Th} \\
\phi \text{ est satisfaisable} & \Longrightarrow & \phi \text{ est consistant} \\
\phi \text{ est une contradiction} & \Longrightarrow & \phi \text{ est inconsistant} \\
\phi \text{ est une tautologie} & \Longrightarrow & \ulcorner \neg\phi \urcorner \text{ est inconsistant} \\
\ulcorner \phi \text{ donc } \psi \urcorner \text{ est un argument valide} & \Longrightarrow & \ulcorner \phi \wedge \neg\psi \urcorner \text{ est inconsistant}
\end{array}
$$

5.3 La nature de la logique

Nous avons introduit la négation "¬" par la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Cette table de vérité montre que la valeur de vérité d'une phrase formée d'une négation (comme connecteur principal) et d'une autre phrase plus simple est l'inverse de la valeur de vérité de cette autre proposition. Selon le principe de vérifonctionnalité (cf. p. 36), cette table de vérité détermine complètement la signification de "¬". Il y a, cependant, une autre manière de spécifier cette signification, que ceux qui ne pensent pas que la logique est l'étude de quelques vérités (les 'vérités logiques'), mais plutôt qu'elle est l'étude des inférences valides, préfèrent. Selon eux, une logique n'est pas caractérisée par ses tautologies, mais par la relation de conséquence qui rend valides certaines inférences. Les connecteurs propositionnels ne sont pas caractérisés par leurs tables de vérité, mais par les règles d'introduction et d'élimination qui gouvernent leur comportement inférentiel.

Parmi les philosophes qui se sont interrogés sur la nature de la logique, on peut en effet distinguer deux courants : selon un premier courant, la logique essaie de trouver, d'expliquer et de systématiser les tautologies :[11] selon un second courant, elle essaie de formaliser les inférences valides.[12] Le premier camp maintient souvent, avec Wittgenstein, que les vérités logiques sont dénuées de contenu ("*sinnlos*"), mais qu'elles ne sont pas dénuées de sens (elles ne sont pas "*unsinnig*") : quoiqu'elles ne nous informent pas sur le monde (car elles n'excluent aucune possibilité), elles font, en tant que cas limites, partie du langage sensé – "Elles font partie du formalisme." (Wittgenstein 1921: §4.4611).

La première approche consiste dans l'élaboration d'un calcul qui axiomatise un certain nombre de phrases, appelées "théorèmes". La seconde approche formalise certaines inférences, des transitions de quelques phrases à d'autres. La première approche réussit si et seulement si les théorèmes (les phrases axiomatisées) sont des tautologies (et il ne reste aucune tautologie qui ne soit pas axiomatisée par le calcul), c'est-à-dire si le calcul est complet et correct ; la seconde approche réussit si et seulement si les inférences formalisées sont valides et suffisent pour capturer tout le raisonnement 'logique' en question.

Les deux projets de recherche peuvent être entrepris de manière sémantique ou de manière syntaxique. Si l'on s'intéresse principalement aux vérités logiques, on cherchera à les axiomatiser à l'aide d'un calcul et à prouver que ce calcul est correct et complet (en bref : adéquat) par rapport à l'ensemble

[11] Ainsi Blanché, dans son introduction à la logique, dit que la logique (propositionnelle) est la recherche des tautologies (Blanché 1996: 65). Les figures les plus célèbres de ce groupe sont Quine, Tarski et Wittgenstein.

[12] Pour ce camp là, nous nous devons surtout de nommer le logicien allemand Gerhard Gentzen.

des phrases que l'on voulait axiomatiser.[13] Dans la seconde perspective, qui s'intéresse à la validité des arguments (et à la correction des inférences) plutôt qu'aux vérités logiques (bien que les deux questions soient étroitement liés), on essaie de développer une méthode syntaxique et structurelle de déduction. C'est la méthode de la déduction naturelle, que l'on abordera dans la leçon 6. Une autre méthode est celle des tableaux analytiques, également appelée la "méthode des arbres". Ces deux méthodes sont syntaxiques : la différence principale entre ces deux techniques et le calcul axiomatique c'est qu'elles comportent de nombreuses règles d'inférence, tandis que le calcul hilbertien n'a normalement qu'une seule règle d'inférence (le plus souvent *modus ponens*), mais de nombreux axiomes.

La méthode de la déduction naturelle a été introduite, d'une part par Jaskowski (1934) et d'autre part par Gentzen (1934). Simultanément, Gentzen a défini un calcul des séquents. Vingt ans plus tard, Beth (1955) a formulé sa méthode des tableaux analytiques et Hintikka (1955) a proposé la méthode des 'ensembles de vérité' ('truth sets') qui, dans la systématisation de Smullyan (1968), est devenue la méthode des arbres que nous présenterons à la manière de Lepage (1991). Ce n'est que récemment qu'il a été prouvé que le calcul des tableaux analytiques et le calcul des séquents sont équivalents, c'est-à-dire que tout ce qui peut être prouvé par l'une des méthodes peut être également prouvé par l'autre et vice versa.

5.4 La normativité de la logique

5.5 La méthode des arbres

La méthode des arbres est une méthode syntaxique pour prouver certaines phrases. Elle est cependant 'moins' syntaxique que la méthode des calculs axiomatiques parce qu'elle utilise des règles qui se prêtent à une interprétation en termes de tables de vérité.

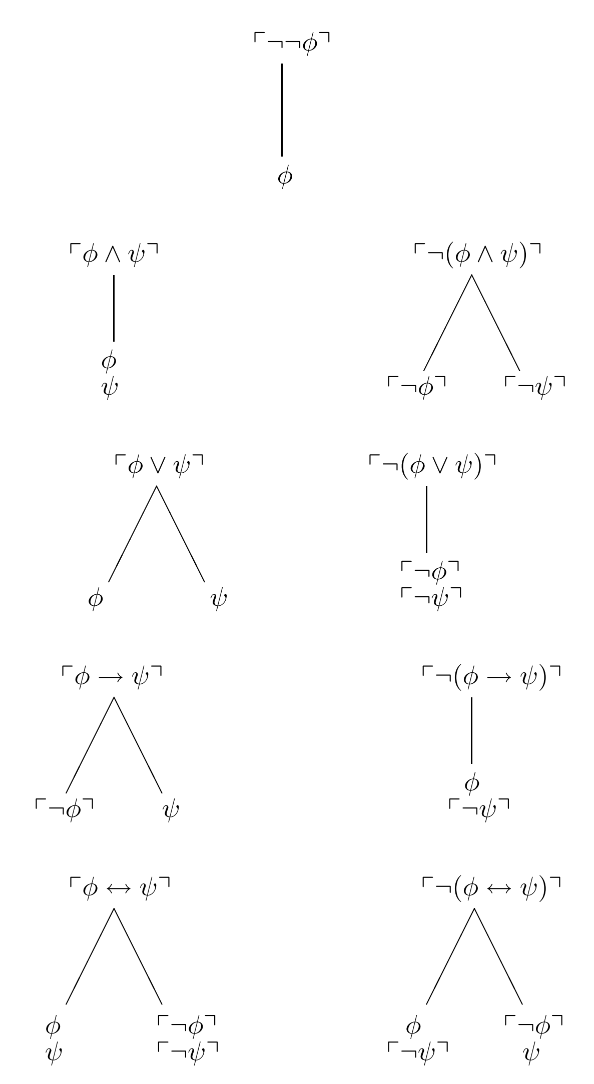
Rappelons les neuf faits suivants :

F1 Si une négation $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est fausse, alors ϕ est vraie.
F2 Si une conjonction $\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner$ est vraie, alors ϕ et ψ sont vraies.
F3 Si une conjonction $\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner$ est fausse, alors soit ϕ soit ψ est fausse.
F4 Si une disjonction $\ulcorner\phi\vee\psi\urcorner$ est vraie, alors soit ϕ, soit ψ est vraie.
F5 Si une disjonction $\ulcorner\phi\vee\psi\urcorner$ est fausse, alors ϕ et ψ sont fausses.
F6 Si une implication $\ulcorner\phi\rightarrow\psi\urcorner$ est vraie, alors soit ϕ est fausse soit ψ est vraie.
F7 Si une implication $\ulcorner\phi\rightarrow\psi\urcorner$ est fausse, alors ϕ est vraie et ψ est fausse.
F8 Si une équivalence $\ulcorner\phi\leftrightarrow\psi\urcorner$ est vraie, alors soit ϕ et ψ sont vraies, soit ϕ et ψ sont fausses.
F9 Si une équivalence $\ulcorner\phi\leftrightarrow\psi\urcorner$ est fausse, alors soit ϕ est vraie et ψ fausse, soit ϕ est fausse et ψ vraie.

De ces neuf faits, nous dérivons des règles pour construire des arbres. **F2**, par exemple, nous dit que nous pouvons décomposer $\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner$ en ϕ et en ψ et les placer sur la même branche : si $\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner$ se trouve sur un chemin de l'arbre, alors ϕ et ψ devront se trouver sur ce même chemin, car si $\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner$ est vraie, ϕ et ψ le sont aussi. **F3** nous dit que si $\ulcorner\neg(\phi\wedge\psi)\urcorner$ se trouve sur un chemin, alors soit $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ soit $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ devrait se trouver sur le même chemin. Construire un arbre correspondant à une expression complexe consistera à construire des chemins à partir de l'expression initiale en utilisant les règles de construction d'arbres. Les chemins ainsi obtenus dans l'arbre (considérés de bas en haut) seront des 'chemins de vérité' : ils représentent des manières dont les phrases initiales peuvent être vraies

[13] Nous parlerons de la correction et la complétude des calculs en général dans la leçon 7.

ensemble. La méthode des arbres nous fournit ainsi un test de consistance, respectant la composition d'une phrase complexe à partir de ses constituantes simples. Les neuf faits **F1** à **F9** mentionnés nous assurent la correction de quelques règles d'inférence. Ils correspondent à neuf règles de construction d'arbres :



Nous appliquons ces règles de manière itérative, jusqu'à ce qu'aucune des règles ne soit applicable – cela n'est le cas que si les seules phrases non-traitées sont des phrases simples ou des négations de phrases simples. Nous pouvons 'fermer' une branche si et seulement si elle contient n'importe quelle formule propositionnelle, par exemple "p" (ou "$p \wedge (q \vee r)$"), *et* sa négation "$\neg p$" (ou "$\neg(p \wedge (q \vee r))$").[14] Pour le faire, il n'est pas nécessaire que l'arbre soit entièrement développé : dès que nous trouvons une phrase et sa négation sur une même branche, nous pouvons la fermer.

[14]Seules les paires de phrases de la forme $\langle \phi, \ulcorner \neg\phi \urcorner \rangle$ comptent comme contradictoires. Il ne serait pas permis, par exemple, de considérer "$\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)$" comme négation de "$p \wedge (q \vee r)$", même si la formule est sémantiquement équivalente à cette négation. Dans un calcul syntaxique, tel que l'est la méthode des arbres, seule la *forme* (syntaxique) des phrases peut entrer en considération.

5.6 Le développement syntaxique de la méthode des arbres

Semantische Interpretation der Baummethode :[15]

1. Ein voll entwickelter Zweig entspricht einem 'Wahrheitsweg' : er zeigt an, mit welcher Interpretation ihrer einfachen Bestandteile die Formel am Ursprung des Baumes wahr wird.
2. Wir können uns einen Zweig als 'Argumentationsstrategie' denken, mit der wir die am Ursprung stehende Formel verteidigen könnten.
3. Schliessen sich alle Zweige, ist es logisch unmöglich, dass die am Ursprung stehende Formel wahr ist : sie ist eine Kontradiktion. Das bedeutet, dass ihre Negation eine Tautologie ist.
4. Die Baummethode ist damit eine Methode der *reductio ad absurdum* : wir zeigen damit, dass eine Formel logisch falsch bzw. 'unverteidigbar' ist.

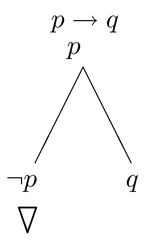
Um mittels der Baummethode eine Formel zu beweisen, ***bilden wir ihre Negation***, entwickeln den Baum dieser Negation und zeigen, dass sich alle Zweige schliessen.

Sei ϕ eine beliebige Formel :

1. Schliessen sich alle Zweige des Baumes für $\ulcorner\neg\phi\urcorner$, ist ϕ eine Tautologie.
2. Bleibt ein Zweig des voll entwickelten Baumes für $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ offen, haben wir ein Modell für $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ (eine Interpretation der einfachen Bestandteile von ϕ, die $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ wahr macht) ; dann ist ϕ keine Tautologie.

Schliesst sich der Baum, ist die Ursprungsformel unerfüllbar ; bleibt er offen, ist sie erfüllbar.

Comment interpréter ces arbres ? Leurs règles de construction correspondent à des règles d'inférence. Dans notre nouveau calcul, la règle d'inférence MP, par exemple, correspondra à l'arbre suivant :



Il est aisé d'interpréter cet arbre de manière sémantique : Une implication peut être vraie de deux manières : parce que son antécédent est faux ou parce que son conséquent est vrai. En présence de "p", cependant, nous pouvons exclure la première possibilité – ce que nous faisons en fermant la branche gauche. Le seul chemin de vérité qui reste contiendra "q" : "q" doit être vraie si "$p \to q$" et "p" le sont.

Voici un autre exemple. Nous commençons par une conjonction de trois phrases complexes, appliquons la règle de conjonction et développons ensuite la disjonction qui est le deuxième conjoint :

$\checkmark \quad (p \to q) \wedge (p \vee r) \wedge (s \wedge \neg q)$

$p \to q$
$\checkmark \quad p \vee r$
$s \wedge \neg q$

$p \qquad r$

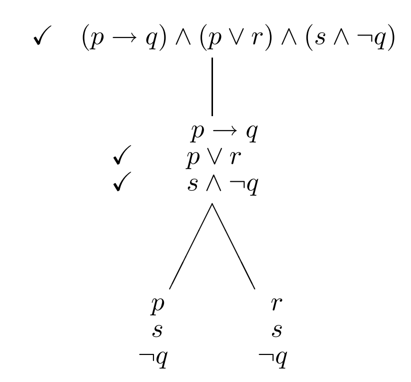
[15] Wir setzen hier die Adäquatheit des Kalküls voraus, die wir erst in zwei Wochen beweisen werden.

Après avoir appliqué une règle à une formule dans une branche, nous la marquons par le signe "✓". Après chaque application de règle, nous déterminons si nous pouvons déjà fermer une branche. Ici nous ne pouvons pas encore le faire.

En voici une interprétation sémantique : Nous avons commencé avec trois formules qui étaient peut-être toutes vraies. Ce que notre arbre nous apprend, c'est que les trois formules pourraient être vraies de deux manières : la première serait que "$p \rightarrow q$", "$s \wedge \neg q$" et "p" soient vrais, et la deuxième que "$p \rightarrow q$", "$s \wedge \neg q$" et "r" soient vraies.

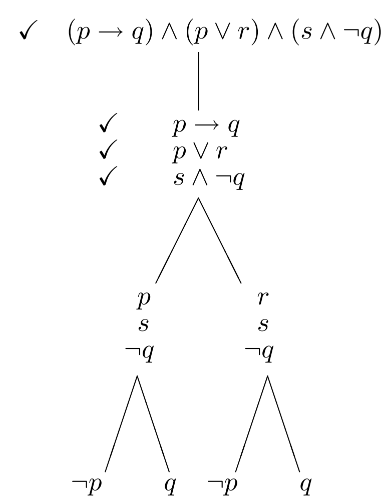
Nous pouvons donner une motivation 'dialogique' à cette interprétation : un arbre représente les choix dialogiques d'un défenseur de la phrase initiale. En défendant la vérité d'une disjonction, par exemple, je peux me contenter de ne défendre que l'un des disjoints ; pour défendre une conjonction, cependant, il faut défendre les deux conjoints etc. Dire qu'une branche se ferme revient à dire que l'argument qui a pris le 'chemin de vérité' correspondant a échoué : la défense n'a pas pu montrer que la phrase initiale pouvait être vraie.

Nous distribuons maintenant la conjonction "$s \wedge \neg q$" sur les branches (et marquons la troisième formule comme 'traitée') :

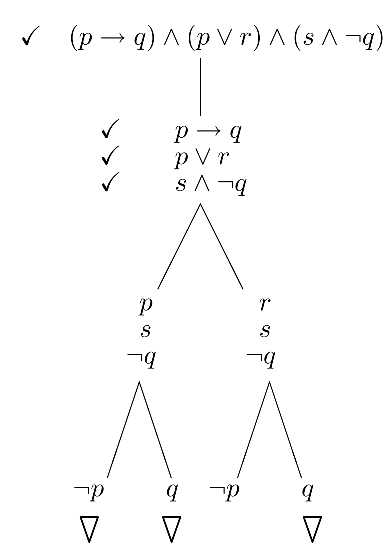


Etant donné que la règle de conjonction nous dit de continuer avec les deux conjoints, il nous faut ajouter "s" et "$\neg q$" dans chacune des deux branches.

Nous vérifions à nouveau si nous pouvons 'fermer' une branche : nous ne le pouvons pas. Nous appliquons maintenant la règle de l'implication à la première de nos trois formules initiales (l'implication est la seule formule complexe qui nous reste, et donc la seule à laquelle nous pouvons appliquer une règle pour développer davantage l'arbre). Cette règle d'implication nous dit d'ouvrir deux nouvelles branches : l'une avec la négation de l'antécédent et l'autre avec le conséquent. Nous obtenons donc :



Cette fois, nous pouvons fermer quelques-unes de nos quatre branches. Celle de gauche contient "$\neg p$" et "p", la deuxième en partant de la gauche "q" et "$\neg q$", et celle qui se trouve tout à droite contient également "q" et "$\neg q$". Nous indiquons le fait qu'une branche ait été fermée par le signe "$\triangledown$" :



A ce stade, nous ne pouvons plus développer le tableau, puisque toutes les formules non-précédées du signe "✓" sont soit des phrases simples, soit des négations de phrases simples, et que les règles dont nous disposons ne s'appliquent qu'à des phrases complexes. Il ne nous reste donc plus rien à faire.

Il est important de se rappeler que la méthode des arbres est une méthode syntaxique : il ne s'agit que de l'application mécanique des règles de construction d'arbres et de fermeture des branches qui contiennent une formule propositionnelle simple avec sa négation. La méthode des arbres nous fournit donc un *test de consistance*. Comme l'arbre d'une phrase correspond à sa clotûre déductive, la phrase intitiale est inconsistante si et seulement si chaque branche de l'arbre se ferme.

5.7 L'interprétation sémantique de la méthode des arbres

Bien que la méthode des arbres soit un *calcul*, donc une méthode purement syntaxique de prouver des théorèmes, son avantage principal réside dans le fait que son interprétation sémantique est facile et naturelle. Par l'adéquation entre la syntaxe et la sémantique de la logique propositionnelle, les théorèmes de correction et de complétude de la méthode des arbres nous permettent de donner une interprétation sémantique aux règles de construction d'arbres.[16]

En effet, le fait que nous ayons fermé trois des quatre branches de l'arbre précédent signifie que ces branches ne représentent pas des manières dont les formules initiales pourraient être vraies ensemble. Elles ne correspondent pas à des interprétations qui rendent vraie la formule initiale.

Le tableau nous montre donc qu'il n'y a qu'une seule manière pour les formules initiales d'être vraies ensemble : il faut que les formules sur la seule branche ouverte soient toutes vraies, en d'autres termes que "r", "s", "$\neg q$" et "$\neg p$" soient vrais. Dans une table de vérité, cette possibilité logique correspondrait

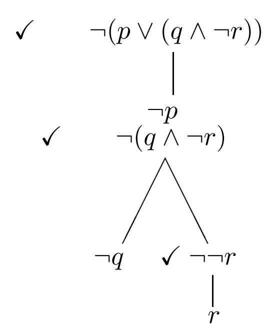
[16] Les théorèmes de correction et de complétude doivent être établi pour chaque calcul syntaxique séparément. Nous n'avons montré la correction que pour HC (p. 91) et avons seulement présupposé la complétude. Nous allons prouver la correction de la méthode des arbres et de la complétude des deux systèmes dans la leçon 7.

à la ligne F-F-V-V du tableau. Cette ligne représente la possibilité logique sous laquelle la formule initiale est vraie – elle décrit le modèle dans lequel elle est vraie.

Si nous avions fermé toutes les branches, nous saurions que la ou les formule(s) initiale(s) ne pouvai(en)t pas être vraie(s) : il s'agissait d'une contradiction (dans le cas d'une proposition) ou d'un ensemble de phrases insatisfaisables.

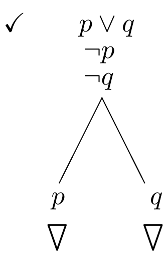
Nous voyons ainsi que la méthode des arbres peut nous servir de test de *satisfaisabilité* : si une des branches reste ouverte, il y a une possibilité logique pour les phrases initiales d'être vraies ensemble et elles forment donc un ensemble satisfaisable (présupposant la complétude et la correction de la méthode des arbres). Puisqu'une phrase est une contradiction si et seulement si sa négation est une tautologie, la méthode des arbres nous sert également de test pour savoir si ou non une phrase est une tautologie. Si toutes les branches de l'arbre *de sa négation* se ferment, alors elle est une tautologie. Si au moins une branche reste ouverte, il y a une possibilité pour sa négation d'être vraie, et donc une possibilité pour elle d'être fausse. Dans ce cas-là, elle n'est pas une tautologie.

Les arbres nous permettent donc de visualiser les conditions de vérité d'une phrase complexe. Examinons un deuxième exemple :



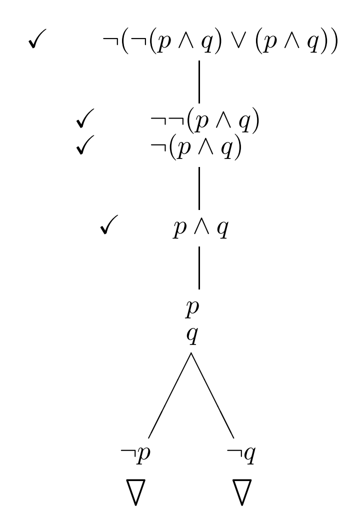
L'application des règles nous permet d'interpréter cet arbre de la façon suivante : "$\neg(p \vee (q \wedge \neg r))$" est vrai si et seulement si, soit "$\neg p$" et "$\neg q$" sont vrais (la branche à gauche), soit "$\neg p$" et "r" sont vrais (la branche à droite). Il y a donc deux 'chemins de vérité' complets dans cet arbre, deux manières pour la phrase complexe d'être vraie.

Considérons l'arbre suivant :



Dans cet arbre, aucun chemin ne reste ouvert : la tentative de trouver une manière dont les phrases initiales peuvent être vraies ensemble échoue – ce qui n'étonne pas, étant donné que la vérité d'une disjonction exclut la fausseté de ses deux disjoints.

Une contradiction est caractérisée par le fait que chacun des chemins de son arbre contient une phrase et aussi sa négation. Autrement dit, toutes ses branches se ferment :



Un des chemins de cet arbre contient "p" et "$\neg p$", l'autre "q" et "$\neg q$".[17]

En tant que méthode syntaxique, la méthode des arbres nous permet de ***prouver*** des phrases : on prouve une phrase en montrant qu'un arbre complet (entièrement développé) ***pour sa négation*** ne contient que des branches fermées. Interprété sémantiquement, le fait que toutes les branches se ferment signifie qu'il n'y a aucune possibilité pour la phrase initiale d'être vraie, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une contradiction. Puisqu'une phrase est une contradiction si et seulement si sa négation est une tautologie, nous avons une méthode pour tester le caractère tautologique d'une proposition. Il suffit de faire l'arbre ***de sa négation*** et de voir si toutes les branches se ferment. Si c'est le cas, la phrase initiale est une tautologie ; sinon, elle ne l'est pas.[18]

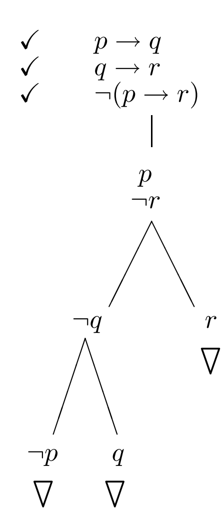
Un arbre dont toutes les branches se ferment est appelé "fermé". Une phrase est donc une tautologie si et seulement si sa négation a un arbre fermé.

Les arbres peuvent donc nous servir de critère lors de la détermination du caractère tautologique ou non-tautologique d'une proposition. Une inférence est valide si et seulement si l'implication matérielle de sa conclusion par (la conjonction de) ses prémisses est une tautologie. Nous pouvons donc également utiliser la méthode des arbres pour tester la validité des inférences. Par exemple, pour tester la validité de l'argument "$p \rightarrow q$; $q \rightarrow r$; donc $p \rightarrow r$" (vérifier si "$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$" est vraie), nous déterminons si la négation de sa conclusion est consistante avec ses prémisses – s'il existe une possibilité logique que les prémisses soient vraies et la conclusion fausse. Si toutes les branches de l'arbre correspondant à cette implication sont fermées, il n'y a aucune interprétation qui rende vraies à la fois toutes les prémisses et la négation de la conclusion car la négation de la conclusion est inconsistante avec les prémisses. En d'autres termes, toute interprétation qui rend vraie l'ensemble des prémisses rend vraie la conclusion. Par conséquent, l'inférence est valide. Nous construisons l'arbre suivant :

---

[17] Selon l'interprétation 'dialogique' de la méthode des arbres, la fermeture d'une branche représente le cul-de-sac dans lequel est tombé un interlocuteur qui a choisi cette stratégie pour défendre sa thèse initiale. S'il n'y a que des culs-de-sac, la thèse ne peut pas être défendue.

[18] J'explique ici une méthode syntaxique en termes sémantiques, présupposant déjà que la méthode des arbres est correcte et complète par rapport à la sémantique de la logique propositionnelle. Nous n'établirons ce résultat que plus tard, dans la leçon 9.



Observant que toutes les branches se ferment, nous concluons qu'il n'y a pas d'interprétation qui rende vraies "$p \to q$", "$q \to r$" et "$\neg(p \to q)$", c'est-à-dire que toute interprétation qui rend vraies "$p \to q$" et "$q \to r$" rend également vraie la conclusion de l'argument, "$(p \to q)$". L'argument suivant est donc valide :

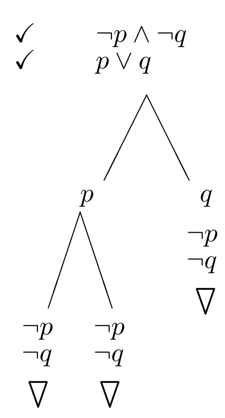
(9) $$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \end{array}}{p \to r}$$

La méthode des arbres est une méthode efficace permettant de déterminer si un énoncé est une tautologie ou non. L'application d'une règle à une formule a pour résultat de ramener le problème à l'application d'autres règles sur des formules plus courtes. Étant donné qu'au point de départ nous avons un nombre fini de phrases qui possèdent chacune un nombre fini de symboles, après un nombre fini d'étapes, l'arbre sera totalement développé et nous pourrons vérifier si tous les chemins se ferment ou non.

Comme test de validité d'un argument, la méthode des arbres a l'avantage supplémentaire de nous procurer une information cruciale dans le cas où le test échoue : la branche qui reste ouverte nous indique de quelle manière on peut construire un contre-exemple, c'est-à-dire quelle est l'interprétation propositionnelle qui rend vraies les prémisses et fausse la conclusion.

Néanmoins, il faut faire des choix : dans l'application des règles à certaines phrases plutôt que d'autres, on risque de compliquer l'arbre et de devoir répéter les mêmes formules sur différents arbres. En général, il est conseillé de toujours traiter d'abord les phrases qui n'ouvrent pas de nouvelles branches, ce qui évite de devoir répéter la même formule dans des branches différentes. L'ordre de l'application des règles, même s'il peut être important d'un point de vue pratique, est immatériel logiquement : si nous obtenons un arbre fermé par un ordre de procédure, tout autre ordre nous donnera également un arbre fermé.

Il est important de ne pas oublier d'introduire les nouvelles formules *sur toutes les branches ouvertes.* Supposons, par exemple, que je commence, en développant l'arbre suivant, par la disjonction. Je dois mettre les conjoints de la conjonction sur toutes les branches successives :



En guise de résumé, on peut dire que la méthode des arbres met à notre disposition trois tests de fort utiles :

- Comme test de *consistance*, elle nous permet d'établir si une phrase ou un ensemble de phrases est ou non consistant et, dans le cas d'une réponse affirmative, elle nous permet de trouver une interprétation pertinente.
- La méthode des arbres nous permet d'établir si une phrase donnée est ou non une *tautologie* : elle l'est si et seulement si les branches de l'arbre de sa négation sont toutes fermées.
- La méthode des arbres nous permet également de tester la *validité* d'un argument, en vérifiant si l'implication correspondante est ou non une tautologie.

Points à retenir

1. Une interprétation propositionnelle atomique attribue des valeurs de vérité aux phrases simples. Elle est la base pour une interprétation propositionnelle qui attribue des valeurs de vérité à toutes les formules du langage $\mathcal{L}$.
2. Une interprétation propositionnelle correspond à une possibilité logique et à une ligne dans une table de vérité.
3. Les notions sémantiques "tautologie", "contradiction", "satisfaisabilité" et "conséquence sémantique" peuvent être définies en termes d'interprétations propositionnelles.
4. Un ensemble de phrases est satisfaisable si et seulement s'il y a une interprétation qui rende vraies toutes les phrases de cet ensemble.
5. Un calcul syntaxique (un calcul axiomatique, un calcul d'arbres ou un calcul de la déduction naturelle) est dit "correct" si tous ses théorèmes sont des tautologies.
6. Un tel calcul est dit "complet" si toute tautologie en est un théorème.
7. La méthode des arbres nous fournit un test de consistance : elle nous permet d'établir si oui ou non un ensemble de phrases est consistant. Si l'ensemble en question est effectivement consistant, elle permet également de trouver une interprétation qui rende vraies toutes les phrases de cet ensemble.
8. Prouver une phrase ϕ par la méthode des arbres revient à montrer que toutes les branches de l'arbre de sa négation $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ se ferment.
9. Puisqu'elle est correcte, la méthode des arbres nous permet également d'établir si une phrase ϕ est ou non une tautologie : elle l'est si et seulement si l'arbre de sa négation $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ ne contient que des branches fermées.
10. La méthode des arbres nous permet également de tester un argument pour sa validité, en vérifiant le caractère tautologique de l'implication correspondante.

Chapitre 6

La déduction naturelle

6.1 Les suppositions

Nous avons rencontré deux manières de construire des preuves :

1. le calcul axiomatique HC, où il faut d'abord trouver les bons axiomes, en faire des substitutions, et enfin appliquer la règle d'inférence MP dans le bon ordre ;
2. la méthode des arbres (ou : la méthode des tableaux analytiques), où l'on décompose successivement la formule initiale en cherchant une interprétation sous laquelle elle est vraie.

La méthode de la réduction à l'absurde, que l'on a introduite comme règle d'introduction de la négation, ne s'insère dans aucune de ces catégories car elle utilise essentiellement la notion de *"supposition"*. Dans la langue naturelle, une supposition est l'énonciation d'une phrase qui manque de force assertoire. Au niveau pragmatique, la force assertoire est ce qui distingue une assertion d'une question ou d'un ordre : c'est en vertu de la force assertoire que quelqu'un qui affirme qu'il pleut s'engage pour la vérité de "il pleut". Si son énonciation manque de force assertoire, on ne peut pas le contredire en disant qu'il ne pleut pas. En effet, il n'a pas affirmé qu'il pleut : il l'a seulement demandé, ordonné ou supposé.

Nous avons dit que la logique s'occupe d'un langage formel, qui fait abstraction de la dimension pragmatique du langage ordinaire. Si nous distinguons la force ou le mode d'un énoncé de son contenu propositionnel et disons que les actes de promettre que p, ordonner que p, prier que p et dire que p impliquent toutes la même phrase "p", ce n'est que de cette proposition, considérée comme étant vraie ou fausse, dont nous nous sommes occupé maintenant. C'est pourquoi on pourrait penser que la logique fait abstraction totale sur tout acte de parole. Nous voyons maintenant que ceci n'est pas entièrement vrai : la distinction entre une affirmation que p et une supposition que p se fait par référence aux différentes 'forces illocutoires' de ces deux actes. Ceux-ci, cependant, resteront les seuls à considérer.

Nous avons déjà fait de nombreuses suppositions tout au long de ce cours. Prenons les exemples suivants :

- "Imaginons que quelqu'un soutienne qu'il ne faut pas manger de la viande. Il pourrait avoir deux types de raisons : ..."
- "Quelqu'un qui affirme que "p" et que "$p \to q$" sont vraies, devrait alors affirmer que q."
- "Tout en étant convaincus que $\neg p$, supposons que p. Il s'ensuit alors que le numéro 2 n'est pas égal a la somme de 1 + 1, ce qui, nous le savons, est faux. La supposition que p était donc fausse. Donc $\neg p$."

– "Si, comme certains l'affirment, il y a un Dieu, alors ce Dieu est omnipotent. S'il est omnipotent, alors il peut créer une pierre si lourde que Lui-même ne peut la soulever. Mais c'est est impossible. Donc il n'y a pas de Dieu."

Dans une preuve par la réduction à l'absurde, il serait absurde de reprocher à celui qui la profère de s'être contredit en démontrant (et donc en affirmant) que la phrase de départ est fausse. Ceci montre que l'on a affaire à une supposition : c'est en supposant "p" et en montrant qu'une contradiction s'ensuit que l'on démontre que $\neg p$.

C'est l'usage des suppositions qui caractérise la méthode de la déduction naturelle que l'on abordera dans cette leçon.[1] La déduction naturelle est une manière intuitive de faire des preuves qui s'apparente bien aux raisonnements d'une argumentation. Parce qu'elle nous permet de prouver des théorèmes et parce que l'on peut démontrer que ses théorèmes sont des tautologies, la déduction naturelle est de même une méthode permettant de calculer la validité des arguments : opérant étape par étape, chacune contenant sa propre règle pour aller des prémisses à des conclusions intermédiaires, nous arrivons à la conclusion finale de l'argument.

Même si l'on ne s'engage pas à la vérité de ce que l'on suppose, on tombe sous une obligation correspondante : celle de tenir compte de ses suppositions. De nombreux raisonnements fallacieux se produisent en prenant une supposition pour un fait établi. C'est pourquoi il faut toujours marquer les suppositions dans la colonne à gauche. Considérons le début d'une preuve que $\neg p$ à partir des trois prémisses "$p \rightarrow q$", "$p \rightarrow (q \rightarrow r)$" et "$\neg r$" :

1	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r$	$\vdash p \rightarrow q$	prémisse
2	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r$	$\vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$	prémisse
3	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r$	$\vdash \neg r$	prémisse
4	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r, p$	$\vdash^* p$	supposition
5	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r, p$	$\vdash^* q$	de (1) et (4) par (MP)
6	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r, p$	$\vdash^* q \rightarrow r$	de (2) et (4) par (MP)
7	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg r, p$	$\vdash^* r$	de (5) et (6) par (MP)

Nous commençons la preuve à la ligne (1) par une énumeration des prémisses : toutes les autres phrases de la preuve seront des conséquences logiques des trois prémisses (1), (2) et (3). Nous introduisons une supposition à la ligne (4). Nous la rajoutons à la colonne gauche et marquons le signe "$\vdash$" pour la relation de déducibilité avec une astérisque : cette astérisque dans $\vdash^*$ nous rappelle que nous n'avons encore rien prouvé sans condition : Les lignes 4 à 7 sont toutes gouvernées par la supposition que p – on a prouvé "r" *sous la supposition que* p (indiqué par l'astérisque dans "$\vdash^*$"). Pour pouvoir dire que l'on a réellement prouvé la vérité d'une certaine proposition, il faut enlever cette supposition et passer de "$\vdash^*$" à "$\vdash$". Comment se défaire d'une supposition ?

Une règle d'inférence qui nous permet d'ôter une supposition est la *réduction à l'absurde*. Considérons la preuve suivante :

1	$p \rightarrow q, q \rightarrow \neg p$	$\vdash p \rightarrow q$	prémisse
2	$p \rightarrow q, q \rightarrow \neg p$	$\vdash q \rightarrow \neg p$	prémisse
3	$p \rightarrow q, q \rightarrow \neg p, p$	$\vdash^* p$	supposition
4	$p \rightarrow q, q \rightarrow \neg p, p$	$\vdash^* q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \rightarrow q, q \rightarrow \neg p, p$	$\vdash^* \neg p$	de (2) et (4) par (MP)
6	$p \rightarrow q, q \rightarrow \neg p$	$\vdash \neg p$	de (3) et (5) par *réduction à l'absurde*

[1] Pour la formulation des règles et quelques exemples, je suivrai largement l'excellente présentation de Lemmon (1965b), qui, lui-même, s'est inspiré de Suppes (1957) et Mates (1965) qui suivaient Fitch (1951).

Nous avons supposé que p, dans la ligne 3, et montré sous cette supposition que $\neg p$ (ligne 5). Nous pouvons donc conclure que $\neg p$ – sans aucune supposition : si la supposition que p nous mène à une contradiction, alors $\neg p$ (ligne 6).

L'introduction des suppositions nous permet de compléter non seulement notre discussion sur la négation, mais également celle sur l'implication matérielle. Nous avons vu que la règle d'élimination pour l'implication matérielle ($\rightarrow$ **E**) était la règle d'inférence *modus ponens* (MP) :

$$\frac{\begin{array}{l}\vdash p \rightarrow q \\ \vdash p\end{array}}{\vdash q} \quad \rightarrow \mathbf{E} \text{ ou MP}$$

Dans la deuxième leçon, nous n'avions pas les ressources suffisantes pour introduire la règle d'introduction correspondante ($\rightarrow$ **I**), celle de la *preuve conditionnelle* (PC) :

$$\frac{\begin{array}{lll} p & \vdash^* & p \\ & \vdots & \\ p & \vdash^* & q \end{array}}{\vdash p \rightarrow q} \quad \rightarrow \mathbf{I} \text{ ou PC}$$

Cette règle nous permet de remplacer une supposition par une implication matérielle : si "q" a été prouvé sous la supposition que p, nous avons prouvé, sous aucune supposition, que $p \rightarrow q$. Avec cette règle à notre disposition, continuons notre preuve que $\neg p$:

7	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r, p$	$\vdash^* \; r$	de (5) et (6) par (MP)
8	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \; p \rightarrow r$	de (4) et (7) par (PC)
9	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \; \neg r \rightarrow \neg p$	de (8) par *conversion*
10	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \; \neg p$	de (3) et (9) par (MP)

Dans la ligne (9), nous avons utilisé une règle d'inférence dérivée, appelée "conversion", dont le schéma est le suivant (cf. p. 90) :

(1) $$\frac{p \rightarrow q}{\neg q \rightarrow \neg p} \quad \text{conversion (CP)}$$

Ce schéma correspond à la tautologie "$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$" et est donc valide. Nous pouvons même économiser encore une autre ligne en utilisant la règle de *modus tollens* (MT) :

3	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \; \neg r$	prémisse
8	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \; p \rightarrow r$	de (4) et (7) par (PC)
10′	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \; \neg p$	de (3) et (8) par (MT)

Nous voyons que dans un calcul de déduction naturelle, il est facile d'introduire des règles d'inférence dérivées (comme nous l'avons fait avec CP, la règle de la conversion). Dans un calcul axiomatique, on aurait été obligé de procéder comme suit :

3	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \; \neg r$	prémisse
8	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \; p \rightarrow r$	de (4) et (7) par (PC)
8a	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \; (p \rightarrow r) \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg p)$	axiome ($\mathbf{H}_{11}$)
8b	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \; \neg r \rightarrow \neg p$	de (8) et (8a) par (MP)
9′	$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg r$	$\vdash \; \neg p$	de (3) et (8b) par (MP)

La nouvelle règle d'inférence (MT) nous permet d'épargner les lignes (8a) et (8b).

6.2 Les règles d'introduction et d'élimination

L'utilisation d'une langue formelle pour la logique propositionnelle nous oblige d'expliquer ce que nous voulons dire par les symboles introduits à ce propos : nous devons fixer leur signification. Une manière sémantique de le faire est de donner des tables de vérité, exploitant ainsi le principe de vérifonctionnalité.

Outre les tables de vérité, il existe une autre méthode qui permet de déterminer la signification des connecteurs propositionnels : les règles d'introduction et d'élimination déterminent le comportement 'inférentiel' de ces connecteurs – ce qui, pour ceux qui conçoivent la logique comme systématisation d'inférences, comprend l'essentiel de leur signification. Complétant notre discussion des connecteurs dans la leçon 2 (p. 37 et suivants), nous postulons les règles suivantes comme règles d'introduction et d'élimination pour les connecteurs propositionnels :

$$\frac{\vdash \ulcorner \phi \to \bot \urcorner}{\vdash \ulcorner \neg\phi \urcorner}\ \neg\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash \ulcorner \neg\neg\phi \urcorner}{\vdash \phi}\ \neg\mathbf{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash \psi \\ \vdash \phi\end{array}}{\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner}\ \wedge\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner}{\vdash \phi}\ \wedge\mathbf{E} \qquad \frac{\vdash \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner}{\vdash \psi}\ \wedge\mathbf{E}$$

$$\frac{\vdash \phi}{\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash \psi}{\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner}\ \vee\mathbf{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdash \ulcorner \neg\phi \urcorner \\ \vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner\end{array}}{\vdash \psi}\ \vee\mathbf{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\phi \vdash^{*} \phi \\ \phi \vdash^{*} \psi\end{array}}{\vdash \ulcorner \phi \to \psi \urcorner}\ \to\mathbf{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdash \phi \\ \vdash \ulcorner \phi \to \psi \urcorner\end{array}}{\vdash \psi}\ \to\mathbf{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdash \ulcorner \psi \to \phi \urcorner \\ \vdash \ulcorner \phi \to \psi \urcorner\end{array}}{\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{I} \qquad \frac{\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner}{\vdash \ulcorner \phi \to \psi \urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{E} \qquad \frac{\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner}{\vdash \ulcorner \psi \to \phi \urcorner}\ \leftrightarrow\mathbf{E}$$

La règle d'introduction pour la négation ($\neg\mathbf{I}$), comme nous l'avons vu à la p. 39,utilise "$\bot$", une abréviation pour n'importe quelle phrase contradictoire.

Ces règles, avec quelques modifications, seront les règles de la déduction naturelle.[2]

Ces règles, comme les règles d'inférence, sont schématiques : la règle ($\neg\mathbf{E}$), par exemple, nous dit que nous pouvons prouver une phrase "p" à partir de sa double négation "$\neg\neg p$" (et que nous pouvons également prouver "$p \wedge q$" à partir de "$\neg\neg(p \wedge q)$", "$(p \to q) \vee r$" à partir de "$\neg\neg((p \to q) \vee r)$" etc).

Il est important de noter que ces règles reviennent à une spécification syntaxique des connecteurs propositionnels (puisqu'on n'a pas encore prouvé la validité de ces règles). Comment est-ce possible ? Pour donner une 'spécification syntaxique' de la signification d'un connecteur, nous formulons des règles qui permettent de manipuler des formules qui le contiennent. Nous déterminons ainsi le comportement inférentiel de ce connecteur, en lui donnant une ***définition implicite*** : quelle que soit la

[2] On fera une modification pour la règle d'introduction de la négation : la règle $\neg\mathbf{I}$ sera remplacée par les règles de modus tollens MT et de la réduction à l'absurde RAA. Une modification correspondante s'appliquera à la règle d'élimination de la disjonction $\vee\mathbf{E}$.

signification de "$\wedge$", elle est telle qu'elle permet l'introduction de ce signe selon la règle $\wedge$**I**.[3]

Il existe différentes façons de fournir une définition implicite des connecteurs propositionnels : par un système d'axiomes comme l'est le calcul HC, par des règles de construction d'arbres et également par des règles d'élimination et d'introduction. Ces dernières sont de loin les plus intuitives et c'est sur elles que la méthode de la déduction naturelle est basée.

6.3 Les règles de la déduction naturelle

Nous avons déjà montré qu'il y a des théor'mes du calcul axiomatique qui correspondent à des règles d'inférences de la déduction naturelle : la règle dérivée de conversion CP, par exemple, correspond au théorème "$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$" de HC. Il s'agit d'un phénomène général : normalement, les calculs axiomatiques consistent en de nombreux axiomes et une seule règle d'inférence – modus ponens (MP). Les calculs de la déduction naturelle – comme celui de la méthode des arbres – n'ont pas d'axiomes, mais de nombreuses règles d'inférences pour déduire des théorèmes à partir des prémisses. Nous allons discuter maintenant de quelques règles d'inférences en détail. Prises ensemble, ces règles nous permettent de démontrer toute tautologie de la logique propositionnelle : elles forment un calcul correct et complet par rapport à la sémantique donnée de la logique propositionnelle.

La règle des suppositions

A n'importe quel stade de la preuve, nous avons le droit d'introduire une supposition, à condition que nous la marquions dans la deuxième colonne à partir de la gauche :

n	ϕ	$\vdash^* \phi$	supposition

Modus ponens (modus ponendo ponens)

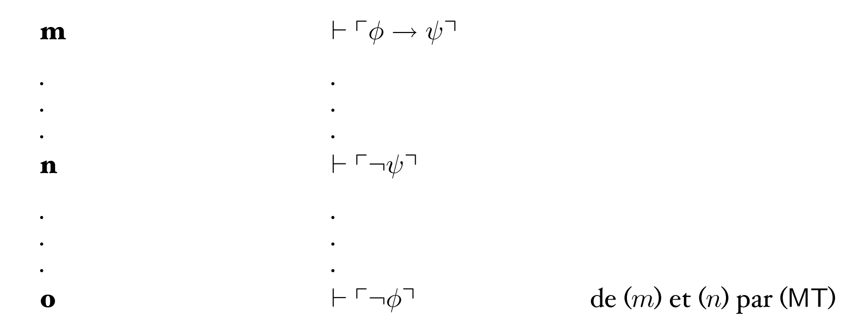
La règle de modus ponens (abrégée '(MP)' ou '($\rightarrow$ **E**)') nous permet de passer d'une implication matérielle et de son antécédent à son conséquent :

m	$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \phi$	
.	.	
.	.	
.	.	
o	$\vdash \psi$	de (m) et (n) par (MP)

[3]Une définition explicite en revanche, consiste en des conditions nécessaires et suffisantes d'une paraphrase (cf. p. 66) : elle permet de re-écrire tout contexte contenant la nouvelle expression définie en n'utilisant que les expressions qui ont servi à sa définition – le definiens est universellement substituable pour le definiendum.

Modus tollens (modus tollendo tollens)

La règle de modus tollens (abrégée '(MT)') nous permet de passer d'une implication matérielle et de la négation de son conséquent à la négation de son antécédent :



m	$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner\neg\psi\urcorner$	
⋮	⋮	
o	$\vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$	de (m) et (n) par (MT)

La règle de modus tollens remplace la règle de conversion. Si on a prouvé "$p \rightarrow q$" et "$\neg q$", la conversion de la première nous donne "$\neg q \rightarrow \neg p$" et "$\neg p$" s'ensuit par (MP). Avec (MT), nous pouvons en déduire "$\neg p$" sans aucune étape intermédiaire.

Preuve conditionnelle

La règle de la preuve conditionnelle (abrégée "($\rightarrow$ **I**)" ou "(PC)") nous permet de transformer une sous-preuve (une preuve gouvernée par une supposition) en une preuve d'une implication matérielle ; elle nous permet de déduire une implication si et seulement s'il est possible de prouver par d'autres moyens que le conséquent de l'implication peut être dérivé de son antécédent.

m	ϕ	$\vdash^* \phi$	supposition
⋮		⋮	
n	ϕ	$\vdash^* \psi$	
⋮		⋮	
o		$\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	de (m) et (n) par (PC)

Dans la ligne (o), nous *déchargeons* la supposition ϕ par laquelle nous avons commencé la sous-preuve de (m) à (n) et nous *conditionalisons* le résultat intermédiaire ψ qui était gouverné par la supposition ϕ.

L'introduction et l'élimination de la double négation

La règle de l'élimination de la double négation (($\neg$**E**) ou (DN)) est la suivante :

m	$\vdash \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \phi$	de (m) par (DN)

De la même manière, nous pouvons introduire une double négation (par exemple pour une application éventuelle de (MT)) :

m	$\vdash \phi$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	de (m) par (DN)

La réduction à l'absurde (reductio ad absurdum)

La règle de la réduction à l'absurde ((RAA) ou ($\neg$**I**)) nous permet de convertir une sous-preuve particulière (qui part de la supposition que p et qui en dérive une contradiction) en une preuve que $\neg p$:

m	ϕ	$\vdash^* \ \phi$	supposition
.		.	
.		.	
.		.	
n	ϕ	$\vdash^* \ \psi$	
.		.	
.		.	
.		.	
o	ϕ	$\vdash^* \ \ulcorner\neg\psi\urcorner$	
.		.	
.		.	
.		.	
p		$\vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$	de (m), (n) et (o) par (RAA)

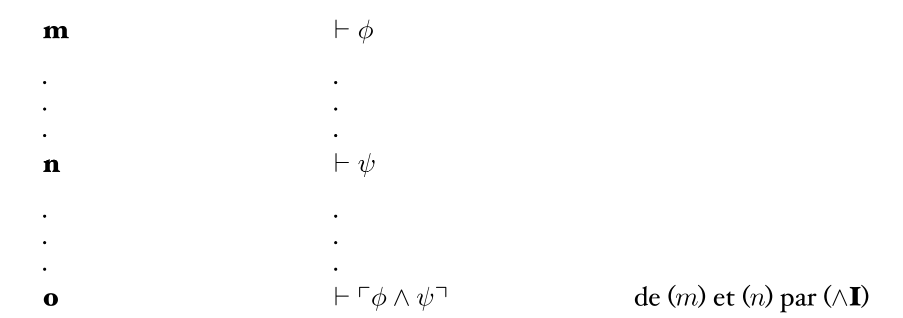
Sous la supposition ϕ (ligne m), nous avons démontré ψ (ligne n) et $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ (ligne o). Or ψ et $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ ne peuvent pas être vraies ensemble. Nous pouvons donc conclure que la supposition initiale ϕ était fausse et écrire $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ à la ligne p. Nous avons 'réduit à l'absurde' la supposition ϕ et donc prouvé sa négation.

D'après cette règle, si votre interlocuteur pose une hypothèse ("p") dont on peut prouver qu'elle nous mène à une contradiction ("$q \wedge \neg q$"), alors cette hypothèse doit être rejetée et sa négation "$\neg p$" peut être affirmée.[4]

[4] Ce contraste entre la *permission* d'affirmer une conséquence logique de ce qu'on a affirmé auparavant et l'*interdiction* d'en affirmer la négation a déjà été constaté à la p. 95.

L'introduction et l'élimination de la conjonction

La règle d'introduction de la conjonction ($\wedge$**I**) nous permet d'inférer "$p \wedge q$" si on a déjà prouvé que p et que q :



m	$\vdash \phi$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \psi$	
⋮	⋮	
o	$\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	de (m) et (n) par ($\wedge$**I**)

L'élimination de la conjonction se fait en inférant un des conjoints de la phrase conjonctive :

m	$\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \phi$	de (m) par ($\wedge$**E**)

m	$\vdash \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \psi$	de (m) par ($\wedge$**E**)

L'introduction et l'élimination de la disjonction

Les règles d'introduction de la disjonction sont 'duales' aux règles d'élimination de la conjonction :[5]

m	$\vdash \phi$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	de (m) par ($\vee$**I**)

m	$\vdash \psi$	
⋮	⋮	
n	$\vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	de (m) par ($\vee$**I**)

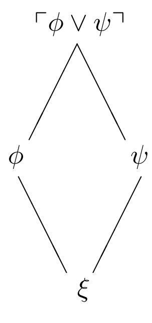
Si Louis XVI a été guillotiné, alors soit il a été guillotiné, soit il a été pendu. Cette phrase est vraie, même si l'on sait très bien qu'il n'a pas été pendu.

[5]Nous appelons "duale" la transformation d'une conjonction en une disjonction niée ou d'une disjonction en une conjonction niée, suivant les lois de Morgan.

L'élimination de la disjonction est un peu plus complexe et présuppose la règle des suppositions. Considérons le schéma de preuve suivant :

m		$\vdash \ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$	
. . .		. . .	
n	ϕ	$\vdash^* \phi$	supposition
. . .		. . .	
o	ϕ	$\vdash^* \chi$	
. . .		. . .	
p	ψ	$\vdash^* \psi$	supposition
. . .		. . .	
q	ψ	$\vdash^* \chi$	
. . .		. . .	
r		$\vdash \chi$	de (m), (n), (o), (p) et (q) par ($\vee$**E**)

L'idée qui motive cette règle d'inférence est la suivante : si une disjonction "$p \vee q$" a été établie, et qu'on montre que de "p" il s'ensuit "r", et que de "q" il s'ensuit également "r" ; alors, de la disjonction "$p \vee q$", il s'ensuit que r. Si nous avons, à la ligne **m**, prouvé la disjonction, on a prouvé que r. Ce qui s'ensuit à la fois des deux disjoints s'ensuit de la disjonction même. Nous pouvons donner une interprétation graphique de ($\vee$**E**) comme suit :



Si je veux rejoindre mon ami et je sais qu'il est soit à l'université, soit en ville, mais si je sais également que s'il est à l'université, il sera à la fête de Maurice et aussi que s'il est en ville, il sera également à la fête de Maurice, alors je sais qu'il sera à la fête de Maurice – mon ignorance concernant la question lequel des disjoints rend vraie la disjonction est 'annulée' par mon savoir que dans les deux cas, il sera à la fête.

L'introduction et l'élimination de l'équivalence matérielle

Puisque l'équivalence matérielle est simplement l'implication matérielle 'réciproque', on a comme règle d'introduction :

m	$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
o	$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	de (m) et (n) par ($\leftrightarrow$ **I**)

Les règles d'élimination nous montrent que l'équivalence est simplement la conjonction des deux implications matérielles :

m	$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$	de (m) par ($\leftrightarrow$ **E**)

m	$\vdash \ulcorner \phi \leftrightarrow \psi \urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner \psi \rightarrow \phi \urcorner$	de (m) par ($\leftrightarrow$ **E**)

6.4 Les preuves par déduction naturelle

Mis à part l'usage des suppositions, une deuxième caractéristique de la méthode de la déduction naturelle est qu'elle nous permet d'incorporer des *prémisses*. Dans un calcul axiomatique, il faut distinguer ce qui est dérivable tout court (les théorèmes) de ce qui est dérivable d'une théorie. Les théories, dans les calculs axiomatiques, jouent un rôle comparable à celui des prémisses dans la déduction naturelle. On marquera les prémisses dans la deuxième colonne à gauche, avec les suppositions. Contrairement aux suppositions il ne faut pas les supprimer pour obtenir une preuve : la preuve elle-même sera 'conditionnelle' : on montrera qu'une certaine phrase (la conclusion) *peut être dérivée à partir de* certaines autres (les prémisses). Toutes nos règles sauf PC et RAA présupposent que l'on ait déjà démontré une ou plusieurs phrases et nous servent donc à établir des phrases à partir de certaines prémisses.

L'usage des prémisses nous permet d'éviter des substitutions. Pour montrer, par exemple, la commutativité de la conjonction, une simple preuve de quatre lignes nous suffit :

1	$p \wedge q$	$\vdash p \wedge q$	prémisse
2	$p \wedge q$	$\vdash p$	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$p \wedge q$	$\vdash q$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$p \wedge q$	$\vdash q \wedge p$	de (2) et (3) par ($\wedge$**I**)

On remarque, cependant, que mêmes les prémisses doivent être introduites dans la preuve.

PC et RAA nous permettent de démontrer des tautologies, c'est-à-dire des phrases dont les preuves ne nécessitent pas de prémisses. Pour démontrer "$\vdash p \rightarrow p$", par exemple, nous procédons comme suit :

1	p	$\vdash^* \ p$	supposition
2	p	$\vdash^* \ p$	de (1)
3		$\vdash p \rightarrow p$	de (1) et (2) par (PC)

Dans la colonne de gauche, on énumère les lignes ; dans la deuxième, on met des prémisses (qu'il n'y a pas dans cet exemple) et des suppositions ; dans la troisième, soit "$\vdash^*$" (si on est en train de démontrer une phrase sous une supposition), soit "$\vdash$" (si on n'a pas fait de supposition ou éliminé toutes celles que l'on a faites) ; dans la quatrième colonne, la phrase principale ; dans la cinquième, la manière dont on est arrivé à la phrase principale : s'il s'agit d'une prémisse, d'une supposition ou de la conclusion d'une règle d'inférence.

Si on a des prémisses, on commence par les incorporer dans la preuve. Supposons que nous voulions prouver "$p \rightarrow r$" à partir des deux phrases "$p \rightarrow q$" et "$q \rightarrow r$". Nous commençons avec l'énonciation de ces prémisses comme suit :

1	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$	$\vdash \ p \rightarrow q$	prémisse
2	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$	$\vdash \ q \rightarrow r$	prémisse

Cette règle correspond au fait que l'on a, dans un calcul axiomatique, $\mathsf{HC} \cup \mathsf{Th} \vdash \phi$ pour toute formule $\phi \in \mathsf{Th}$ (cf. def. 9 à la p. 79). Puisque que nous cherchons à établir une conclusion conditionnelle (à savoir "$p \rightarrow r$"), nous supposons son antécédent :

1	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$	$\vdash \ p \rightarrow q$	prémisse
2	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$	$\vdash \ q \rightarrow r$	prémisse
3	$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p$	$\vdash^* \ p$	supposition

Cette supposition nous permet d'appliquer (MP) : nous obtenons ainsi "q" – ce qui, avec la deuxième prémisse, nous permet la dérivation de "r" :

1	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$	$\vdash \ p \rightarrow q$	prémisse
2	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$	$\vdash \ q \rightarrow r$	prémisse
3	$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p$	$\vdash^* \ p$	supposition
4	$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p$	$\vdash^* \ q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p$	$\vdash^* \ r$	de (2) et (4) par (MP)

En appliquant de la règle de la preuve conditionnelle, nous avons établi notre conclusion sous aucune supposition à partir des deux prémisses originales :

1	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$	$\vdash \ p \rightarrow q$	prémisse
2	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$	$\vdash \ q \rightarrow r$	prémisse
3	$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p$	$\vdash^* \ p$	supposition
4	$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p$	$\vdash^* \ q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p$	$\vdash^* \ r$	de (2) et (4) par (MP)
6	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$	$\vdash \ p \rightarrow r$	de (3) et (5) avec (PC)

La dernière ligne nous assure maintenant que l'on peut prouver "$p \rightarrow r$" des deux prémisses "$p \rightarrow q$" et "$q \rightarrow r$".

Examinons une preuve qui utilise la règle de la réduction à l'absurde et essayons de déduire "$\neg(p \wedge q)$" à partir de "$p \rightarrow \neg q$". Nous commençons par l'énonciation de la prémisse et supposons la négation de la conclusion désirée :

1	$p \rightarrow \neg q$	$\vdash\ p \rightarrow \neg q$	prémisse
2	$p \rightarrow \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ p \wedge q$	supposition

Sous cette supposition, nous cherchons à déduire une contradiction : (RAA) nous permettra alors de conclure que la supposition est fausse et que par conséquent sa négation est vraie :

1	$p \rightarrow \neg q$	$\vdash\ p \rightarrow \neg q$	prémisse
2	$p \rightarrow \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ p \wedge q$	supposition
3	$p \rightarrow \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ p$	de (2) par ($\wedge$**E**)
4	$p \rightarrow \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ \neg q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \rightarrow \neg q, p \wedge q$	$\vdash^*\ q$	de (2) par ($\wedge$**E**)
6	$p \rightarrow \neg q$	$\vdash\ \neg(p \wedge q)$	de (2), (4) et (5) par (RAA)

Il est souvent crucial de bien se servir de la règle des suppositions : elle nous permet de 'sortir' l'information que contiennent les prémisses. Pour pouvoir utiliser, par exemple, "$q \rightarrow r$" dans une preuve qui a "$p \rightarrow (q \rightarrow r)$" comme prémisse, on suppose "p". Le choix des règles est non seulement motivé par les prémisses qui sont à notre disposition, mais également par la conclusion désirée : si la conclusion désirée a par exemple la forme d'une implication, on se servira de la règle de la preuve conditionnelle (PC). Dans le cas où la conclusion est une phrase simple ou une négation, on utilisera la réduction à l'absurde (RAA).

La règle de supposition nous permet de 'conditionaliser' n'importe quelle ligne de notre preuve : si on a prouvé que q, par exemple, il suffit de supposer "p" pour dériver "$p \rightarrow q$" par la règle (PC). Il est donc aussi possible d'utiliser la même phrase plusieurs fois, par exemple pour prouver "$p \rightarrow (p \rightarrow q)$" à partir de "$q$" :

1	q	$\vdash\ q$	prémisse
2	q, p	$\vdash^*\ p$	supposition
3	q	$\vdash\ p \rightarrow q$	de (1) et (2) par (PC)
5	q	$\vdash\ p \rightarrow (p \rightarrow q)$	de (3) et (2) par (PC)

La règle d'élimination d'une disjonction ($\vee$**E**) semble un peu compliquée, mais correspond à un principe de raisonnement naturel. A partir d'une prémisse disjonctive, on peut démontrer n'importe quelle phrase dont la vérité ne dépend pas de notre choix du disjoint : même si nous ignorons quel disjoint est vrai, nous pouvons dans tous les cas être certain d'une phrase qui s'ensuit des deux. Si je sais que Marie fait sa fête aujourd'hui ou demain, mais que, de toute façon, je ne serai pas invité, alors je sais que je ne serai pas invité. Si vous êtes d'accord que soit il pleut, soit il fait beau et que, s'il pleut, nous n'allons pas faire de sport aujourd'hui et que, s'il fait beau, il fait trop chaud et donc nous n'allons pas faire de sport aujourd'hui, alors on est d'accord que nous ne ferons pas de sport aujourd'hui. En

utilisant la règle (∨**E**), nous démontrons la commutativité de la disjonction comme suit :

1	$p \vee q$	$\vdash\ p \vee q$	prémisse
2	$p \vee q, p$	$\vdash^*\ p$	supposition
3	$p \vee q, p$	$\vdash^*\ q \vee p$	de (2) par (∨**I**)
4	$p \vee q, q$	$\vdash^*\ q$	supposition
5	$p \vee q, q$	$\vdash^*\ q \vee p$	de (4) par (∨**I**)
6	$p \vee q$	$\vdash\ q \vee p$	de (1,2,3,4,5) par (∨**E**)

Ce dernier exemple nous montre comment nous servir de la règle (RAA) pour établir une conclusion positive :

1	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash\ \neg(\neg p \wedge \neg q)$	prémisse
2	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^*\ \neg(p \vee q)$	supposition
3	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), p$	$\vdash^*\ p$	supposition
4	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), p$	$\vdash^*\ p \vee q$	de (3) par (∨**I**)
5	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), p$	$\vdash^*\ \neg(p \vee q)$	de (2)
6	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^*\ \neg p$	de (3), (4) et (5) par (RAA)
7	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), q$	$\vdash^*\ q$	supposition
8	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), q$	$\vdash^*\ p \vee q$	de (6) par (∨**I**)
9	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q), q$	$\vdash^*\ \neg(p \vee q)$	de (2)
10	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^*\ \neg q$	de (7), (8) et (9) par (RAA)
11	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^*\ \neg p \wedge \neg q$	de (5) et (8) par (∧**I**)
12	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg(p \vee q)$	$\vdash^*\ \neg(\neg p \wedge \neg q)$	de (1)
13	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash\ \neg\neg(p \vee q)$	de (2), (11) et (12) par (RAA)
14	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\vdash\ p \vee q$	de (13) par (DN)

Nous répétons la ligne (2) aux lignes (5) et (9) et la ligne (1) à la ligne (12) pour permettre des applications de (RAA) à des lignes qui partagent leurs supposition : ceci est permis parce que ce qui est prouvé sans supposition reste prouvé même si nous ajoutons d'autres suppositions. La double application de (RAA) aux disjonctions introduits aux lignes (4) et (11) nous permet de déduire une contradiction à la supposition de la négation de la conclusion voulue. Nous omettrons cette complication dans les preuves qui suivent.

6.5 Une heuristique pour la déduction naturelle

La déduction naturelle est une méthode beaucoup moins 'mécanique' que la méthode des arbres ; elle est, cependant, plus intuitive que le calcul axiomatique HC. Surtout avec des règles dérivées, elle correspond assez bien à notre manière 'naturelle' de raisonner, Il est peut-être utile, cependant, de mentionner quelques conseils pratiques.[6]

Essayez de 'faire sortir' le contenu de ce que vous avez déjà démontré. Si vous avez des prémisses ou des phrases déjà démontrées de la forme $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$, utilisez (∧**E**). Si vous avez des prémisses ou des phrases déjà démontrées de la forme $\ulcorner \phi \vee \psi \urcorner$, essayez de prouver la conclusion à partir de ϕ et à partir de ψ et utilisez (∨**E**). S'il y a une prémisse ou une phrases déjà démontrée de la forme $\ulcorner \neg(\phi \vee \psi) \urcorner$, essayez de prouver ϕ ou de prouver ψ et utilisez (∨**I**) pour obtenir une contradiction.

Essayez de 'simplifier' le plus possible. S'il y a deux prémisses ou des phrases déjà démontrées de la

[6] Je suis ici d'assez près Lepage (2001: 149).

forme ϕ, $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$, utilisez (MP). S'il y a deux prémisses ou des phrases déjà démontrées de la forme $\ulcorner\neg\psi\urcorner$, $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$, utilisez (MT).

Laissez-vous guider par la forme de la conclusion envisagée. Si elle a la forme d'une implication $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$, supposez que ϕ, prouvez que ψ et utilisez (PC). Si elle a la forme $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$, prouvez que ϕ, prouvez que ψ et utilisez ($\wedge$**I**).

Utilisez (RAA) pour obtenir des conclusion négatives ou atomiques. Si la forme $\ulcorner\neg\phi\urcorner$, supposez que ϕ, prouvez, sous cette supposition, que ψ et que $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et utilisez (RAA). Si vous voulez prouver "p", supposez "$\neg p$", prouvez, sous cette supposition, que ψ et que $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et utilisez (RAA).

Attention avec les disjonctions ! Si la conclusion a la forme $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$, il y a trois possibilités :

(i) essayez de prouver ϕ,
(ii) essayez de prouver ψ ou
(iii) essayez de réduire $\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$ à l'absurde.

La méthode de la déduction naturelle consiste essentiellement en les douze règles suivantes :

supposition : je peux supposer ce que je veux (si j'en tiens compte par la suite)
MP : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et aussi "p", je peux écrire "q".
MT : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et aussi "$\neg q$", je peux écrire "$\neg p$".
PC : si j'ai supposé "p" et montré ensuite"q", je peux écrire "$p \rightarrow q$".
DN : si j'ai déjà "$\neg\neg p$", je peux écrire "p" ; si j'ai déjà "p", je peux écrire "$\neg\neg p$".
RAA : si j'ai supposé "p" et montré qu'il s'ensuit "q" et aussi "$\neg q$", je peux écrire "$\neg p$".
$\wedge$**I** : si j'ai déjà "p" et "q", je peux écrire "$p \wedge q$".
$\wedge$**E** : si j'ai déjà "$p \wedge q$", je peux écrire "p" et aussi écrire "q".
$\vee$**I** : si j'ai déjà "p", je peux écrire "$p \vee q$" ; si j'ai déjà "q", je peux écrire "$p \vee q$".
$\vee$**E** : si j'ai montré "$p \vee q$" et que "r" s'ensuit de "p" et que "r" s'ensuit de "q", je peux écrire "r".
$\leftrightarrow$ **I** : si j'ai déjà "$p \rightarrow q$" et "$q \rightarrow p$", je peux écrire "$p \leftrightarrow q$".
$\leftrightarrow$ **E** : si j'ai déjà "$p \leftrightarrow q$", je peux écrire "$p \rightarrow q$" et aussi écrire "$q \rightarrow p$".

Ces règles nous disent comment nous pouvons manipuler des séquences de symboles de la forme "$\phi \vdash \psi$", en composant une preuve d'un certain théorème ("$\vdash \chi$") ou d'une phrase à partir de quelques prémisses ("$\zeta \vdash \chi$"). Il est important de noter que ces règles nous donnent que des permissions. Elles ne nous obligent à rien. La seule 'obligation' dont on peut parler en logique est celle d'éviter des erreurs dans l'application des règles données. Les règles elles-mêmes nous donnent la permission de passer de certaines phrases à certaines autres.

C'est en ce sens-là que la logique ne s'occupe pas de vérités, mais de connexions, surtout de connexions inférentielles, entre des phrases. Elle ne se préoccupe pas de savoir comment est le monde, mais cherche à déterminer comment il peut ou doit être à partir d'autres phrase dont la vérité est considérée comme acquise. Par conséquent, l'usage des suppositions n'est pas seulement important pour la déduction naturelle, mais il est essentiel à la nature-même de la logique.

6.6 Une notation en termes de déductibilité

Nous verrons à p. 126 du chapitre 7 que nous pouvons prouver ψ à partir de ϕ ($\phi \vdash \psi$) si et seulement si nous pouvons prouver l'implication de ψ par ϕ : $\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$.

Même en présence d'un tel "théorème de déduction", il est important de distinguer les conclusions

conditionnelles des théorèmes. Une conclusion conditionnelle a la forme suivante :

(2) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$

La conclusion ψ est 'conditionnelle' parce qu'elle dépend des prémisses $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$. Nous appellerons toute expression de la forme (2) un *"séquent"*. Un séquent est un schéma d'une inférence ; (2) dit qu'à partir des prémisses $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n$, on peut déduire ψ. Un théorème, cependant, est un séquent qui manque de prémisses :

(3) $\vdash \psi$

(3) dit que ψ peut être prouvé sans aucune prémisse et que, par conséquent, ψ est un théorème. Ce sont des théorèmes qui, en premier lieu, sont appelés "(logiquement) vrais" ou "(logiquement) faux" et les séquents qui sont proprement dits "valides" ou "invalides". Notre test sémantique de validité correspond donc maintenant à un test syntaxique de déductibilité. Nous avons dit qu'un argument de la forme "p ; q ; r ; donc s" est valide si et seulement si l'implication matérielle correspondante "$(p \wedge q \wedge r) \rightarrow s$" est une tautologie. Étant donné le théorème de déduction, ceci revient à dire qu'un séquent "$\phi \vdash \psi$" peut être prouvé si et seulement si l'implication correspondante est un théorème : $\vdash \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$.

6.7 Les règles dérivées

Un avantage majeur de la méthode de la déduction naturelle est l'usage des règles dérivées. Examinons un exemple :

Au lieu de ($\vee$**E**), nous aurions aussi pu choisir le syllogisme disjonctif (SD) pour éliminer la disjonction "$\vee$" d'une formule :

m	$\vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
o	$\vdash \psi$	de (m) et (n) par (SD)

m	$\vdash \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner\neg\psi\urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
o	$\vdash \phi$	de (m) et (n) par (SD)

Le syllogisme disjonctif correspond à un cas spécial de la règle ($\vee$**E**). Voici comment nous déduisons

un cas particulier du syllogisme disjonctif, à savoir “$\neg p, p \vee q \vdash q$”.

1	$\neg p, p \vee q$	$\vdash$	$\neg p$	prémisse
2	$\neg p, p \vee q$	$\vdash$	$p \vee q$	prémisse
3	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	$\neg p \vee q$	de (1) par ($\vee$**I**)
5	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge \neg q$	$\vdash^*$	$p \wedge \neg q$	supposition
6	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge \neg q, \neg p$	$\vdash^*$	$\neg p$	supposition
7	$\neg p, p \vee q, p, \neg p$	$\vdash^*$	$\neg(p \wedge \neg q)$	de (5), (3) et (6) par (RAA)
8	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge \neg q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
9	$\neg p, p \vee q, p, p \wedge \neg q, q$	$\vdash^*$	$\neg q$	de (5) par ($\wedge$**E**)
10	$\neg p, p \vee q, p, q$	$\vdash^*$	$\neg(p \wedge \neg q)$	de (5), (8) et (9) par (RAA)
11	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	$\neg(p \wedge \neg q)$	de (4, 6, 7, 8, 10) par ($\vee$**E**)
12	$\neg p, p \vee q, p, p$	$\vdash^*$	p	supposition
13	$\neg p, p \vee q, p, p, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition
14	$\neg p, p \vee q, p, p, \neg q$	$\vdash^*$	$p \wedge \neg q$	de (12) et (13) par ($\wedge$**I**)
15	$\neg p, p \vee q, p, p$	$\vdash^*$	$\neg\neg q$	de (13), (14) et (11) par (RAA)
16	$\neg p, p \vee q, p, p$	$\vdash^*$	q	de (15) par (DN)
17	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	$p \rightarrow q$	de (12) et (16) par (PC)
18	$\neg p, p \vee q, p$	$\vdash^*$	q	de (3) et (17) par (MP)
19	$\neg p, p \vee q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
20	$\neg p, p \vee q$	$\vdash$	q	de (2, 3, 18, 19, 19) par ($\vee$**E**)

On remarquera que les preuves par la déduction naturelle ne sont pas forcément simples. Étant donné cet effort, il serait légitime d’espérer pouvoir réutiliser un résultat prouvé, c’est-à-dire avoir à notre disposition la règle dérivée du syllogisme disjonctif en toute généralité. Nous prouverons un méta-théorème qui nous donne le droit de procéder ainsi.

Avant cela, il est nécessaire de définir ce qu’est une instance de substitution :

Définition 22 (Instance de substitution)**.** *Si ϕ est une formule bien formée de $\mathcal{L}$, ϕ' est une instance de substitution de ϕ si et seulement si ϕ' est le résultat d’une substitution uniforme d’une ou de plusieurs phrases dans ϕ par d’autres phrases. Un séquent “$\phi' \vdash \psi'$” est une instance de substitution d’un autre séquent “$\phi \vdash \psi$” si et seulement si ϕ' et ψ' résultent de ϕ et ψ par une substitution uniforme d’une ou de plusieurs phrases dans ϕ ou dans ψ par d’autres phrases.*

Une substitution uniforme d’une expression dans une autre est le remplacement de l’une par l’autre *à toutes ses occurrences* : si nous nous décidons de remplacer “$\neg p$” par “q”, par exemple, nous devons remplacer l’un par l’autre *à tous les endroits* où le premier se trouve.

Parmi les instances de substitution de “$p \vee \neg p$”, par exemple, on trouve les suivants :

1. “$q \vee \neg q$”,
2. “$(q \rightarrow r) \vee \neg(q \rightarrow r)$”,
3. “$(p \wedge \neg p) \vee \neg(p \wedge \neg p)$” etc.

“$(r \vee s) \rightarrow (p \vee \neg(\neg(r \vee s) \wedge p))$” est une instance de substitution de “$p \rightarrow (q \vee \neg(\neg p \wedge q))$” (substituant “$(r \vee s)$” à “$p$” et “$p$” à “$q$”) et “$p \rightarrow (q \wedge r \rightarrow \neg s), p, \neg\neg s \vdash \neg(q \wedge r)$” est une instance de substitution de “$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$” (substituant “$(q \wedge r)$” à “$q$” et “$\neg s$” à “$r$”), même si “$\neg s \rightarrow q \vee \neg(s \wedge q)$” ne l’est pas (puisque “$\neg s$” remplace “p” et “s” remplace “$\neg p$” et la substitution n’est donc pas uniforme).

Voici le méta-théorème qui nous donne droit aux règles d’inférence dérivées :

Théorème 23 (Substituabilité)**.** *Si ϕ est un théorème de la déduction naturelle, toute instance de sub-*

stitution de ϕ peut être prouvée. Si $\ulcorner\phi \vdash \psi\urcorner$ est un séquent prouvé, toute instance de substitution de $\ulcorner\phi \vdash \psi\urcorner$ peut être prouvée.

Preuve Il est évident que les règles d'inférence appliquées ne concernent que cette partie de la structure de ϕ et de ψ qui reste invariables sous la substitution. La preuve originale du théorème ou du séquent peut, par conséquent, être transformée en une preuve de son instance de substitution. □

Grâce à ce théorème, nous pouvons désormais utiliser la règle du syllogisme disjonctif comme règle dérivée : Chaque fois que nous avons

m	$p \vee q, \neg p$	$\vdash r$	

ou une instance de substitution de ce séquent, nous pouvons écrire pour la ligne suivante :

n	$p \vee q, \neg p$	$\vdash q$	de (m) par (SD)

La même chose vaut pour la conversion : comme suite de

o	$p \rightarrow q$	$\vdash r$	

ou d'une instance de substitution de ce séquent, nous pouvons écrire :

p	$p \rightarrow q$	$\vdash \neg q \rightarrow \neg p$	de (p) par (CP)

puisque "$p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$" peut être prouvé.

Une autre règle dérivée utile est l'application des lois de Morgan, dont nous prouvons un cas particulier comme suit :

1	$\neg(p \wedge q)$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	prémisse
2	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	supposition
3	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg p$	$\vdash^*$	$\neg p$	supposition
4	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q).\neg p$	$\vdash^*$	$\neg p \vee \neg q$	de (3) par ($\vee$**I**)
5	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$\neg\neg p$	de (3), (2) et (4) par (RAA)
6	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	p	de (5) par (DN)
7	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q), \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition
8	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q).\neg q$	$\vdash^*$	$\neg p \vee \neg q$	de (7) par ($\vee$**I**)
9	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$\neg\neg q$	de (7), (2) et (8) par (RAA)
10	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	q	de (9) par (DN)
11	$\neg(p \wedge q), \neg(\neg p \vee \neg q)$	$\vdash^*$	$p \wedge q$	de (6) et (10) par ($\wedge$**I**)
12	$\neg(p \wedge q)$	$\vdash$	$\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$	de (2), (1) et (11) par (RAA)
13	$\neg(p \wedge q)$	$\vdash$	$\neg p \vee \neg q$	de (12) par (DN)

Nous avons donc prouvé le séquent "$\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$". Pour prouver le séquent converse, nous

procédons comme suit :

1	$\neg p \vee \neg q$	$\vdash$	$\neg p \vee \neg q$	prémisse
2	$\neg p \vee \neg q, \neg p$	$\vdash$	$\neg p$	supposition
3	$\neg p \vee \neg q, \neg p, p \wedge q$	$\vdash$	$p \wedge q$	supposition
4	$\neg p \vee \neg q, \neg p, p \wedge q$	$\vdash$	p	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\neg p \vee \neg q, \neg p$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	de (3), (2) et (4) par (RAA)
6	$\neg p \vee \neg q, \neg q$	$\vdash$	$\neg q$	supposition
7	$\neg p \vee \neg q, \neg q, p \wedge q$	$\vdash$	$p \wedge q$	supposition
8	$\neg p \vee \neg q, \neg q, p \wedge q$	$\vdash$	q	de (7) par ($\wedge$**E**)
9	$\neg p \vee \neg q, \neg q$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	de (7), (6) et (8) par (RAA)
10	$\neg p \vee \neg q$	$\vdash$	$\neg(p \wedge q)$	de (1, 2, 5, 6, 9) par ($\vee$**E**)

Nous avons démontré l'interdéductibilité des deux phrases, c'est-à-dire établi que "$\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg p \vee \neg q$" ce qui nous donne le droit d'utiliser cette loi de Morgan dans de futures preuves.

Il est à noter que l'application des règles dérivées présuppose la preuve des séquents ou théorèmes correspondants.

Les douze règles données n'étaient pas toutes indépendantes les unes des autres : voici comment nous dérivons la règle MT de MP et RAA :

1	$p \to q, \neg q$	$\vdash p \to q$	prémisse
2	$p \to q, \neg q$	$\vdash \neg q$	prémisse
3	$p \to q, \neg q, p$	$\vdash^* p$	supposition
4	$p \to q, \neg q, p$	$\vdash^* q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to q, \neg q$	$\vdash \neg p$	de (3), (2) et (4) avec (RAA)

Une axiomatisation utilisant les onze autres règles sauf MT serait donc également correcte et complète.

Points à retenir

1. La caractéristique de la méthode de la déduction naturelle est l'usage des suppositions. La règle des suppositions nous permet d'introduire n'importe quelle supposition à n'importe quelle étape de la preuve ; les règles PC, RAA et $\vee$**E** nous permettent de nous en décharger.
2. Les règles de la déduction naturelle sont des règles d'introduction et d'élimination des connecteurs propositionnels.
3. La méthode de la déduction naturelle consiste en les règles suivantes :
   supposition : je peux supposer toute phrase (si j'en tiens compte ensuite).
   MP : si j'ai déjà $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$ et aussi ϕ, je peux écrire ψ.
   MT : si j'ai déjà $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$ et aussi $\ulcorner\neg\psi\urcorner$, je peux écrire $\ulcorner\neg\phi\urcorner$.
   PC : si j'ai supposé ϕ et montré ensuiteψ, je peux écrire $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$.
   DN : si j'ai déjà $\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$, je peux écrire ϕ ; si j'ai déjà ϕ, je peux écrire $\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$.
   RAA : si j'ai supposé ϕ et montré qu'il s'ensuit ψ et aussi $\ulcorner\neg\psi\urcorner$, je peux écrire $\ulcorner\neg\phi\urcorner$.
   $\wedge$**I** : si j'ai déjà ϕ et ψ, je peux écrire $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$.
   $\wedge$**E** : si j'ai déjà $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$, je peux écrire ϕ et aussi écrire ψ.
   $\vee$**I** : si j'ai déjà ϕ, je peux écrire $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$; si j'ai déjà ψ, je peux écrire $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$.
   $\vee$**E** : si j'ai montré $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ et que χ s'ensuit de ϕ et également de ψ, je peux écrire χ.
   $\leftrightarrow$ **I** : si j'ai déjà $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$ et $\ulcorner\psi \to \phi\urcorner$, je peux écrire $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$.
   $\leftrightarrow$ **E** : si j'ai déjà $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$, je peux écrire $\ulcorner\phi \to \psi\urcorner$ et aussi écrire $\ulcorner\psi \to \phi\urcorner$.

4. L'application de ces règles nous permet d'écrire des preuves de théorèmes ("$\vdash \phi$") et des preuves de séquents ("$\phi \vdash \psi$").
5. Un séquent est une affirmation qu'une phrase est déductible d'une autre.
6. Pour avoir prouvé un théorème ou un séquent, il faut avoir déchargé toute supposition.
7. Pour établir une conclusion implicative, il convient d'utiliser PC.
8. Pour établir une conclusion négative ou une conclusion simple, il convient d'utiliser RAA.
9. La méthode de la déduction naturelle nous permet d'utiliser des règles dérivées.
10. La déduction naturelle est une méthode syntaxique qui est correcte et complète : tout séquent déductible correspond à une relation de conséquence sémantique et toute conséquence sémantique peut être déduite comme séquent.

Chapitre 7

Propriétés métalogiques de la logique propositionnelle

7.1 Les propriétés métalogiques

Dans la leçon 5 (p. 87), nous avons introduit une sémantique formelle pour le langage de la logique propositionnelle et défini la relation de conséquence sémantique $\models$. "$\phi \models \psi$" est vrai si et seulement si toute interprétation qui rend vrai "ϕ" rend également vrai "ψ". Dans les leçons 4, 5 et 6, nous avons introduit trois méthodes syntaxiques permettant de prouver des théorèmes : un calcul axiomatique, la méthode des arbres et la méthode de la déduction naturelle. Ces trois méthodes définissent trois relations syntaxiques de déductibilité $\vdash$.

La conséquence sémantique $\models$ est une relation sémantique étudiée dans la théorie des modèles. La déductibilité syntaxique $\vdash$, quant à elle, est une relation syntaxique et fait partie du domaine de la théorie de la preuve. La théorie des modèles définit la notion de validité, la théorie de la preuve celle de la déductibilité ou de la démontrabilité. Il existe différentes manières d'établir des relations entre la syntaxe et la sémantique d'un système logique. Un calcul syntaxique peut être appelé :

- **"correct"** si tous ses théorèmes sont des tautologies (cf. 90).
- **"complet"** s'il permet la déduction de toutes les tautologies (cf. 90).
- **"adéquat"** s'il est à la fois correct et complet.
- **"consistant"** s'il ne permet pas la déduction d'une contradiction (cf. p. 92).

La dernière propriété est la moins exigeante : qu'une méthode syntaxique soit *consistante* revient à dire qu'elle ne permet pas la déduction d'une phrase et de sa négation. Puisqu'une contradiction n'est jamais une tautologie, tout calcul correct est consistant. Dans la logique classique, un calcul inconsistant est dénué d'intérêt : si une seule contradiction est un théorème, toute formule propositionnelle peut en être déduite en conséquence (puisqu'une inférence ayant une prémisse contradictoire est toujours valide) – par conséquent, le calcul ne fera plus de distinction entre théorèmes et non-théorèmes et permettra la déduction de n'importe quelle phrase.

Nous démontrerons par la suite que le calcul axiomatique HC, la méthode des arbres et la méthode de la déduction naturelle sont corrects et complets (et donc adéquats). Ces résultats n'établissent pas seulement que les trois méthodes de preuves sont équivalentes, mais également qu'elles correspondent à la sémantique de la logique propositionnelle que l'on a donné dans la leçon 5.

Consistance, correction et complétude ne sont que trois des propriétés que l'on recherche dans la construction d'un calcul. Il est également désirable de pouvoir prouver un théorème de déduction sur le calcul : un tel théorème nous assure que $\phi \vdash \psi$ si et seulement si $\vdash \ulcorner \phi \to \psi \urcorner$. C'est ce théorème qui justifie notre application de la règle de preuve conditionnelle PC dans la méthode de déduction naturelle.

D'autres propriétés métalogiques désirables sont sémantiques : elles ne caractérisent pas un calcul, mais une relation de conséquence sémantique ou un ensemble de tautologies :

- Une logique (un ensemble de proposition appelées "tautologies") est dite **"décidable"** s'il existe une procédure mécanique permettant de déterminer si une phrase est une tautologie.
- Une logique est dite **"compacte"** si toute conséquence sémantique d'un ensemble infini de prémisses est une conséquence sémantique d'un ensemble fini de prémisses.

Nous démontrerons que la logique propositionnelle est décidable et compacte.

Mis à part les caractérisations syntaxiques et sémantiques, une logique peut aussi être décrite comme une structure mathématique : la logique propositionnelle, par exemple, correspond à un certain type d'algèbre, à savoir une algèbre Booléenne. Après avoir introduit cette notion, nous montrerons de quelle manière les connecteurs propositionnels correspondent à des opérations algébriques.

7.2 Le théorème de déduction

Nous remarquons l'importance cruciale de la règle de la preuve conditionnelle PC dans la déduction des théorèmes avec une forme implicative ou conditionnelle. La validité de la règle de la preuve conditionnelle correspond à une propriété importante de la logique propositionnelle :

Théorème 24 (Théorème de déduction)**.** *ψ peut être déduit de ϕ si et seulement si $\ulcorner \phi \to \psi \urcorner$ est un théorème.*

Preuve[1] Nous prouvons les deux directions de l'équivalence.

$\Longrightarrow$ Comme le théorème est évident pour la méthode de la déduction naturelle, nous le démontrons pour le calcul HC. Supposons donc que nous avons une preuve de

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^n \psi$$

Cette preuve consiste en une séquence finie de formules propositionnelles $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ telle que pour $\psi_n = \psi$ et que pour tout nombre $i < n$, ψ_n soit est un axiome ou ϕ, soit s'ensuit de deux autres formules ψ_i et ψ_j $(i, j < n)$ par MP. Nous transformons cette preuve de ψ en une preuve que $\phi \to \psi$ en faisant les modifications suivantes :

(a) Si $\psi_k = \phi$, nous remplaçons

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^k \psi_k$$

par

$$\mathsf{HC} \vdash^k \phi \to \phi$$

ce qui est un axiome ($\mathbf{H_1}$).

[1] La preuve suivante, qui se termine par le signe "□" pour "quod erat demonstrandum" ("c.q.f.d.") peut être omise par ceux qui sont peu intéressés par les subtilités des calculs axiomatiques.

(b) Si ψ_k est un axiome, nous remplaçons la ligne

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^k \psi_k$$

par les cinq lignes suivantes (cf. exercice (7b) de la quatrième série 16.4 à la p. 240) :[2]

$\mathbf{k_1}$	$\mathsf{HC} \vdash \psi_k$	axiome
$\mathbf{k_2}$	$\mathsf{HC} \vdash ((\psi_k \land \phi) \to \psi_k) \to (\psi_k \to (\phi \to \psi_k))$	$\mathbf{H_3}$
$\mathbf{k_3}$	$\mathsf{HC} \vdash (\psi_k \land \phi) \to \psi_k$	$\mathbf{H_8}$
$\mathbf{k_4}$	$\mathsf{HC} \vdash \psi_k \to (\phi \to \psi_k)$	(MP) de (k_2) et (k_3)
$\mathbf{k_5}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_k$	(MP) de (k_1) et (k_4)

(c) Si ψ_k a été obtenu à partir de deux formules ψ_i et ψ_j ($= \ulcorner \psi_i \to \psi_k \urcorner$) $(i, j < k)$, on applique l'hypothèse d'induction pour obtenir :

$\mathbf{i}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_i$
$\mathbf{j}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to (\psi_i \to \psi_k)$

Nous remplaçons ces deux lignes par les suivantes :

$\mathbf{i}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_i$	
$\mathbf{j_1}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to (\psi_i \to \psi_k)$	
$\mathbf{j_2}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to (\psi_i \to \psi_k)) \to ((\phi \land \psi_i) \to \psi_k)$	$\mathbf{H_4}$
$\mathbf{j_3}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \land \psi_i) \to \psi_k$	(MP) de (j_1) et (j_2)
$\mathbf{j_4}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \phi$	$\mathbf{H_1}$
$\mathbf{j_5}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to \phi) \to ((\phi \to \psi_i) \to (\phi \to (\phi \land \psi_i)))$	$\mathbf{H_{10}}$
$\mathbf{j_6}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to \psi_i) \to (\phi \to (\phi \land \psi_i))$	(MP) de (j_4) et (j_5)
$\mathbf{j_7}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to (\phi \land \psi_i)$	(MP) de (i) et (j_6)
$\mathbf{j_8}$	$\mathsf{HC} \vdash (\phi \to (\phi \land \psi_i)) \to (((\phi \land \psi_i) \to \psi_k) \to (\phi \to \psi_k))$	$\mathbf{H_2}$
$\mathbf{j_9}$	$\mathsf{HC} \vdash ((\phi \land \psi_i) \to \psi_k) \to (\phi \to \psi_k)$	(MP) de (j_7) et (j_8)
$\mathbf{j_{10}}$	$\mathsf{HC} \vdash \phi \to \psi_k$	(MP) de (j_3) et (j_9)

$\Longleftarrow$ Si on a

$$\mathsf{HC} \vdash^k \phi \to \psi$$

on ajoute

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^{k+1} \phi$$

afin d'obtenir

$$\mathsf{HC} \cup \{\phi\} \vdash^{k+2} \psi$$

avec une application de (MP).

□

Par le théorème de déduction, trouver une déduction "$p \vdash q$" consiste à prouver "$\vdash p \to q$". En pratique, cependant, cette réduction ne facilite que rarement le travail du logicien. D'où l'utilité de la

[2] Nous supposons que $k_1, \ldots, k_5 < k$, ce qui est toujours possible après une re-numération des lignes.

méthode de la déduction naturelle, qui ne nécessite pas une telle réduction mais qui permet de traiter "$p \vdash q$" 'directement'.

7.3 Correction et complétude de la méthode des arbres

Nous avons présenté la méthode des arbres à travers son interprétation sémantique, c'est-à-dire en termes de valeurs de vérité des phrases traitées. Cependant, les règles que nous avons proposées dans la leçon 5 sont des règles purement syntaxiques : elles ne considèrent que la forme syntaxique des phrases. Nous avons déjà présupposé la correction et la complétude de cette méthode syntaxique et c'est ce que nous devons prouver dans la section qui suit. A cette fin, nous suivons la présentation de Smullyan (1968: 25 et seq.).

Pour prouver la correction et la complétude de la méthode des arbres, nous devons introduire quelques nouvelles notions. Nous observons d'abord que nos règles pour les équivalences matérielles ne sont pas basiques, mais peuvent être obtenues par deux applications successives des règles pour l'implication matérielle. Les sept autres règles de construction d'arbres tombent sous deux catégories : certaines nous amènent à développer l'arbre avec une seule nouvelle branche, d'autres, avec deux nouvelles branches. Nous faisons donc une distinction entre les formules que l'on appellera "du type α" ($\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$, $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$) qui 'continuent sur la même branche', et les formules que l'on appellera "du type β" ($\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$ et $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$) qui nous obligent à créer au moins une nouvelle branche. On adoptera la terminologie suivante pour les formules que ces règles nous obligent à écrire sur les branches consécutives :

α	α_1	α_2
$\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	ϕ	ϕ
$\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\neg(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$	ϕ	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$

β	β_1	β_2
$\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	ψ

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un arbre et un tableau :

Définition 25 (Arbres binaires)**.** *Un arbre binaire est une structure composée de 'noeuds' (points) et de 'branches' (lignes) telle que chaque noeud, mis à part l'origine, se trouve à la fin d'une branche et telle que tous les noeuds se trouvent au début d'au maximum deux branches.*[3]

Nous appelons "point extrême" un point qui n'a pas de successeurs sur sa branche.

Définition 26 (Tableaux)**.** *Un tableau est un arbre binaire dont les noeuds sont des formules propositionnelles construites à partir d'une formule propositionnelle comme suit : si χ est une formule propositionnelle dont le tableau $\mathcal{T}$ a déjà été construit et que ζ en est un point extrême, nous élargissons $\mathcal{T}$ par une des méthodes suivantes :*

[3]Cette définition utilise la notion vague de "structure". Une définition plus précise serait la suivante : Un arbre est un triple $\langle \mathbf{P}, \mathbf{1}, R\rangle$ composé de
1. un ensemble **P** d'éléments appelés "points";
2. une fonction **1** qui assigne à tout point un nombre naturel appelé son "niveau";
3. une relation R entre des points appellée "x est le prédecesseur de y".

Ce triple doit satisfaire aux conditions suivantes :
1. Un seul point (appellé "l'origine") est de niveau 1.
2. Tout autre point que l'origine a un seul prédecesseur.
3. Pour toute paire de points $\langle x, y\rangle$, si x est le prédecesseur de y, alors $\mathbf{1}(y) = \mathbf{1}(x) + 1$.

(A) *Si une formule du type α a une occurrence sur le chemin B_ζ (le chemin de χ jusqu'à ζ dans $\mathcal{T}$), nous ajoutons soit α_1 soit α_2 comme successeur unique à ζ.*

(B) *Si une formule du type β a une occurrence sur le chemin B_ζ, nous ajoutons β_1 comme successeur gauche et β_2 comme successeur de droite à ζ.*

Nous appelons un tableau $\mathcal{T}$ une *"extension directe"* d'un autre tableau $\mathcal{T}'$ si nous l'obtenons à partir de $\mathcal{T}'$ par une seule application de **(A)** ou de **(B)**. Nous disons d'une branche B_ϕ d'un arbre qu'elle est *"fermée"* si elle contient des occurrences d'une formule propositionnelle et également de sa négation. Un tableau $\mathcal{T}$ est appelé *"fermé"* si toutes ses branches sont fermées. Nous appelons une *"preuve"* d'une formule propositionnelle ϕ un tableau fermé qui a $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ comme formule initiale. Une formule ϕ est appelée *"prouvable"* s'il existe une preuve pour ϕ.

Pour la preuve de la correction, nous définissons ce qu'est une interprétation rendant vrais une branche ou un tableau :

Définition 27 (Interprétations d'un tableau). *Une interprétation propositionnelle I rend vraie une branche B_ϕ d'un tableau sémantique ssi elle rend vraies toutes les formules propositionnelles qui ont des occurrences sur cette branche. I rend vrai un tableau ssi elle rend vraie au moins une branche de ce tableau.*

Nous disons d'une branche ou d'un tableau qu'ils sont "satisfaisables" s'il y a une interprétation qui les rend vrais. Nous pouvons maintenant prouver le théorème le plus important pour la preuve de la correction :

Théorème 28. *Si $\mathcal{T}_2$ est une extension directe d'un tableau $\mathcal{T}_1$, toute interprétation qui rend vraie $\mathcal{T}_1$ rend également vraie $\mathcal{T}_2$.*

Preuve Supposons que I rende vrai $\mathcal{T}_1$. Il y a donc une branche B_ϕ dans $\mathcal{T}_1$ rendue vraie par I. $\mathcal{T}_2$ se distingue de $\mathcal{T}_1$ par l'addition d'un ou de deux successeurs à une branche B_ψ de $\mathcal{T}_1$. Si B_ψ est différente de B_ϕ, alors B_ϕ est toujours une branche de $\mathcal{T}_2$ et la conclusion désirée s'ensuit. Si B_ψ a été obtenue de B_ϕ par l'opération **(A)**, alors il existe une formule α sur B_ϕ telle que B_ψ est ou bien $B_\phi + \alpha_1$ ou bien $B_\phi + \alpha_2$. Si α est rendu vrai par I, cependant, α_1 et α_2 le sont également. Alors $\mathcal{T}_2$ contient au moins une branche rendue vraie par I. Si B_ψ a été obtenue de B_ϕ par l'opération **(B)**, alors une formule β a une occurrence sur B_ϕ telle que et $B_\phi + \beta_1$ et $B_\phi + \beta_2$ sont des branches de $\mathcal{T}_2$. Si β est rendu vrai par I, alors soit la première, soit la seconde de ces deux branches est également rendue vraie par I. Donc $\mathcal{T}_2$ est rendu vrai par I. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la correction de la méthode des arbres :

Théorème 29 (Correction de la méthode des arbres). *La méthode des arbres est correcte : toute phrase prouvable est une tautologie.*

Preuve Le théorème (28) nous permet de prouver par induction mathématique que, pour tout tableau $\mathcal{T}$, si l'origine ϕ est rendu vrai par une interprétation I, alors $\mathcal{T}$ est également rendu vrai par cette interprétation, assurant l'étape d'induction. Supposons alors que $\mathcal{T}$ prouve ϕ. Cela signifie que $\mathcal{T}$ est un tableau qui a $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ comme origine et qui n'est rendu vrai sous aucune interprétation. Toute interprétation I, par conséquent, rend faux $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ (si elle rendait vraie l'origine, elle devrait aussi rendre vrai le tableau qui en est l'extension) : $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est vrai sous aucune interprétation : c'est une contradiction. ϕ est donc une tautologie. □

Par rapport à la complétude de la méthode des arbres, il faut distinguer deux questions :

– Pouvons-nous déduire, du fait qu'un tableau fermé existe pour ϕ, que ϕ est une tautologie ?

- Pouvons-nous être sûrs qu'un tableau fermé existe pour toute tautologie ?

Les deux questions sont indépendantes et seule la seconde correspond à celle de la complétude.[4] La question de complétude est la question de savoir si nos règles de construction d'arbres sont suffisamment puissantes pour prouver toutes les tautologies de la logique propositionnelle.

Nous appelons une branche B_ϕ *"complète"* si ces deux conditions sont remplies :

- pour toute formule α qu'elle contient, elle contient à la fois α_1 et α_2 ;
- pour toute formule β qu'elle contient, elle contient β_1 et/ou β_2.

Nous appelons un tableau *"complet"* si toute branche de ce tableau est soit fermée, soit complète. Notre but est de démontrer que

(C) Si $\mathcal{T}$ est un tableau complet et ouvert, la formule à l'origine de $\mathcal{T}$ est satisfaisable.

(**C**) veut dire que la formule d'origine d'un tableau complet qui reste ouvert est rendu vraie par au moins une interprétation – c'est-à-dire que (**C**) nous garantit qu'aucune table ne se ferme 'trop tôt'. Si nous réussissons à prouver (**C**), nous obtenons la complétude de la méthode des arbres comme suit :

Théorème 30 (Complétude de la méthode des arbres)**.** *La méthode des arbres est complète : toute tautologie est prouvable.*

Preuve Supposons que ϕ soit une tautologie. Si ϕ ne pouvait pas être prouvée par la méthode des arbres, nous pourrions construire un tableau complet pour $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ qui resterait ouvert. Par (**C**), $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ serait satisfaisable et ne serait donc pas une contradiction. Par conséquent, ϕ ne serait pas une tautologie. Puisqu'on a présupposé que ϕ est une tautologie, cette supposition doit être rejetée. ϕ est donc prouvable. □

Pour prouver (**C**), nous démontrons le théorème (31) ci-dessous, duquel (**C**) s'ensuit, puisque la satifaisabilité de toute la branche implique la satisfaisabilité de son origine.

Théorème 31. *Toute branche ouverte et complète d'un tableau est satisfaisable.*

Preuve Supposons que B_ϕ soit une branche ouverte et complète d'un tableau $\mathcal{T}$ et que $\mathcal{E}$ soit l'ensemble de toutes les phrases qui ont des occurrences sur B_ϕ. Puisque B_ϕ est une branche ouverte et grâce à nos règles de construction d'arbres (**A**) et (**B**), l'ensemble $\mathcal{E}$ satisfait les trois conditions suivantes :

(a) Il n'est pas le cas que $\mathcal{E}$ contient une phrase simple "p" et sa négation "$\neg p$".
(b) Si $\alpha \in \mathcal{E}$, alors $\alpha_1 \in \mathcal{E}$ et $\alpha_2 \in \mathcal{E}$.
(c) Si $\beta \in \mathcal{E}$, alors soit $\beta_1 \in \mathcal{E}$, soit $\beta_2 \in \mathcal{E}$.

On appelle un ensemble qui satisfait ces trois conditions un "ensemble de Hintikka". Nous prouvons maintenant que tout ensemble de Hintikka est satisfaisable :[5] Nous argumentons que tout ensemble de Hintikka peut être élargi à (est un sous-ensemble d') un ensemble saturé. Un ensemble $\mathcal{E}'$ est dit *"saturé"* s'il satisfait les conditions suivantes :

(a') Pour toute phrase ϕ, soit $\phi \in \mathcal{E}'$, soit $\ulcorner\neg\phi\urcorner \in \mathcal{E}'$, mais pas les deux.
(b') Pour toute phrase du type α, $\alpha \in \mathcal{E}'$ si et seulement si $\alpha_1 \in \mathcal{E}'$ et $\alpha_2 \in \mathcal{E}'$.
(c') Pour toute phrase du type β, $\beta \in \mathcal{E}'$ si et seulement si $\beta_1 \in \mathcal{E}'$ ou $\beta_2 \in \mathcal{E}'$.

[4] Pour le comprendre, il suffit d'imaginer que nous renonçons à quelques-unes de nos règles de construction d'arbres. Même si la méthode devenait ainsi incomplète, la réponse à la première question serait toujours affirmative.

[5] Pour nos besoins, il suffirait de montrer la consistance de tout ensemble de Hintikka qui est *fini*.

Pour montrer qu'il y a un ensemble saturé $\mathcal{E}'$ tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$, nous devons ajouter assez de phrases à $\mathcal{E}$

(i) pour que les implications dans (b) et (c) puissent être transformées en des équivalences dans (b') et (c')
(ii) et pour que (a) soit vraie non seulement pour les phrases simples mais pour toutes les phrases.

Supposons que $\mathcal{E}$ est un ensemble de Hintikka. Nous devons trouver une interprétation qui rende vraies toutes les phrases dans $\mathcal{E}$. Nous la définissons ainsi pour le cas particulier d'une phrase simple :

$$I(\text{“}p\text{”}) := \begin{cases} \mathbf{v} & \text{“}p\text{”} \in \mathcal{E} \\ \mathbf{f} & \text{“}\neg p\text{”} \in \mathcal{E} \\ \text{un de } \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{f} & \text{“}p\text{”} \notin \mathcal{E} \ \wedge \ \text{“}\neg p\text{”} \notin \mathcal{E} \end{cases}$$

Par la condition (a), il n'arrive pas que I attribue deux valeurs de vérité différentes à une seule et même phrase atomique. Comment pouvons-nous montrer que I rend vraie toute phrase dans $\mathcal{E}$? Par la méthode de l'induction mathématique, que nous avons déjà rencontrée à la p. 80. Nous attribuons à chaque phrase un degré selon la définition suivante :

Définition 32 (Degré d'une phrase)**.** *Le degré d'une phrase ϕ est le nombre naturel déterminé par les règles suivantes :*

(1) Si ϕ est une phrase atomique, alors son degré est 0.
(2) Si ϕ est une phrase niée $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et que le degré de ψ est n, alors son degré est $n+1$.
(3) Si ϕ est une conjonction $\ulcorner\psi\wedge\chi\urcorner$, une disjonction $\ulcorner\psi\vee\chi\urcorner$, une implication $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou une équivalence $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ et si le degré de ψ est n et que le degré de χ est m, alors le degré de ϕ est $n+m+1$.

L'utilité principale de cette définition[6] est qu'elle nous permet de prouver des méta-théorèmes déjà établis pour des cas particuliers pour toutes les formules propositionnelles par induction mathématique.

Nous démontrons alors par induction mathématique que I rend vraies toutes les phrases dans $\mathcal{E}$:

base de l'induction : Nous avons déjà vu que I rend vraies toutes les phrases simples (de degré 0) dans $\mathcal{E}$.

pas de l'induction : Supposons que I rende vraie toute phrase ϕ dans $\mathcal{E}$ de degré inférieur à n. Si ϕ est d'un degré supérieur à 0, ϕ doit être soit une formule α, soit une formule β :

- α : Si ϕ est du type α, alors α_1 et α_2 sont aussi dans $\mathcal{E}$. Mais ces formules sont d'un degré inférieur à n, donc elles sont rendues vraies par I. ϕ doit également être vrai.
- β : Si ϕ est du type β, alors soit β_1, soit β_2 est un membre de $\mathcal{E}$. Quelle qu'elle soit, elle doit être rendue vraie par I (puisqu'elle est d'un degré inférieur à n). ϕ est également rendu vrai par I.

Nous avons donc défini une interprétation qui rend vraies toutes les phrases dans $\mathcal{E}$ et, plus généralement, toutes les phrases dans un ensemble de Hintikka. Comme les phrases sur une branche ouverte et complète d'un tableau forment un tel ensemble de Hintikka, nous avons démontré le théorème.

□

[6] Voici quelques exemples : “$p \wedge (q \vee \neg r)$” est de degré 3, “$p \wedge (q \vee r)$” est de degré 2, “$p \wedge (q \wedge (r \vee \neg s))$” est de degré 4 etc.

7.4 Correction et complétude de la déduction naturelle

Pour montrer la correction et la complétude de la méthode de la déduction naturelle il faut prouver que tout séquent déductible "$\phi \vdash \psi$" correspond à une relation de conséquence sémantique "$\phi \models \psi$" (correction) et que toute instance d'une telle relation correspond à un séquent déductible à l'aide de nos douze règles de déduction naturelle (complétude). Nous ignorerons par la suite les règles d'introduction et d'élimination de l'équivalence, traitant $\ulcorner\phi \leftrightarrow \psi\urcorner$ comme abréviation de $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)\urcorner$. Nous suivons la procédure dans Lemmon (1965a: 75 et seq.).

Théorème 33 (Correction de la déduction naturelle)**.** *La méthode de la déduction naturelle est correcte : tout séquent déductible est une conséquence sémantique.*

Preuve Nous avons remarqué que toute preuve par la méthode de la déduction naturelle (en bref : toute déduction naturelle) doit commencer par une application de la règle de suppositions. C'est pourquoi nous pouvons prouver la correction par une induction par rapport à la longueur n d'une preuve de $\ulcorner\phi \vdash \psi\urcorner$.

base de l'induction Si la preuve a la longueur 1, il s'agit d'une application de la règle de suppositions. Le séquent en question a donc la forme $\ulcorner\phi \vdash \phi\urcorner$ et nous avons appris à la leçon 2 (cf. p. 65) que la relation de conséquence sémantique est réflexive.

pas de l'induction Supposons que nous avons montré la correction de toutes les étapes d'une preuve jusqu'à la n-ème étape et considérons l'étape numéro $n+1$. Pour montrer la correction de cette étape $n+1$, il suffit de montrer la validité des neuf différentes règles d'inférence que nous aurions pu utiliser pour y arriver.

MP : Supposons le contraire de ce que nous voulons prouver : que $\models \phi$, $\models \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$, $\vdash \psi$, mais $\not\models \psi$. Par conséquent, il existerait une interprétation I rendant vrai ϕ et $\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$ et rendant faux ψ. Par la table de vérité de "$\rightarrow$", nous savons que cela serait impossible.

MT : L'hypothèse d'induction s'ensuit également de la table de vérité de "$\rightarrow$".

PC : Supposons que $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \psi$, mais que $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\} \not\models \ulcorner\phi_{n+1} \rightarrow \psi\urcorner$. Il y aurait donc une interprétation I qui rendrait vrais tous les membres de $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$, mais faux $\ulcorner\phi_{n+1} \rightarrow \psi\urcorner$. Il s'agit d'une contradiction puisqu'I, par la table de vérité de "$\rightarrow$", devrait rendrait vrai ϕ_{n+1} et rendre faux ψ et servirait donc comme contre-exemple à "$\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \psi$".

DN : L'hypothèse d'induction s'ensuit de la table de vérité de "$\neg$".

RAA : Supposons que nous avons $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \psi$, $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \phi_{n+1}\} \models \ulcorner\neg\psi\urcorner$, mais $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\} \not\models \ulcorner\neg\phi_{n+1}\urcorner$. Il y aurait donc une interprétation I qui rendrait vrais tous les membres de $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$, rendrait faux $\ulcorner\neg\phi_{n+1}\urcorner$ et donc rendrait vrai ϕ_{n+1}. Elle devrait donc rendre vrai et ψ et $\ulcorner\neg\psi\urcorner$, ce qui est impossible.

$\wedge$**I :** Si toute interprétation rendait vrais ϕ et ψ, alors toute interprétation rendrait également vrai $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$.

$\wedge$**E :** Si toute interprétation rendait vrai $\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner$, alors toute interprétation rendrait également vrais ϕ et ψ.

$\vee$**I :** Si toute interprétation rendait vrai ϕ, alors toute interprétation rendrait également vrai $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$.

$\vee$**E :** Supposons le contraire de ce que nous voulons prouver : $\models \ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$, $\phi \models \chi$, $\psi \models \chi$, mais $\not\models \chi$. Il y aurait donc une interprétation I qui rendrait faux χ, mais vrai $\ulcorner\phi \vee \psi\urcorner$. Elle devrait donc rendre vrai l'un des disjoints. Or, puisqu'on a $\phi \models \chi$ et $\psi \models \chi$, elle devrait rendre vrai χ, ce qui est contraire à notre supposition initiale.

□

La complétude de la déduction naturelle nous assure que toute conséquence sémantique est déductible en tant que séquent. Pour le prouver, il nous faut le lemme suivant :

Théorème 34 (Lemme). *Soit ϕ une formule qui contient les phrases simples $p_1, \ldots, p_n$ et I une interprétation. Nous définissons des formules $\psi_1, \ldots, \psi_n$ ainsi :*

$$\psi_i := \begin{cases} (\text{“}p_i\text{”}) & I(\text{“}p_i\text{”}) = \mathbf{v} \\ (\text{“}\neg p_i\text{”}) & I(\text{“}p_i\text{”}) = \mathbf{f} \end{cases}$$

Nous pouvons alors montrer par la méthode de la déduction naturelle :

1. *si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors nous pouvons déduire $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$;*
2. *si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors nous pouvons déduire $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$.*

Preuve

Nous le démontrons par une induction mathématique, utilisant la notion de degré déjà introduite :

base de l'induction Soit ϕ de degré 0 (et donc une phrase atomique). Si $I(\phi) = \mathbf{v}$, nous avons $\psi = \phi$ et $\psi \vdash \phi$ par la règle de supposition. Si $I(\phi) = \mathbf{f}$, nous avons $\psi = \ulcorner\neg\phi\urcorner$ et également $\psi \vdash \neg\phi$ par la règle de suppositions.

pas de l'induction Soit ϕ de degré n.

1. Si $\phi = \ulcorner\neg\xi\urcorner$, ξ est de degré $< n$ et
   - si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ et donc (par l'hypothèse de l'induction) $\psi_1, \ldots \psi_n \vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$.
   - si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{v}$ et donc (par l'hypothèse de l'induction) $\psi_1, \ldots \psi_n \vdash \xi$. Nous obtenons $\psi_1, \ldots \psi_n \vdash \ulcorner\neg\neg\xi\urcorner$ par une application de (DN).
2. Si $\phi = \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degré $< n$ et
   - si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{v}$. Nous avons donc, par l'hypothèse de l'induction :

$$\begin{array}{ll} \psi_1, \ldots, \phi_m & \vdash \xi \\ \psi_{m+1}, \ldots, \psi_n & \vdash \chi \end{array}$$

     et nous devons montrer que

$$\psi_1, \ldots, \phi_n \quad \vdash \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$$

     qui s'ensuit par une application de ($\wedge$**I**).
   - Si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ ou $I(\chi) = \mathbf{f}$. Voici les trois cas :

1	$\psi_1, \ldots, \phi_m$	$\vdash \xi$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg\chi\urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \chi$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \wedge \chi)\urcorner$	de (3), (2) et (4) par (RAA)

1	$\psi_1, \ldots, \psi_m$	$\vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \chi$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \psi$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \wedge \chi)\urcorner$	de (3), (1) et (4) par (RAA)

1	$\psi_1, \ldots, \phi_m$	$\vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg\chi\urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \wedge \chi\urcorner$	$\vdash^* \chi$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	$\psi_1, \ldots, \phi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \wedge \chi)\urcorner$	de (3), (2) et (4) par (RAA)

3. Si $\phi = \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degré $< n$ et
   – si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = \mathbf{v}$ ou $I(\chi) = \mathbf{v}$. Dans les trois cas, nous utilisons ($\vee$**I**).
   – si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{f}$. La déduction sera la suivante

1	$\psi_1, \ldots, \phi_m$	$\vdash \ulcorner\neg\xi\urcorner$	prémisse
2	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg\chi\urcorner$	prémisse
3	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$	supposition
4	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner, \xi$	$\vdash^* \xi$	supposition
5	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \xi$	$\vdash^* \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3), (1) et (4) par (RAA)
6	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner, \chi$	$\vdash^* \chi$	supposition
7	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \chi$	$\vdash^* \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3), (2) et (6) par (RAA)
8	$\psi_1, \ldots, \psi_n, \ulcorner\xi \vee \chi\urcorner$	$\vdash^* \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3, 4, 5, 6, 7) par ($\vee$**E**)
9	$\psi_1, \ldots, \psi_n$	$\vdash \ulcorner\neg(\xi \vee \chi)\urcorner$	de (3), (3) et (8) par (RAA)

4. Si $\phi = \ulcorner\xi \rightarrow \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degré $< n$ et
   – si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ ou $I(\chi) = \mathbf{v}$. Si $I(\chi) = \mathbf{v}$, nous supposons ξ et appliquons (PC). Dans l'autre cas $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{f}$, nous supposons χ et ξ, appliquons (PC) et enlevons la supposition que χ par (RAA).
   – si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{v}$ et $I(\chi) = \mathbf{f}$. Nous supposons $\ulcorner\xi \rightarrow \chi\urcorner$, appliquons (MP) et utilisons (RAA) pour nier la supposition.
5. Si $\phi = \ulcorner\xi \leftrightarrow \chi\urcorner$, ξ et χ sont de degré $< n$ et
   – si $I(\phi) = \mathbf{v}$, alors $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{v}$ ou $I(\xi) = I(\chi) = \mathbf{f}$. Dans ce cas, nous utilisons (PC) et puis ($\leftrightarrow$ **I**).
   – si $I(\phi) = \mathbf{f}$, alors $I(\xi) = \mathbf{f}$ et $I(\chi) = \mathbf{v}$ ou $I(\xi) = \mathbf{v}$ et $I(\chi) = \mathbf{f}$. Nous supposons $\ulcorner\xi \leftrightarrow \chi\urcorner$, appliquons ($\leftrightarrow$ **E**), appliquons (MP) et utilisons (RAA) pour nier la supposition.

Nous avons donc prouvé le lemme, c'est-à-dire démontré que : Si I est une interprétation des phrases simples contenues dans une phrase complexe, nous pouvons déduire, par la méthode de la déduction naturelle, que $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ si $I(\phi) = \mathbf{v}$ et $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \ulcorner\neg\phi\urcorner$ si $I(\phi) = \mathbf{f}$, pour n'importe quelle phrase ϕ. □

Le lemme nous assure que nous pouvons 'modeler' chaque ligne d'une table de vérité par les méthodes de la déduction naturelle. Nous sommes maintenant en mesure de prouver la complétude de la déduction naturelle :

Théorème 35 (Complétude de la déduction naturelle)**.** *La méthode de la déduction naturelle est complète : si ψ est une conséquence sémantique de ϕ, alors "$\phi \vdash \psi$" est déductible.*

PREUVE Nous prouvons d'abord la complétude sous une forme plus 'classique' :

(Compl) Toute tautologie est déductible par la méthode de la déduction naturelle.

Pour démontrer (**Compl**), nous utilisons le lemme. Supposons que ϕ est une tautologie et que ϕ contient les phrases simples "p_1", ..., "p_n". Nous pouvons donc déduire tous les 2^n séquents de la forme $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$. Pour déduire ϕ, nous procédons ainsi :

1. Nous démontrons toutes les n disjonctions $\ulcorner\psi_i \vee \neg\psi_i\urcorner$ (en supposant qu'elles sont fausses et appliquant (∨**I**) et (RAA)).
2. Nous faisons $2n$ suppositions : ψ_1, $\ulcorner\neg\psi_1\urcorner$, ψ_2, $\ulcorner\neg\psi_2\urcorner$, ... ψ_n, $\ulcorner\neg\psi_n\urcorner$.
3. Nous répétons les 2^n preuves de ϕ pour toutes les différentes interprétations possibles (ce qui est possible donné le lemme).
4. Nous appliquons $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$ fois (∨**E**) et obtenons une preuve de ϕ sous aucune supposition.

Comme ϕ était une tautologie arbitraire, nous avons prouvé (**Compl**). Pour passer des théorèmes $\vdash \phi$ à des séquents arbitraires $\phi \vdash \psi$, supposons que ψ est une conséquence sémantique de $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. Nous devons donc montrer que nous pouvons prouver le séquent $\phi_1, \ldots \phi_n \vdash \psi$. Par la définition de la conséquence sémantique, nous savons que $\ulcorner\phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow (\ldots (\phi_n \rightarrow \psi)) \ldots)\urcorner$ est une tautologie. Etant donné (**Compl**), nous pouvons le déduire également par la méthode de la déduction naturelle. Le théorème de déduction nous dit alors que nous pouvons également prouver le séquent en question. □

Voici un exemple pour illustrer le fonctionnement de la 'preuve canonique' décrite ci-dessus. Soit ϕ la tautologie "$(p \wedge q) \rightarrow p$".

1. Première étape : nous prouvons les disjonctions des atomes concernés :

1	$\vdash p \vee \neg p$	déjà prouvé
2	$\vdash q \vee \neg q$	déjà prouvé

2. Deuxième étape : supposons tous les atomes et leurs négations :

3	p	$\vdash^* p$	supposition
4	$\neg p$	$\vdash^* \neg p$	supposition
5	q	$\vdash^* q$	supposition
6	$\neg q$	$\vdash^* \neg q$	supposition

3. Troisième étape : comme ϕ est une tautologie, le lemme nous montre comment dériver les quatre lignes suivantes des quatre lignes précédentes :

7	p, q	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	lemme
8	$p, \neg q$	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	lemme
9	$\neg p, q$	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	lemme
10	$\neg p, \neg q$	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	lemme

4. Nous pouvons donc appliquer ∨**E** pour terminer la preuve :

11	q	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	de (1,3,7,4,9) par (∨**E**)
12	$\neg q$	$\vdash^* (p \wedge q) \rightarrow p$	de (1,3,8,4,10) par (∨**E**)
13		$\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$	de (2,5,11,6,12) par (∨**E**)

7.5 Correction et complétude du calcul HC

Nous avons déjà démontré la correction de HC dans la leçon 4. Si la méthode des arbres est complète et donc suffit à prouver toute tautologie, le calcul HC y suffit également. Le calcul HC hérite la complétude de la méthode des arbres.

7.6 Décidabilité et formes normales

Le problème de la décidabilité est le suivant : comment savoir si une formule donnée ϕ est une tautologie ? Comment savoir si une formule $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est satisfaisable ? Pour répondre à ces questions, il nous faut une procédure de décision, c'est-à-dire un algorithme déterminant s'il existe ou non une interpétation qui rend vraie la phrase donnée.

Les tables de vérité nous fournissent une méthode 'brute' permettant de trouver une telle interprétation, si elle existe. Pour savoir si une phrase donnée est une tautologie, il suffit de faire sa table de vérité et vérifier si on ne trouve que des "V" dans la colonne de son connecteur principal. Le théorème suivant est donc trivial :

Théorème 36 (Décidabilité de la logique propositionnelle)**.** *La logique propositionnelle est décidable : il existe une procédure mécanique permettant de déterminer si une formule propositionnelle est ou non une tautologie.*

PREUVE Toute formule propositionnelle ne contient qu'un nombre fini de phrases simples. Pour déterminer si ϕ est ou non une tautologie, il suffit de faire la table de vérité des phrases simples qu'il contient et vérifier s'il y a des "F" dans la colonne de son connecteur principal. S'il y en a pas, ϕ est une tautologie. □

L'inconvénient de cette méthode est que les tables de vérité peuvent devenir très grandes. Pour une phrase complexe construite à partir de n atomes différents, il faut considérer 2^n lignes (4 pour 2, 8 pour 3, 16 pour 4, 32 pour 5, 64 pour 6 etc.). Pour une phrase contenant dix phrases simples, il faudrait faire une table de 1024 lignes !

On appelle cela le "problème de l'explosion combinatoire" que l'on rencontre lorsqu'on utilise directement la définition de la validité et qu'on vérifie, pour tout I, si $I(\phi) = \mathbf{v}$. En ne considérant que les n phrases simples apparaissant dans ϕ, le nombre de vérifications est exponentiel en n (la table de vérité pour ϕ aura 2^n lignes). Cependant, les tables de vérité suggèrent une autre méthode. Considérons la phrase complexe : $((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (\neg r \rightarrow s) \wedge (\neg p \rightarrow (q \vee r)) \wedge (r \rightarrow p)$. Choisissons **A**, **B**, **C**, **D** pour les quatre conjoints, nous obtenons la table de vérité suivante (cf. p. 262) :

p	q	r	s	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\mathbf{A}$	$\neg r$	$\mathbf{B}$	$\neg p$	$q \vee r$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{D}$	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$
V	V	V	V	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	V	F	F	V	V	V	F
V	F	V	V	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F
F	F	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	F
F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F	V	F

Chaque ligne de cette table nous apprend que la phrase complexe prend la valeur "V" ou "F" selon la valeur des atomes sur la ligne en question. L'expression "$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$" est donc vraie si et seulement

si “p”, “q”, “r” et “s” sont tous vrais (1ère ligne) *ou* si “p”, “q” et “r” sont vrais et “s” est faux (2ème ligne) *ou* si “p” et “q” sont vrais et “r” et “s” faux (3ème ligne) *ou* si “p”, “r” et “s” sont vrais et “q” faux (5ème ligne) *ou* si “p” et “r” sont vrais et “q” et “s” sont faux (6ème ligne) *ou* si “p” et “s” sont vrais et “q” et “r” sont faux (7ème ligne). En traduisant cette observation en langue formelle, nous obtenons :

(1) $$(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s)$$

Cette expression a une forme particulière :

- les négations n'apparaissent que devant des phrases simples ;
- l'expression est une disjonction de conjonctions ;
- chaque disjoint correspond à une ligne de la table de vérité où la phrase entière est vraie.

On appelle des phrases ayant cette forme des *formes normales disjonctives*.

Si nous considérons un grand ensemble de formules bien formées d'une certaine langue et que nous essayons de déterminer des propriétés communes à ces formules (par exemple : nous voulons savoir si toutes les formules dérivables dans un certain calcul sont valides), il est important de savoir si on peut présupposer quelque chose sur la *forme* de ces formules. Ainsi se justifie l'intérêt de ce qu'on appelle des *“formes normales”*. Ces formes normales sont définies de manière syntaxique.

Pour définir des formes normales, nous utilisons l'interdéfinissabilité des connecteurs (cf. p. 65). Commençons par la *forme normale négative*. Une formule ϕ est de forme normale négative si et seulement si soit elle est de la forme p ou $\neg p$ pour une phrase atomique p, soit elle est une disjonction ou une conjonction des formules de forme normale négative. Pour former la forme normale négative d'une formule, on ‘pousse' la négation ‘à l'intérieur' de la formule en appliquant, successivement, les règles suivantes :

règle 1	$\phi \leftrightarrow \psi$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$
règle 2	$\phi \rightarrow \psi$	$\rightsquigarrow$	$\neg\phi \vee \psi$
règle 3	$\neg(\phi \wedge \psi)$	$\rightsquigarrow$	$\neg\phi \vee \neg\psi$
règle 4	$\neg(\phi \vee \psi)$	$\rightsquigarrow$	$\neg\phi \wedge \neg\psi$
règle 5	$\neg\neg\phi$	$\rightsquigarrow$	ϕ

Le résultat obtenu par l'application de ces règles est équivalent (sémantiquement) à la formule initiale, c'est-à-dire qu'il a la même table de vérité.

Théorème 37. *Si ϕ est une formule propositionnelle, il existe une formule ψ de forme normale négative qui est sémantiquement équivalente à ϕ.*

Preuve Par une application des règles données, ne passant à la règle suivante que lorsque la règle antécédente n'est plus applicable. □

Un exemple d'une telle transformation en forme normale négative est la chaîne d'équivalences sui-

vante :

$(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$		
	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow r$	règle 1
	$\neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee r$	règle 2
	$\neg((\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee r$	règle 2
	$\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r$	règle 2
	$\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \vee r$	règle 3
	$(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg q \vee p) \vee r$	règle 4
	$(\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p) \vee r$	règle 4
	$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r$	règle 5

Le résultat est en forme normale négative car tous les signes de négations se trouvent devant des phrases atomiques.

La forme normale négative nous permet de construire des formes normales conjonctives :

Définition 38. *Une formule est en forme normale conjonctive si elle est une conjonction de disjonctions de phrases atomiques et de négations de phrases atomiques.*[7]

L'importance de cette notion vient du fait que toute formule propositionnelle est équivalente à une formule de forme normale conjonctive :

Théorème 39. *Si ϕ est une formule propositionnelle, il existe une formule ψ de forme normale conjonctive sémantiquement équivalente à ϕ.*

Preuve Pour transformer une formule de forme normale conjonctive, on applique successivement les règles suivantes :

règles 1 – 5	ϕ	$\rightsquigarrow$	forme normale négative de ϕ
règle 6	$(\phi \wedge \psi) \vee \chi$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$
règle 7	$\chi \vee (\phi \wedge \psi)$	$\rightsquigarrow$	$(\chi \vee \phi) \wedge (\chi \vee \psi)$
règle 8	$\phi \vee (\psi \vee \chi)$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \vee \psi) \vee \chi$
règle 9	$\phi \wedge (\psi \wedge \chi)$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \wedge \psi) \wedge \chi$

Il est évident que le résultat obtenu par l'application de ces règles est équivalent (sémantiquement) à la formule initiale, c'est-à-dire qu'il a la même table de vérité. □

[7] Voici la notation formelle :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i \ := \ \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$$

pour des ensembles finis de formules $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. On appelle alors un 'littéral' une formule qui est soit une phrase atomique (= de la forme "p"), soit la négation d'une phrase atomique (= de la forme "$\neg p$"). On a pour une formule ϕ :

$$\phi \text{ est de forme normale conjonctive} \quad :\Longleftrightarrow \quad \phi \text{ est de la forme } \bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{i,j} \right)$$

pour des nombres naturels m et $n_1, \ldots n_m$ et des littéraux $L_{i,j}$ tels que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n_i$.

Un exemple d'une telle transformation en forme conjonctive est la chaîne d'équivalences suivante :

$((p \vee \neg q) \rightarrow ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	
$(\neg(p \vee \neg q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	règle 2
$((\neg p \wedge \neg\neg q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	règle 4
$((\neg p \wedge q) \vee ((r \wedge s) \vee t)) \wedge \neg u$	règle 5
$((\neg p \wedge q) \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 6
$((\neg p \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge (q \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t)))) \wedge \neg u$	règle 6
$((\neg p \vee (r \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge (q \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 7
$((\neg p \vee (r \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 7
$((\neg p \vee r) \vee t)) \wedge (\neg p \vee (s \vee t))) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 8
$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee (r \vee t)) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 8
$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee r) \vee t) \wedge (q \vee (s \vee t))) \wedge \neg u$	règle 8
$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t)) \wedge ((q \vee r) \vee t) \wedge ((q \vee s) \vee t)) \wedge \neg u$	règle 8
$((\neg p \vee r) \vee t) \wedge ((\neg p \vee s) \vee t) \wedge ((q \vee r) \vee t)) \wedge ((q \vee s) \vee t) \wedge \neg u$	règle 9

Nous voyons que les règles 8 et 9 ne servent qu'à grouper les conjonctions ou disjonctions de manière uniforme du côté gauche de telle sorte qu'on puisse, selon notre convention, omettre les parenthèses. Le résultat final de notre transformation est donc la formule :

$$(\neg p \vee r \vee t) \wedge (\neg p \vee s \vee t)) \wedge (q \vee r \vee t) \wedge (q \vee s \vee t) \wedge \neg u$$

L'intérêt des formes normales conjonctives vient du fait qu'il est très facile de tester – mécaniquement – si une formule de forme normale conjonctive est valide : il suffit que tous ses conjoints soient valides ; mais ces conjoints sont des disjonctions – et pour qu'une disjonction soit valide, il faut qu'au moins une phrase atomique soit à la fois affirmée et niée dans la disjonction. La formule considérée n'est donc pas valide, mais cette autre l'est :

$$(\neg p \vee r \vee p) \wedge (\neg t \vee s \vee t)) \wedge (q \vee \neg q \vee t) \wedge (q \vee s \vee \neg s)$$

Il est également possible de définir une forme normale disjonctive : une formule est en *forme normale disjonctive* si elle est une disjonction de conjonctions de phrases atomiques et de leurs négations.[8] La forme normale disjonctive d'une formule revient à énumérer, en les ajoutant les uns aux autres par la disjonction, les cas de vérité de la phrase complexe en question, comme sa table de vérité l'indique. Par exemple, la table de vérité d'une implication matérielle indique que celle-ci est vraie si et seulement si l'on a "p" et "q" vrais, ou "p" faux et "q" vrai, ou encore "p" et "q" les deux faux – la forme disjonctive

[8] Voici la notation formelle :

$$\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i \;:=\; \phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$$

Alors on a, pour une formule ϕ :

$$\phi \text{ est en forme normale disjonctive} \quad :\Longleftrightarrow \quad \phi \text{ est de la forme } \bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} L_{i,j}\right)$$

Dans les règles, il faut remplacer les règles 6 et 7 par les suivantes :

$(\phi \vee \psi) \wedge \chi$	$\rightsquigarrow$	$(\phi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$
$\chi \wedge (\phi \vee \psi)$	$\rightsquigarrow$	$(\chi \wedge \phi) \vee (\chi \wedge \psi)$

d'une implication "$p \to q$" sera donc "$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$".

7.7 La compacité de la logique propositionnelle

Nous avons défini la conséquence logique et la déductibilité avec des ensembles de prémisses qui sont potentiellement infinis. Nous pouvons donc maintenant nous demander si la consistance d'un ensemble infini de phrases peut être réduite à celle d'un sous-ensemble fini. Le théorème de compacité répond par l'affirmative à cette question :

Théorème 40. *La logique propositionnelle est compacte : $\Gamma \models \phi$ si et seulement s'il existe un sous-ensemble fini $\Gamma' \subset \Gamma$ tel que $\Gamma' \models \phi$.*

Par conversion, ce théorème nous apprend que si tous les sous-ensembles Γ' d'un ensemble Γ sont satisfaisables, alors Γ sera également satisfaisable. Les différentes interprétations qui rendent vraies les différents sous-ensembles finis peuvent être combinées en une interprétation qui rende vraies toutes les phrases dans l'ensemble infini. Pour la preuve du théorème de compacité par la méthode de tableaux analytiques, nous prouvons, suivant Lemmon (1965a: 30 et seq.) d'abord un résultat qui s'applique à des arbres quelconques.

Nous disons d'un arbre qu'il est "généré de manière finie" si et seulement si chaque noeud dans l'arbre n'a qu'un nombre fini de successeurs. Tous les arbres binaires, par exemple, sont donc des arbres générés de manière finie. Une branche est dite "infinie" si et seulement si elle contient un nombre infini de noeuds. Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 41 (Le lemme de König)**.** *Si un arbre qui est généré de manière finie contient un nombre infini de noeuds, il contient une branche infinie.*

Preuve Appelons un noeud 'sympa' si et seulement s'il y a un nombre infini de noeuds comme successeurs et 'méchant' dans le cas inverse. Par l'antécédent de l'implication, il y a un nombre infini de noeuds et ils sont tous des successeurs de l'origine. L'origine est donc sympa. Nous observons aussi que si tous les successeurs d'un noeud sont méchants, alors ce noeud doit aussi être méchant (puisque l'arbre est généré de manière finie). Par conséquent, l'origine doit avoir un successeur sympa, qui, à son tour, a un successeur sympa et ainsi de suite. Puisque tout noeud sympa doit avoir un successeur sympa, nous générons ainsi une branche infinie.[9] □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la compacité de la logique propositionnelle :

Preuve Soient tous les sous-ensembles finis d'un ensemble Γ satisfaisables. Supposons que Γ nous soit donné comme une séquence (et non seulement comme un ensemble) de formules propositionnelles $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots\}$ étant telle que, pour tout n, l'ensemble $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ est satisfaisable. Cela est possible parce qu'il s'agit d'un sous-ensemble de Γ. Construisons le tableau analytique pour ϕ_1. Ce tableau ne peut pas être fermé puisque ϕ_1 est satisfaisable. Nous ajoutons maintenant ϕ_2 à chaque branche ouverte et continuons le tableau. Cette procédure nous donne un tableau qui doit également être ouvert, puisque $\{\phi_1, \phi_2\}$ est satisfaisable. Nous ajoutons ϕ_3, puis ϕ_4 et ainsi de suite. Nous obtenons un arbre généré de manière finie qui contient un nombre infini de noeuds (toutes les phrases dans Γ). Cet arbre doit contenir une branche infinie, par le lemme de König. Cette branche doit être ouverte et elle contient toutes les phrases dans Γ. □

[9] Pour les arbres non-ordonnés (qui sont tels que les successeurs d'un noeud ne forment pas une séquence mais seulement un ensemble) nous avons besoin de l'axiome de choix de la théorie des ensembles.

Points à retenir

1. Un système d'axiomes ou une théorie sont consistants s'ils ne permettent pas la déduction d'une contradiction.
2. Un calcul ou une méthode de preuve syntaxique est correct si tout théorème est une tautologie.
3. Un calcul ou une méthode de preuve syntaxique est complet si toute tautologie est un théorème.
4. Le calcul axiomatique HC, la méthode des arbres et le système de déduction naturelle sont tous corrects et complets.
5. Nous avons les correspondances :

ϕ est déductible de Th	$\Longleftrightarrow$	ϕ s'ensuit de Th
ϕ est satisfaisable	$\Longleftrightarrow$	ϕ est consistant
ϕ est une contradiction	$\Longleftrightarrow$	ϕ est inconsistant
ϕ est une tautologie	$\Longleftrightarrow$	$\ulcorner \neg\phi \urcorner$ est inconsistant
$\ulcorner \phi$ donc $\psi \urcorner$ est un argument valide	$\Longleftrightarrow$	$\ulcorner \phi \wedge \neg\psi \urcorner$ est inconsistant

6. Par rapport à nos calculs syntaxiques, nous pouvons prouver un théorème de déduction : ψ peut être déduit de ϕ si et seulement si l'implication $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ est prouvable. Le théorème de déduction nous assure de la validité de la règle de la preuve conditionnelle.
7. La logique propositionnelle est décidable : il existe une procédure mécanique qui permet de déterminer si une phrase est ou non une tautologie.
8. Toute formule de la logique propositionnelle est sémantiquement équivalente à des formules en forme normale négative, conjonctive et disjonctive. La forme normale disjonctive d'une formule 'encode' sa table de vérité : chaque disjoint correspond à une ligne où elle reçoit la valeur de vérité "V".
9. La logique propositionnelle est compacte : toute conséquence sémantique d'un ensemble infini de phrase s'ensuit déjà d'un ensemble fini.
10. La compacité s'ensuit du lemme de König qui dit qu'un arbre qui n'a que des branchements finis ne peut être infini que s'il contient une branche infinie.

Chapitre 8

La syllogistique

8.1 Les syllogismes classiques

Nous avons vu (à la p. 35) que la logique propositionnelle ne nous permet pas de reconnaître la validité des inférences comme

(1)
$$\frac{\text{Tous les hommes sont mortels.} \quad \text{Tous les philosophes sont des hommes.}}{\text{Tous les philosophes sont mortels.}}$$

La première étape vers une formalisation des inférences comme (1) a été faite dans la logique traditionnelle, appelée "syllogistique", dérivée des oeuvres d'Aristote, en particulier de son traité *De l'interprétation* (Aristote 2000a). La syllogistique a dominé la logique pendant plus de 2000 ans.[1] Kant pensait que la logique était sortie "close et achevée" du cerveau d'Aristote ("geschlossen und vollendet", *Critique de la raison pure*, 1786 (Kant 2001), B VIII) et ce ne fut qu'avec Frege que l'on eut la preuve de son erreur.

Nous remarquons que la validité de (1) n'est pas dû aux occurrences de "hommes", "mortel" et "philosophe", mais est partagée non seulement par l'inférence suivante :

(2)
$$\frac{\text{Tous les pingouins sont des animaux.} \quad \text{Tous les animaux sont maudits.}}{\text{Tous les pingouins sont maudits.}}$$

mais aussi des inférences plus compliquées de la même forme :

(3)
$$\frac{\text{Tous les amis de mon grand-père qui vit en Australie sont soit des kangourous, soit des admirateurs de la lune.} \quad \text{Tous les pingouins qui ne sont ni roses ni employés par Microsoft sont des amis de mon grand-père qui vit en Australie.}}{\text{Tous les pingouins qui ne sont ni roses ni employés par Microsoft sont soit des kangourous, soit des admirateurs de la lune.}}$$

Nous formalisons alors (1) utilisant des abréviations schématiques pour les expressions remplaçables :

[1] Il y avait néanmoins d'autres traditions. Par exemple, les Stoïciens, Petrus Hispanus et Duns Scot ont étudié la logique propositionnelle (cf. Łukasiewicz 1935).

$$(4)\qquad \frac{\begin{array}{c}\text{Tous les } H \text{ sont } M.\\ \text{Tous les } P \text{ sont } H.\end{array}}{\text{Tous les } P \text{ sont } M.}$$

La syllogistique étudie le comportement logique des expressions comme “tous les S sont P” qui représentent la squelette logique des inférences comme (1).

La syllogistique distingue quatre formes de phrases dites “catégorielles”, une phrase catégorielle étant composée d’un sujet, d’une copule et d’un prédicat.

SaP	**SiP**	**SeP**	**SoP**
“tous les S sont P”	“quelques S sont P”	“Aucun S n’est P”	“Quelques S ne sont pas P”
“tous les philosophes sont mortels”	“quelques chats sont des animaux”	“Aucun homme n’ est blanc.”	“Quelques chats ne sont pas jolis.”
jugement affirmatif jugement général	jugement affirmatif jugement particulier	jugement négatif jugement général	jugement négatif jugement particulier

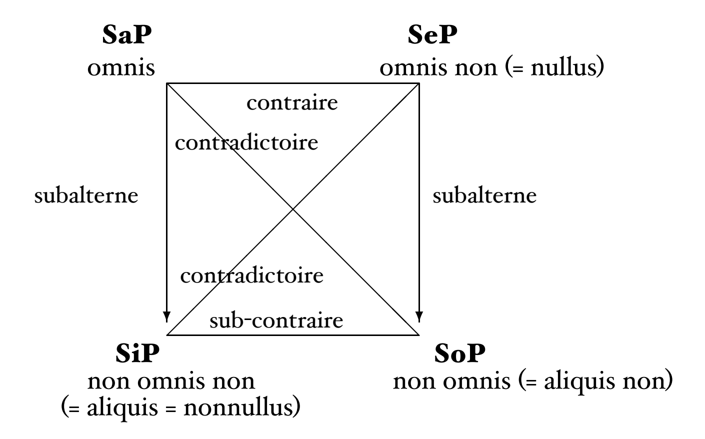
Les quatre types **a**, **i**, **e**, **o** (qu’on peut s’imaginer dérivés de “**a**ff**i**rmo” (“je maintiens”) et “n**e**g**o**” (“je conteste”)) se distinguent par les relations qui subsistent entre les (ensemble d’) objets tombant sous le concept de sujet “S” (son extension) et (l’emsemble de) ceux qui tombent sous le concept de prédicat “P” : dans le cas d’un jugement général affirmatif (“**SaP**”), cette relation est celle d’inclusion ; dans le cas d’un jugement particulier affirmatif (“**SiP**”) celle ’intersection ; dans le cas d’un jugement général négatif (“**SeP**”), les extensions sont disjointes ; et dans le cas d’un jugement particulier négatif (“**SoP**”) la relation est celle de non-inclusion.

Il importe peu, en conséquence, que nous utilisions ordinairement le pluriel pour exprimer les jugements des types **i** et **o** : pour que “quelques pingouins sont heureux” soit vraie, par exemple, il suffit qu’un seul pingouin soit heureux.

Nous voyons donc que seules les extensions comptent : d’autres manières d’exprimer une phrase catégorielle du type **SaP** (“tous les S sont (des) P”) seraient “tout ce qui est S est P”, “chaque S est un P”, “les S sont P sans exception”, “seulement des P sont des S”. Pour exprimer une relation du type **SiP** (“quelques S sont (des) P”), on peut dire “quelque chose est et un S et un P”, “il y a des S qui sont P”, “il y a des P qui sont des S”, “il y a des SP” (des pingouins heureux, par exemple). Pour un jugement général négatif (**SeP**) (“aucun S n’est P”) , on peut dire “aucune chose est et un S et un P”, “rien de S est P”, “aucun P n’est S”, “les SP n’existent pas” (les pingouins heureux, par exemple).

Afin de formaliser le maximum de phrases sous une forme catégorielle, on peut souvent se servir de re-formulations. “Je ne vais nulle part en avion où je peux aller en train”, par exemple, peut être reformulée comme ayant la forme **SeP** : “aucun endroit où je vais en avion est tel que j’y puisse aller en train”. La phrase “tout le monde dans la salle parle français” devient “toutes les personnes dans la salle sont des locuteurs du français” (**SaP**), “je veux aller où tu vas” devient “tout endroit où tu vas est un endroit où je veux aller aussi” (**SaP**) et “quand il pleut, la rue est mouillée” devient “tous les instants pendant lesquels il pleut sont des instants pendant lesquels la rue est mouillée” (**SaP**). Parfois cette transformation est loin d’être évidente, comme le montre la transformation de “je l’ai connu avant qu’il ne se soit ruiné” en “quelques instants avant qu’il ne se soit ruiné sont des instants où je l’ai connu”. Il n’y a pas non plus de règle générale, comme le montre le fait que “Un chevalier est présent” est clairement de la forme **SiP**, bien que “Un irlandais est roux” émette probablement un jugement du type SaP.

Les quatre types de jugements catégoriels se trouvent dans un carré d’oppositions (cf. p. 62) :



Comme dans le cas des carrés d'oppositions pour la logique propositionnelle, la relation de contradiction implique que l'une des phrases qu'elle relie est la négation de l'autre. Les phrases contraires, cependant, se distinguent par une négation interne :[2] elles ne peuvent pas toutes les deux être vraies, mais elles peuvent être toutes les deux fausses ; il n'est pas possible que tous les S soient P et qu'il ne soit pas le cas que tous les S soient des P (au moins s'il y a des S),[3] mais il est possible qu'il y ait des S qui soient des P (et donc que "tous les S ne sont pas des P" soit fausse) et des S qui ne soient pas des P (et donc que "tous les S sont des P" soit également fausse). La relation de subalternation est simplement la relation de conséquence : si tous les S sont P (et s'il y a des S), alors il n'est pas vrai qu'il n'est pas le cas qu'aucun S n'est P ; si aucun S n'est P (et s'il y a des S), alors il n'est pas le cas que tous les S soient P. La sub-contrariété, finalement, correspond à la vérité logique (= validité) de la disjonction. S'il y a des S (ce qui est présupposé tout le long), alors un exemplaire particulier de ces S est ou bien P ou bien il n'est pas P. S'il est P, alors il n'est pas vrai qu'aucun S ne soit P ; s'il n'est pas P, alors il n'est pas vrai que tous les S soient P. Alors au moins une des deux possibilités "non omnis non" ou "non omnis" est vraie.

La syllogistique ne distingue les phrases catégorielles que par leur qualité (affirmative ou négative) et par leur quantité (générale ou particulière). Néanmoins, elle est capable de formaliser un bon nombre d'inférences intuitivement valides.

8.2 Les formes valides du raisonnement syllogistique

La syllogistique distingue les inférences directes des inférences indirectes. Les inférences directes n'ont qu'une seule prémisse. trois d'entre elles sont des conversion, qui changent l'ordre du terme sujet et du terme prédicat :[4]

"Conversio simplex" $\frac{\textbf{AiB}}{\textbf{BiA}}$ $\frac{\textbf{AeB}}{\textbf{BeA}}$

"Conversio per accidens" $\frac{\textbf{AaB}}{\textbf{BiA}}$ $\frac{\textbf{AeB}}{\textbf{BoA}}$

[2] A l'aide des négations internes et externes, nous pouvons définir chaque coin du carré en termes d'un seul : au lieu de "omnis", "omnis non", "non omnis" et "non omnis non" (dans le sens des aiguilles d'une montre), nous aurions pu mettre "nullus non"/"nullus"/"non nullus non"/"non nullus" ou "non aliquis non"/"non aliquis"/"aliquis non"/"aliquis".

[3] Nous reviendrons à cette présupposition du raisonnement syllogistique à la p. 156.

[4] Nous pouvons nous rappeler des prémisses qui peuvent être 'converti' à l'aide d'un 'poème' de Petrus Hispanus : "Simplicter **feci** convertitur, **eva** per acci, **asto** per contra, sic fit conversio tota." (**?**: I.21, cité d'après Prior (1955: 109)).

"Conversio per contrapositionem" $\dfrac{\mathbf{AaB}}{(\overline{\mathbf{B}})\mathbf{a}(\overline{\mathbf{A}})}$ $\dfrac{\mathbf{AoB}}{(\overline{\mathbf{B}})\mathbf{o}(\overline{\mathbf{A}})}$

Mis à part ces trois conversion, nous pouvons affaiblir les deux propositions catégorielles universelles aux particulières et nous avons un analogue de la conversion :

"Réduction de quantité" $\dfrac{\mathbf{AaB}}{\mathbf{AiB}}$ $\dfrac{\mathbf{AeB}}{\mathbf{AoB}}$

"obversio" $\dfrac{\mathbf{AaB}}{\mathbf{Ae}(\overline{\mathbf{B}})}$ $\dfrac{\mathbf{AiB}}{\mathbf{Ao}(\overline{\mathbf{B}})}$ $\dfrac{\mathbf{AeB}}{\mathbf{Aa}(\overline{\mathbf{B}})}$ $\dfrac{\mathbf{AoB}}{\mathbf{Ai}(\overline{\mathbf{B}})}$

L'expression "$(\overline{A})$" dénote la 'négation' du terme général "A", c'est-à-dire l'expression qui a comme extension le complément de l'extension de "A" : tout ce qui n'est pas A est $(\overline{A})$ et tout ce qui n'est pas $(\overline{A})$ est A.[5] "$(\overline{\text{pingouin}})$", par exemple, a comme extension tous les non-pingouins, c'est-à-dire toutes les choses qui ne sont pas des pingouins (le complément de l'ensemble de tous les pingouins).

Les inférences indirectes consistent en deux prémisses – une prémisse majeure ("praemissa maior") et une prémisse mineure ("praemissa minor") – et une conclusion qui contiennent au total trois termes généraux : le sujet "S" de la conclusion ("terminus minor"), le prédicat "P" de la conclusion ("terminus maior") et le concept 'moyen' "M". Elles se distinguent en quatre schémas qui s'appellent "figures" :

	première figure	deuxième figure	troisième figure	quatrième figure
praemissa maior	M P	P M	M P	P M
praemissa minor	S M	S M	M S	M S
conclusio	S P	S P	S P	S P

Puisqu'on a quatre possibilités pour relier "S" à "P" (et "M" à "S" etc.) – à savoir **a**, **i**, **o** et **e** –, on obtient pour chaque figure 64 (= 4 · 4 · 4) schémas d'inférence, appelés "modes". De ces 256 modes (64 par figure), tous ne sont pas valides ; il n'y a que 24 modes qui sont valides, 19 dits "forts" et 5 dits "faibles" (un mode est appelé "faible" si la conclusion est plus faible qu'elle ne devrait l'être par rapport aux prémisses). Pour la première figure, on a 4 modes forts valides :

a-a-a "Barbara"	**e-a-e** "Celarent"
Tous les hommes sont mortels. Tous les philosophes sont des hommes. Tous les philosophes sont mortels.	Aucune martre n'est un ours. Toutes les outres sont des martres. Aucune outre n'est un ours.

a-i-i "Darii"	**e-i-o** "Ferio"
Tous les ours polaires sont blancs. Quelques ours sont des ours polaires. Quelques ours sont blancs.	Aucun griffon n'est un basset. Quelques chiens sont des griffons. Quelques chiens ne sont pas des bassets.

Les noms comme "Barbara" (pour l'inférence qui correspond au schéma **a-a-a**) ont été inventés au Moyen Âge. Pour la deuxième figure, on a également quatre modes forts qui sont valides :

[5] Je mets "négation" entre guillemets simples parce que les noms généraux comme "pingouin" n'admettent pas, à strictement parler, de négation (puisqu'ils ne sont pas prédicatives).

e-a-e "Cesare"	**a-e-e** "Camestres"
Aucun mammifère n'est un oiseau. Tous les vautours sont des oiseaux. Aucun vautour n'est un mammifère.	Tous les vautours sont des oiseaux. Aucun mammifère n'est un oiseau. Aucun mammifère n'est un vautour.

e-i-o "Festino"	**a-o-o** "Baroco"
Aucun vautour n'est un basset. Quelques chiens sont des bassets. Quelques chiens ne sont pas des vautours.	Tous les bassets sont des chiens. Quelques chats ne sont pas des chiens. Quelques chats ne sont pas des bassets.

Il y a six modes forts valides pour la troisième figure :

a-a-i "Darapti"	**e-a-o** "Felapton"
Tous les bassets sont mortels. Tous les bassets sont des chiens. Quelques chiens sont mortels.	Aucune martre n'est un ours. Toutes les martres sont des chiens. Quelques chiens ne sont pas des ours.

i-a-i "Disamis"	**a-i-i** "Datisi"
Tous les ours polaires sont blancs. Tous les ours polaires sont des ours. Quelques ours sont blancs.	Tous les chiens sont mortels. Quelques chiens sont des griffons. Quelques griffons sont mortels.

o-a-o "Bocardo"	**e-i-o** "Ferison"
Quelques chiens ne sont pas des griffons. Tous les chiens sont des animaux. Quelques animaux ne sont pas des griffons.	Aucun chien n'est un oiseau. Quelques chiens sont des griffons. Quelques griffons ne sont pas des oiseaux.

Il y a cinq modes forts valides pour la quatrième figure :

a-a-i "Bamalip"	**a-e-e** "Calemes"
Tous les bassets sont des chiens. Tous les chiens sont des mammifères. Quelques mammifères sont des bassets.	Toutes les martres sont des chiens. Aucun chien est un poisson. Aucun poisson est une martre.

i-a-i "Dimatis"	**e-a-o** "Fesapo"
Quelques chiens sont das bassets. Tous les bassets sont des mammifères. Quelques mammifères sont des chiens.	Aucun basset n'est un vautour. Tous les vautours sont des oiseaux. Quelques oiseaux ne sont pas des bassets.

e-i-o "Fresison"
Aucun chien n'est un oiseau. Quelques oiseaux sont des vautours. Quelques vautours ne sont pas des chiens.

Nous voyons maintenant que l'inférence (1) était du type **a-a-a** ("Barbara"), (2) du type **e-i-o** ("Ferio") et (3) du type **e-a-e** ("Cesare").

Les noms des modes forts valides étaient combinés en des 'poèmes' mnémotechniques (cf. **?**: IV.17) :

> Barbara, Celarent primae, Darii Ferioque.
> Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundae.
> Tertia grande sonans recitat : Darapti, Felapton,
> Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison. Quartae sunt :
> Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison.

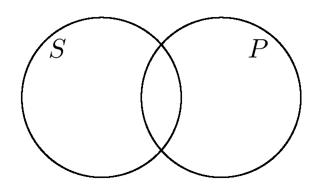
Comme la *réduction de quantité* est une inférence directe valide qui nous mène des jugements généraux aux jugements particuliers correspondants, on a pour chaque mode fort valide qui a une conclusion générale un mode faible correspondant : pour la première figure, ceci nous donne "Barbari" et "Celaront", pour la deuxième "Cesaro" et "Camestros" et pour la quatrième "Calemos".

8.3 Les diagrammes de Venn

Bien que système de syllogistique peut être axiomatisé,[6] nous ne disposons d'aucune méthode générale pour déterminer si une inférence donnée est valide ou non. Tout ce que nous pouvons faire pour déterminer la validité d'un syllogisme donné c'est d'essayer de le réduire à une des 24 formes valides. Cependant nous avons déjà remarqué (à la p. **??**) que les quatre formes de phrases catégorielles correspondent à des relations entre les extensions des termes. Si nous utilisons "$\mathsf{ext}(S)$" pour désigner l'extension de "S", nous pouvons représenter ces quatre relations ainsi :

SaP	$\Longleftrightarrow$	$\mathsf{ext}(S) \subset \mathsf{ext}(P)$	(inclusion : " S est un sous-ensemble de P")
SiP	$\Longleftrightarrow$	$\mathsf{ext}(S) \cap \mathsf{ext}(P) \neq \emptyset$	(intersection : "il y a des SP")
SeP	$\Longleftrightarrow$	$\mathsf{ext}(S) \cap \mathsf{ext}(P) = \emptyset$	(non-intersection : "il n'y a pas de SP")
SoP	$\Longleftrightarrow$	$\mathsf{ext}(S) \not\subset \mathsf{ext}(P)$	(non-inclusion : "il y a des S qui ne sont pas des P")

John Venn (1880) a developpé une méthode de vérifier la validité d'un syllogisme 'directement' en termes des extensions de ces termes. Nous pouvons symboliser les quatre types de phrases catégorielles par des diagrammes appelés "diagrammes de Venn" :



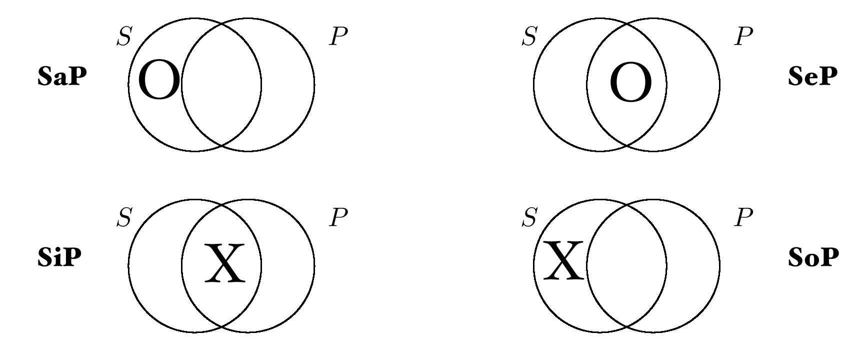
Ce diagramme nous montre une répartition de toutes les choses en quatre classes : les choses qui sont S et P se trouvent dans l'intersection des deux cercles, les choses qui sont S mais qui ne sont pas P

[6] Lukasiewicz (cf. 1934b: 373 et 1957: 46, 88) donne une axiomatisation qui consiste d'une axiomatisation de la logique propositionnelle (cf. p. 81) et des quatre axiomes suivantes :

1. Tout A est un A.
2. Quelques A sont des A.
3. Si tout A est un B et tout B est un C, alors tout A est un C. ("Barbara")
4. Si tout A est un B et quelques A sont des C, alors quelques C sont des B. ("Datisi")

se trouvent dans la partie du cercle de gauche qui a une forme de lune, choses qui sont P mais qui ne sont pas S se trouvent dans la partie droite du cercle droit et enfin les choses qui ne sont ni S ni P se trouvent en dehors des deux cercles. Un diagramme de Venn à deux cercles représente ainsi une catégorisation de tout ce qui existe en quatre catégories : les SP, les $\neg S$ et P, les S et $\neg P$ et les $\neg S \neg P$.

Dans ce diagramme, les quatre formes catégorielles sont représentées comme suit :

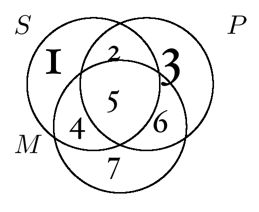


Le grand "O" signifie que la partie dans laquelle il se trouve est vide : il n'y a rien qui n'est S mais qui n'est pas P dans le cas SaP ; il n'y a rien qui n'est S et à la fois P dans le cas **SeP**. Le grand "X" signifie que la partie dans laquelle il se trouve n'est pas vide : il y a des choses qui sont S et P dans le cas **SiP** ; il y a des choses qui sont S mais pas P dans le cas **SoP**.

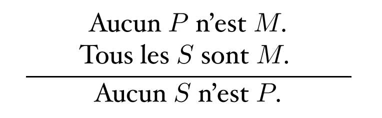
Que **SaP** et **SoP**, et également **SiP** et **SeP**, forment des paires contradictoires se montre par le fait que le diagramme du premier a un "X" où celui du deuxième a un "O" et vice versa. La contrariété de **SaP** et **SeP** vient du fait que le cercle S devient vide si on combine les deux "O" dans un diagramme ; et la sub-contrariété de **SiP** et **SoP** réside dans le fait qu'il n'y a aucun S si les deux sont fausses. Dans la syllogistique classique, il est toujours présupposé que les extensions des termes généraux considérés ne sont pas vides.

La validité des inférences directes (toujours sous la supposition que le terme sujet et le terme prédicat soient vraies d'au moins une chose et donc que les cercles entiers ne sont jamais entièrement vides) peut également être vérifiée à l'aide de diagrammes de Venn. La *conversio simplex*, par exemple, correspond au fait que les diagrammes pour **SiP** et **SeP** sont symétriques (on peut changer les dénominations "S" et "P" sans changer ce que nous dit le diagramme), la *réduction de quantité* au fait qu'aucun cercle ne devient jamais vide, etc.

Pour tester la validité des syllogismes indirectes, nous pouvons encore utiliser les diagrammes de Venn, cette fois avec trois cercles :

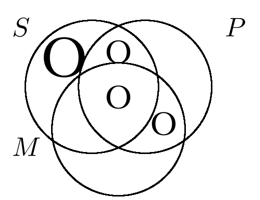


Nous mettons les "X" et "O" pour les prémisses et examinons le diagramme pour voir s'il rend vraie la conclusion. Pour **e-a-e**, par exemple, nous obtenons par cette méthode :



Aucun P n'est M.
Tous les S sont M.

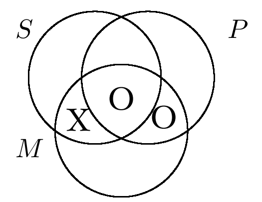
Aucun S n'est P.



Pour la première prémisse, nous avons mis "O" dans les cases 5 et 6, pour la deuxième prémisse "O" dans les cases 1 et 2. La conclusion est vraie s'il y a des "O" dans les cases 2 et 5, ce qui est le cas dans notre diagramme. La conclusion "Aucun S n'est P" s'ensuit, puisque l'intersection entre les extensions de "S" et de "P" est vide. Par la même méthode, nous pouvons vérifier les autres inférences, par exemple **e-i-o** :

Aucun M n'est P.
Quelques S sont M.

Quelques S ne sont pas P.



Du fait que nous avons fait un "X" en dehors de l'extension de "P", mais à l'intérieur de l'extension de "S", nous voyons que la conclusion s'ensuit.

8.4 Les limites de la syllogistique

Nous avons déjà remarqué quelques limites de la syllogistique (cf. p. 148) : elle ne nous procure aucune méthode mécanique pour déterminer la validité ou non-validité d'une inférence donnée sinon celle de vérifier si ou non l'inférence correspond à l'un des 24 modes valides[7] et elle nous oblige à trouver des re-formulations alambiquées pour beaucoup de phrases du langage naturel.

Bien que les diagrammes de Venn nous donnent une méthode simple et intuitive pour vérifier la validité des syllogismes, ils nous montrent également d'autres limites de la syllogistique. Considérons l'inférence suivante :

Tous mes animaux préférés sont soit des pingouins, soit vivent dans la mer.
Mes animaux préférés ne vivent pas tous dans la mer.

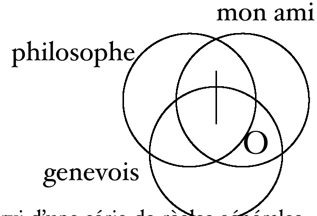
Quelques pingouins ne vivent pas dans la mer.

pingouin
vive dans la mer
X
animal préféré
O

Le diagramme montre que l'inférence est valide, bien qu'il n'y ait pas de syllogisme correspondant. C'est pourquoi la méthode des diagrammes de Venn dépasse les limites de la syllogistique : elle nous permet d'établir la validité des inférences qui sont considérées non valides par la syllogistique. Une petite modification de la méthode des diagrammes (modification apportée par Lewis (1918)) nous permet d'élargir cette classe d'inférences. Nous utiliserons une ligne pour signifier qu'au moins l'une d'un certain nombre de parties d'un diagramme de Venn n'est pas vide – une ligne reliant deux parties correspond donc à un jugement existentiel et disjonctif.

Tous mes amis genevois sont des philosophes.
Quelques-uns de mes amis sont soit des philosophes, soit des genevois.

Quelques-uns de mes amis sont des philosophes.



[7]C'est en raison de l'absence d'une telle méthode que les logiciens médiévaux se sont servi d'une série de règles générales telles que :
- Tout syllogisme valide a une prémisse universelle.
- Tout syllogisme valide avec une prémisse particulière a une conclusion particulière.
- Tout syllogisme valide avec une prémisse négative a une conclusion négative.

La ligne horizontale reliant les extensions de "philosophe et genevois et ami" et de "philosophe et non-genevois et ami" veut dire qu'une de ces deux régions n'est pas vide – il y a au moins une chose qui est ou bien ami-philosophe-genevois ou bien ami-philosophe-non-genevois. Parce que la ligne se trouve dans l'intersection des extensions de "philosophe" et de "ami", la conclusion s'ensuit.

Un désavantage commun à la syllogistique et aux diagrammes de Venn est que les deux méthodes sont limitées à un nombre très restreint de prédicats : la syllogistique ne se concerne que de trois (abrégés par "S", "M" et "P") et il est impossible de représenter plus de trois cercles qui se recoupent tous les uns les autres (essayez). La syllogistique, reconnaissant que quatre types de phrases, nous oblige souvent de donner une forme 'logique' peut intuitive à des phrases ordinaires : "Nous avons visité le musée, mais il était fermé", par exemple, devient "tous les instants pendant lesquels nous avons visité le musée sont des instants pendant lesquels il était fermé".

Un autre désavantage est le suivant : il est impossible en syllogistique ou par des diagrammes de Venn de représenter des arguments qui mélanges des quantificateurs et des connecteurs propositionnels comme le suivant :

Si tous mes amis sur MSN sont en philo, quelques amis ne sont pas sur MSN.
Soit tous mes amis sont sur MSN, soit tous mes amis sont en philo.

Si tous mes amis en philo sont sur MSN, alors quelques amis qui ne sont pas en philo y sont aussi.

Cette inférence a la forme suivante ("$F(\ldots)$" abrège "... est un ami", "$G(\ldots)$" abrège "... est en philosophie" et "$H(\ldots)$" abrège "... est inscrit sur MSN") :

Tous les F qui sont H sont G $\rightarrow$ Quelques F ne sont pas H.
Tous les F sont H $\vee$ Tous les F sont G.

Tous les F qui sont G sont H $\rightarrow$ Quelques F qui ne sont pas G sont H.

Nous pouvons nous convaincre de sa validité : supposons que tous les F qui sont G sont aussi H, mais qu'aucun F qui n'est pas G soit H (fausseté de la conclusion). Nous savons donc que tous les F qui sont H sont aussi G, ce qui établit l'antécédent de la première prémisse. Son conséquent, par contre, doit être faux. Par la deuxième prémisse, nous savons que soit tous les F sont H, soit tous les F sont G. Dans le premier cas, quelques F sont H est le conséquent de la première prémisse est donc faux. Dans le deuxième cas, tous les F sont G, et donc aussi H, par l'antécédent de la conclusion. Dans la logique des prédicats, nous formalisons cette inférence comme suit :

$$\begin{array}{c} \forall x((Fx \wedge Hx) \rightarrow Gx) \;\rightarrow\; \exists x(Fx \wedge \neg Hx) \\ \forall x(Fx \rightarrow Hx) \;\vee\; \forall x(Fx \rightarrow Gx) \\ \hline \forall x((Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx) \;\rightarrow\; \exists x(Fx \wedge \neg Gx \wedge Hx) \end{array}$$

En utilisant les équivalences "$\forall x(\phi(x)) \Leftrightarrow \neg\exists x(\neg\phi(x))$" et "$\ulcorner\neg(\phi \wedge \neg\psi)\urcorner \Leftrightarrow \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner$", nous pouvons transformer les formules en :

$$\begin{array}{c} \forall x((Fx \wedge Hx) \rightarrow Gx) \;\rightarrow\; \neg\forall x(Fx \rightarrow Hx) \\ \forall x(Fx \rightarrow Hx) \;\vee\; \forall x(Fx \rightarrow Gx) \\ \hline \forall x((Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx) \;\rightarrow\; \neg\forall x((Fx \wedge Hx) \rightarrow Gx) \end{array}$$

A présent, nous n'avons encore aucun moyen de combiner les méthodes de la logique propositionnelle avec notre analyse des phrases quantifiées (contenant des expressions comme "tous", "quelque" ou "aucun").

Le diagnostic de ces défauts communs à la syllogistique et à la méthode des diagrammes de Venn est le suivant :

1. Elles ne reconnaissent pas la distinction cruciale entre les prédicats et les noms et ne nous permettent pas de formaliser des inférences telles que "Tous les philosophes sont heureux ; Sam est un philosophe ; donc Sam est heureux".
2. Elles ne s'appliquent qu'à des prédicats appelés "unaires" (qui résultent d'une phrase par le remplacement d'un seul nom par des points) et non pas à des prédicats à plusieurs places, comme nous utilisons dans l'inférence "Marie est mon amie ; donc j'ai une amie".

L'avantage principale de la logique moderne des prédicats est qu'elle nous permet de surpasser ces deux restrictions artificielles.

8.5 Les phrases ouvertes et leur satisfaction

Pour rendre valide des inférences comme,

(5)
Tous les hommes sont mortels.
Socrate est un homme.
―――――――――――――
Socrate est mortel.

la syllogistique nous force à reconnaître des concepts sujet et prédicat tel que "chose identique à Socrate" (la prémisse mineure est alors du type SaP).[8] Nous pouvons nous demander si de telles concepts correspondent réellement à des propriétés d'objets.[9] Formalisant "Socrate est un homme" comme "toutes les choses socratisantes sont des hommes", nous n'introduisons non seulement le prédicat bizarre "socratiser" (être le maître de Platon, être le héros des dialogues platoniciens, le premier philosophes à boire la ciguë etc.), mais nous nous engageons à l'existence d'au moins une chose socratisante. Il semble bien possible, cependant, que Socrates aurait pu exister sans avoir les attributs communément attribué à lui. Dans ce cas-ci, "Socrate est un homme" serait toujours vraie, mais "toutes les choses socratisantes sont des hommes" devenait faux (puisque la syllogistique présuppose que ses termes sont vrais d'au moins une chose).

Il semble qu'une distinction nette doit être fait entre des expressions comme "Socrate" (que nous appelerons "termes singuliers") qui ont comme fonction sémantique de *se référer* à exactement une chose au monde, et des expressions comme "...est un homme" (que nous appelerons "prédicats") qui sont *vraies de* ou sont *satisfaites par* une ou plusieurs choses.[10] C'était l'élaboration d'un concept général de prédicat qui permettait à Gottlob Frege de surpasser les limites expressives de la logique traditionelle.[11]

---

[8] Il y a d'autres options : ?: 12.27 dit que le syllogisme "tout homme est tout homme ; Socrate est un homme ; donc Socrates est tout homme" est un syllogisme du type "Darii".

[9] Dans son fameux article "On What There Is" (1948, traduction française : 2004), Willard van Orman Quine s'est servi de prédicats similaires pour résoudre le problème posé par l'intelligibilité d'assertions contenant des noms propres vides comme "Pégase". Ce problème, qu'il appelle "la barbe de Platon" est que quelqu'un qui affirme que Pégase n'existe pas semble se contredire, puisque l'existence d'un référent pour "Pégase" semble être requis pour la vérité de la phrase "Pégase n'existe pas" (comme pour toute autre phrase contenant le nom "Pégase"). La solution de Quine est de remplacer le nom par un prédicat et de formuler la phrase comme "L'unique chose qui pégase n'existe pas" ($\forall x(x$ pégase $\rightarrow \neg\exists y(x = y))$) ou encore "il n'y a pas de chose qui pégase" ($\neg\exists x(x$ pégase)).

[10] Bien qu'il avait plusieurs tentatives pendant le Moyen Âge de développer une théorie des propositions singulières et en particulier de la référence des termes (*suppositio*, opposé à la *significatio*), John Stuart Mill (1895: i.ii.5) était le premier à faire une distinction nette entre des termes "connotatives" (descriptif, comme "homme") et dénotatives (non-descriptif, comme "Socrate"). Nous reviendrons sur la théorie des termes singuliers dans le ch. 9.5.

[11] Il a été remarqué par Peirce (1932: 328, 1933: 459) que les noms communs de la syllogistique deviennent superflus dès que

Le concept fondamental qui caractérise la logique moderne a été introduit par Gottlob Frege dans son *Idéographie* : c'est celui d'une *fonction*. Frege était insatisfait avec l'analyse de la grammaire classique pour plusieurs raison, dont par exemple son incapacité de rendre compte de la vacuité de la transformation de "Marc aime Marie" à "Marie est aimée par Marc" – même si ces deux phrases affirment la même chose, elles le font par deux prédications différentes.[12] Frege (1892a) a substitué, aux notions traditionnelles de "prédicat" et de "sujet", des notions plus larges : celles de fonction et d'argument (traduction française : Frege (1971b)). Considérons les expressions suivantes :

(F1) $15 \cdot 1^2 + 1$
(F2) $15 \cdot 2^2 + 2$
(F3) $15 \cdot 3^2 + 3$
(F4) $15 \cdot 4^2 + 4$
(F5) $15 \cdot 5^2 + 5$

Dans toutes ces expressions, nous reconnaissons facilement la même fonction, que nous pouvons représenter comme suit :

$\mathbf{F}'$ $15 \cdot x^2 + x$

$\mathbf{F}''$ $15 \cdot (\ldots)^2 + (\ldots)$

L'argument (chacun des nombres 1, 2, 3, 4 et 5 dans les exemples (**F1**) à (**F5**)) n'appartient pas, à proprement parler, à la représentation de la fonction : il est représenté par trois points. Les trois points représentent une "lacune" et marquent l'endroit où la fonction a besoin d'un argument pour former un tout complet. "Former un tout complet", dans le cas de (**F1**) à (**F5**), veut dire "représenter un nombre" : "$15 \cdot x^2 + x$" représente la fonction, mais pas de nombre ; "$15 \cdot 3^2 + 3$", par contre, représente un nombre précis (à savoir 138) – c'est le résultat de l'*application* de la fonction à l'argument 3. Dans d'autres utilisations des fonctions, "former un tout complet" peut vouloir dire autre chose, par exemple "faire une affirmation qui est soit vraie soit fausse" : "$15 = x^2 + x$" n'est ni vraie ni fausse, mais "$15 = 3^2 + 3$" est fausse.

L'idée principale de Frege était de voir les prédicats comme un certain type de fonctions, fonctions qui prennent un nom pour en faire une proposition. Un prédicat sera alors représente par une expression comme "$15 = x^2 + x$" ("être tel que le résultat de l'addition du carré du nombre avec lui-même donne 15").

Nous avons remarqué que nous obtenons des prédicats en effaçant des noms d'une phrase et que nous pouvons effacer plusieurs noms d'une même phrase. Dans ces cas, il faut tenir compte de la diversité des noms effacés. Si nous obtenons "... aime $\cdots$" de "Julie aime Marc" et nous nous demandons si ce prédicat est vrai de Julie et Marc, l'ordre des noms de ces deux personnes est crucial, puisqu'il est tout à fait possible que Julie aime Marc sans que Marc aime Julie. C'est pourquoi il faut distinguer les positions des arguments, par exemple, en ajoutant des indices aux trois points : "$\ldots_1$ aime $\ldots_2$" (ce qui est différent de "$\ldots_2$ aime $\ldots_1$"), "$\ldots_1$ est entre $\ldots_2$ et $\ldots_3$". Nous pouvons ainsi distinguer les occurrences de variables *coordonnées* de celles qui ne le sont pas : dans "$15 \cdot (\ldots_1)^2 + (\ldots_1)$" les deux lacunes sont coordonnées (et doivent, par conséquent, être remplies par le même nombre), bien que dans "$15 \cdot (\ldots_1)^2 + (\ldots_2)$" elles ne le sont pas : dans ce deuxième cas, elles peuvent (mais ne doivent pas) être remplies par de différents nombres. "$15 \cdot 3^2 + 3$" est donc le résultat des application des deux fonctions, mais "$15 \cdot 3^2 + 4$" n'est une application que de la deuxième.

Une manière plus simple et plus efficace d'obtenir le même effet qu'avec des trois points est de remplacer les trois points par ce qu'on appelle des *"variables"*, représentées par des lettres "x", "y", "z",

nous disposons de prédicats.

[12] Nous allons, le long des prochaines leçons, rencontrer d'autres raisons de ne pas nous laisser guider par la forme grammaticale superficielle des énoncés quand nous essayons de les formaliser dans le langage de la logique des prédicats.

"w", etc. Nous adoptons la convention que "x" représente toujours la première insertion possible dans la phrase, "y" la deuxième etc. Nous pouvons donc dire que le prédicat (il ne s'agit pas d'une phrase !) "x aime y" est vrai de Julie et Marc (dans cet ordre), mais peut être faux de Marc et Julie. En d'autres termes, le prédicat est vrai de la paire ⟨ Julie, Marc ⟩, mais ne l'est peut-être pas de la paire ⟨ Marc, Julie ⟩. Une paire se distingue d'un ensemble de deux membres par le fait qu'elle est ordonnée, c'est-à-dire qu'on peut parler de son premier et de son second membre.[13]

Comme une phrase (en logique en tout cas) peut être d'une longueur arbitraire (bien que finie), il n'y a pas de limites au nombre de noms qu'elle peut contenir.[14] Nous obtenons ainsi des prédicats d'une *adicité* (ou valence) arbitraire, l'adicité d'un prédicat étant le nombre de noms qu'il lui faut pour former une phrase. C'est pourquoi nous ne pouvons pas nous contenter des paires, mais devons parler des séquences arbitraires.[15] La relation que nous exprimons par "... est vrai de...", cependant, n'est pas seulement une relation qui subsiste entre des prédicats et des choses, mais entre des prédicats et des séquences de choses.

Au lieu de dire qu'un prédicat résulte d'une phrase en effaçant un ou plusieurs noms, nous aurions aussi pu dire qu'un nom[16] est ce qui peut se combiner avec un prédicat pour former une phrase. C'est dans cette perspective-là que nous appelons un prédicat (dans le sens logique de ce mot) une *"phrase ouverte"*. "... est un philosophe", par exemple, est une phrase ouverte dans le sens que cette expression contient une lacune (représenté par les trois points) et que cette lacune doit être remplie pour que l'expression devienne une phrase (qui sera vraie si le nom inséré désigne un philosophe et fausse autrement).[17] Une phrase ouverte, malgré son nom, n'est pas une phrase ; elle est ni vraie ni fausse – elle est vraie ou fausse *de* quelque choses. Quand elle est vraie d'un certain objets ou de certains objets, nous disons que ces objets *satisfont* la phrase. Comme nous allons voir dans le ch. 9.2, cette notion de *"satisfaction"* est la notion clef de la sémantique de la logique des prédicats.

8.6 Les objets et leur existence

Une variable, nous l'avons dit, représente une lacune dans une phrase ouverte. Dans la logique des prédicats, il y a deux manières d'obtenir une phrase complète (ou : une phrase *tout court*) d'une phrase ouverte qui contient une seule variable "x" :

---

[13]Cela ne veut pas dire que les paires ne sont pas des ensembles. Il existent différentes manières de définir des paires comme des ensembles d'un type particulier. On peut, par exemple, dire avec Kuratowski que la paire $\langle a, b\rangle$ est l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ ou avec Wiener que c'est l'ensemble $\{\{a, \emptyset\}, \{b\}\}$. La différence importante entre paires et ensembles réside dans les conditions d'identité : deux ensembles sont identiques s'ils contiennent et seulement s'ils contiennent les mêmes membres ; deux paires (ou plus généralement deux séquences) sont identiques si elles contiennent et seulement si elles contiennent les mêmes membres *dans le même ordre*. "$\{a, b\}$" et "$\{b, a\}$" désignent le même ensemble, mais $\langle a, b\rangle$ et $\langle b, a\rangle$ sont deux paires différentes ; $\{a, a\}$ est identique à $\{a\}$, mais $\langle a, a\rangle$ est différent de $\langle a\rangle$ (ce qui se vérifie facilement avec les deux définitions données).

[14]"x est un philosophe" et "x aime x" sont des prédicats unaires (d'une adicité 1), "x est le frère de y" et "x aime y" des prédicats binaires (d'une adicité 2), "x est entre y et z" un prédicats ternaire (d'une adicité 3) et ainsi de suite.

[15]La notion de "séquence" est une généralisation de celle de "paire". La différence entre séquences et ensembles est que les premières viennent avec un ordre et non pas les secondes. Nous pouvons définir une séquence à trois place, par exemple, comme une paire d'un individu et d'une paire : $\langle x, y, z\rangle := \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$.

[16]Plus exactement : un terme singulier. Un terme singulier est une expression qui désigne au plus un objet. Nous reviendrons sur cette notion dans le ch. 9.5.

[17]Dans le langage ordinaire, il n'est pas le cas en général que la phrase est fausse si le nom inséré désigne quelque chose d'autre qu'un philosophe : il est au moins contestable que "le nombre 2 est un philosophe", "Pégase est un philosophe" soient faux ou que leurs négations soient vraies. La possibilité que la phrase devienne du non-sens existe également. Suivant Frege, nous supposerons par la suite que ce n'est pas le cas pour notre langage formel, c'est-à-dire que tout prédicat est *entièrement défini* – que pour tout objet dont nous voulons parler, il est ou bien vrai de cet objet ou bien faux de cet objet. Nous traiterons, en d'autres termes, le non-sens comme fausseté. Nous reviendrons sur ce phénomène à la p. 165.

1. par le remplacement de "x" par un nom comme "Socrate";
2. par un quantificateur qui lie toutes les occurrences de "x" dans la phrase en question.

Par la première méthode, nous obtenons "Socrate est un philosophe" à partir de la phrase ouverte "x est un philosophe"; par la deuxième méthode, nous obtenons "quelqu'un est un philosophe" ou "tout le monde est un philosophe" de la même phrase. Représentant "Socrate" par "a" et "x est un philosophe" par "$F(x)$", nous pouvons formaliser ces trois possibilités comme suit :

- "Fa" ("Socrate est un philosophe") ;
- "$\exists x(Fx)$" ("Quelqu'un est un philosophe") ;
- "$\forall x(Fx)$" ("Tout le monde est un philosophe").

Dans "$\exists x(Fx)$" et "$\forall x(Fx)$", la deuxième occurrence de la variable "x" est liée par un quantificateur (existentiel dans la première, universel dans la deuxième phrase). Dans ce cas, nous parlons d'une "variable sous une assignation de valeurs".

Même si une variable sous une assignation de valeurs peut être considérée comme terme singulier (expression désignant au plus une chose), il faut quand même distinguer les quantificateurs des noms propres et des descriptions définies. L'absence de distinction entre noms et quantificateurs donne facilement lieu à des raisonnements fallacieux :

(a) Tom est venu. Donc quelqu'un est venu.

(b) Personne n'est venu. Donc quelqu'un est venu.

Le premier argument est valide, le second non, même si, d'un point de vue syllogistique, ils ont la même forme logique.[18]

Le problème avec (b) est lié à un autre défaut de la syllogistique : elle est forcée de traiter "… existe" comme un prédicat ordinaire, une thèse qui soutient souvent des arguments dits ontologiques pour l'existence de Dieu et qui a été critiquée par Kant (1787: 598, 626, 627).[19] Une autre raison pour ne pas traiter "… existe" de prédicat ordinaire est la validité du schéma d'inférences suivant :

(6) $$\frac{Fa}{\exists x(Fx)}$$

Si a est F, alors il y a au moins une chose qui est F. Nous appelons une telle inférence "généralisation existentielle" (GE).[20] Si nous substituons "… n'existe pas" à "$F \ldots$", nous arrivons à des instances

[18] Si vous n'êtes pas convaincus par cet exemple, en raison de la négation "n'" qui suit "personne" dans la deuxième phrase, considérez l'exemple suivant :

(b') Quelqu'un est venu, et quelqu'un s'est excusé de ne pas venir. Donc quelqu'un est venu et s'est excusé de ne pas venir.

Déjà les scolastiques ont remarqué que nous ne pouvons pas inférer de "Platon et Socrates disent quelque chose de vrai" qu'il y ait quelque chose de vrai dit par Platon et par Socrate (?: 12.35–36, cité d'après Prior (1955: 152)).

[19] Cf. aussi la discussion chez Kneale (1936). Un argument ontologique pour l'existence de Dieu est par exemple le suivant :

P1 Dieu a toutes les perfections.

P2 L'existence est une perfection.

C Donc, Dieu existe.

Voici une formalisation utilisant la logique de deuxième ordre qui quantifie sur les prédicats et dont on discutera dans la section 12.6 (à la p. 215) :

P1 $\forall F$ (F est une perfection $\rightarrow$ Dieu est F)

P2 $\exists F$ (F est une perfection $\wedge \forall x$ ($Fx \leftrightarrow x$ existe))

C′ $\exists F$ (Dieu est F $\wedge \forall x(Fx \leftrightarrow x$ existe))

C Dieu existe.

[20] Nous reviendrons sur ces règles dans le calcul de déduction naturelle pour la logique des prédicats (cf. 209 dans le ch. 12).

bizarres de ce schéma d'inférences telle que la suivante :

(7) $\dfrac{\text{Pégase n'existe pas.}}{\exists x(x \text{ n'existe pas})}$

Mais comment lire la conclusion ? "Il y a au moins une chose qui n'existe pas" semble être une contradiction, bien que la prémisse semble vraie. Il semble préférable de ne pas être obligé d'affirmer de telles phrases d'une cohérence douteuse. Cette inférence ne semble donc pas valide : nous ne pouvons pas, du fait que Pégase n'existe pas, inférer qu'il y a des choses qui n'existent pas.[21]

Nous retrouvons le même phénomène chez des phrases du type "tous les F sont G", que nous formalisons en logique des prédicats par "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$". Mais comment formaliser par exemple "Les licornes n'existent pas"? Essayons

Les licornes n'existent pas $\rightsquigarrow$ $\forall x(x$ est un licorne $\rightarrow$ x n'existe pas$)$

Nous avons déjà remarqué, à la p. 145, qu'une phrase affirmative universelle en syllogistique présuppose que le terme sujet n'est pas vide – c'est-à-dire qu'une phrase du type **SaP** implique une du type **SiP**. Ceci veut dire que si toutes les licornes (S) ont la propriété de non-existence (P), alors quelques licornes ont cette propriété – encore une autre manière de dire qu'il y a des choses qui n'existent pas.

Ce n'est pas le seul problème. Vu la présupposition de la syllogistique que les termes utilisées ne sont pas vides, nous n'aurions pas seulement

(8) $\dfrac{\text{Les licornes n'existent pas.}}{\forall x(x \text{ est un licorne} \rightarrow x \text{ n'existe pas})}$

mais également

(9) $\dfrac{\text{Les licornes n'existent pas.}}{\forall x(x \text{ est un licorne} \rightarrow x \text{ existe})}$

De la phrase initiale nous pouvons donc conclure que tous les licornes à la fois existent et n'existent pas – d'où nous pouvons encore conclure qu'il ne peut pas y avoir de licornes, contrairement à la présupposition de la syllogistique. La présupposition de la syllogistique que toutes les termes utilisés ne sont pas vides n'est pas seulement une restriction considérable de son utilité pour formaliser des inférences,[22], mais nous amène dans des contradictions.

La solution à ces problèmes adoptée par la logique des prédicats est double :[23]

- ne pas traiter "... existe" comme prédicat ordinaire ;
- ne pas présupposer que les prédicats utilisées sont vraies d'au moins une chose.

[21]Cette observation a également motivée le développement des logiques dites "libres" qui n'acceptent pas la validité de (GE) et plus généralement ne présupposent pas que les noms utilisés dans leur langages ne soient pas vides (aient un référent). Cf. Lambert (2002) pour en savoir plus.

[22]Cf. par ex. : "In order to justify Aristotle's doctrine as a whole it is necessary [...] to suppose that he assumed application for *all* the general terms with which he dealt. To a modern logician this seems a rather curious restriction of the scope of logic." (Kneale et Kneale (1962: 60) ; cf. également Bocheński (1956: 257ff.))

[23]Une reinterprétation des propositions categorielles sans implications d'existence a été donné par Franz Brentano (1874: ??) (livre 2, chapitre 7, §15) qui reinterprète "**SaP**" comme "rien n'est à la fois un A et n'est pas un B" ("$\neg\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$"), "**SeP**" comme "rien n'est à la fois un A et un B" ("$\neg\exists x(Ax \wedge Bx)$"), "**SiP**" comme "quelque chose est à la fois un A et un B" ("$\exists x(Ax \wedge Bx)$") et "**SoP**" comme "quelque chose est à la fois un A et n'est pas un B" ("$\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$") (Prior 1955: 166). C'est un premier pas dans la bonne direction, même si nous perdons la validité de beaucoup de syllogismes classiques.

Contrairement à la syllogistique, toutes les formules de la même forme que "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$" sont alors valides s'il n'y a pas de F, peu importe le "G" en question. Elles sont valides parce qu'il n'est pas possible qu'elles soient fausses : s'il n'y a pas de F, il est impossible d'en trouver un qui ne soit pas G.

Si "... existe" n'est pas un prédicat ordinaire, alors comment comprendre des phrases qui disent qu'une certaine chose existe ou n'existe pas ? Frege concevait "... existe" comme prédicat de deuxième ordre,[24] et cette solution est communément acceptée aujourd'hui. Dire que a existe ou que des F existent revient donc à dire que certaines phrases ouvertes sont vraies d'au moins une chose :

(10) a existe $\rightsquigarrow$ $\exists x(x = a)$

(11) des F existent $\rightsquigarrow$ $\exists x(Fx)$

La phrase ouverte dans (10) est "... est identique à a",[25] celle dans (11) est "... est F" – (10) est lu "il y a un x tel qu'il est a" ou "a existe", (11) est lu "il y a des F" ou encore "ils existent des F" – dont le nom quantificateur "*existentiel*".

Pour dire que Pégase n'existe pas ou qu'il n'y a pas de licornes, nous pouvons dire le suivant :

(12) a n'existe pas $\rightsquigarrow$ $\neg\exists x(x = a)$

(13) les F n'existent pas $\rightsquigarrow$ $\neg\exists x(Fx)$

(12) dit qu'il n'y a aucune chose dont la phrase ouverte "$x = a$" est vraie ; (13) dit qu'il n'y a aucune chose qui ne satisfait "Fx". Les deux phrases sont lues "a n'existe pas" et "il n'y a pas de F" respectivement.

C'est la quantification qui nous sert de faire des affirmations d'existence et de non-existence dans la logique des prédicats : une quantification existentielle est vraie ssi la phrase ouverte quantifiée est satisfaite par au moins un objet dans le domaine de quantification ; une quantification universelle est vraie ssi elle est satisfaites par toutes ces objets. Le domaine de quantification peut être varié, ce qui nous permet de surpasser un autre désavantage de la syllogistique. Elle ne nous permet pas de traiter explicitement d'un phénomène très commun du langage ordinaire : dans la plus grande partie des assertions générales, la généralité est implicitement restreinte. Formulé en termes de quantification, on parle d'une restriction implicite du domaine de quantification.[26] Quand je dis, par exemple, que tous parlent anglais, je ne veux pas parler d'une table ; je n'accepte pas le fait que la table ne parle pas anglais comme objection à mon assertion. Quand je dis qu'il ne reste plus de bière froide, je ne parle que des bières de mon appartement, et non pas de toutes les bières du monde. Cette restriction du domaine de quantification est facilement formalisée dans le langage des quantificateurs, mais ne peut pas être capturée formellement par le langage de la syllogistique.

---

[24] Un prédicat de deuxième ordre est un prédicat qui s'applique à des prédicats, comme par ex. "x est un prédicat". Cf. le ch. 12.6 pour en savoir plus.

[25] Nous utilisons "$=$" comme relation d'identité dans le langage objet de la logique de prédicats, et "=" pour la relation d'identité dans le méta-langage que nous utilisons pour donner sa sémantique (cf. p. 180).

[26] Nous reviendrons sur ce concept central au chapitre 9.7.

8.7 Les relations et leur quantification

Voilà quelques autres exemples de l'usage du langage de la logique des prédicats :

$$\begin{array}{rcl}
\text{“Anna est une vache”} & \rightsquigarrow & Fa \\
\text{“Anna rit”} & \rightsquigarrow & Ga \\
\text{“Anna est une vache qui rit”} & \rightsquigarrow & Fa \wedge Ga \\
\text{“Il y a une vache”} & \rightsquigarrow & \exists x Fx \\
\text{“Il y a une vache qui rit”} & \rightsquigarrow & \exists x(Fx \wedge Gx) \\
\text{“Il y a une vache et il y a quelque chose qui rit”} & \rightsquigarrow & \exists x Fx \wedge \exists y Gy \\
\text{“Toute chose est une vache”} & \rightsquigarrow & \forall x Fx \\
\text{“Toute vache rit”} & \rightsquigarrow & \forall x(Fx \rightarrow Gx)
\end{array}$$

Un quantificateur quantifie une phrase ouverte, qui peut être logiquement complexe, et qui est appelée *“la portée”* du quantificateur en question. La portée du quantificateur existentiel dans “$\exists x Fx$”, par exemple, est la phrase ouverte “Fx”, et la portée du quantificateur universel dans “$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$” est “$Fx \rightarrow Gx$”. Ce sont les différentes portées des quantificateurs existentiels qui distinguent nos formalisations de “Il y a une vache qui rit” (ce qui est faux) et de “Il y a une vache et il y a quelque chose qui rit” (ce qui est vrai) respectivement.

C'est cette construction qui permet à la logique des prédicats de surmonter la difficulté principale que rencontre la syllogistique : la généralité multiple. C'est également dû à cette notion importante que la logique des prédicats (c'est-à-dire de *tous* les prédicats) surpasse celle des prédicats unaires possède un pouvoir expressif beaucoup plus grand que cette dernière.[27]

Aux variables dans notre langage formel corresponde, dans le langage naturel, une variété d'expressions, notamment les pronoms anaphoriques. Dans beaucoup de cas, l'usage des anaphores donne naissance à des ambiguïtés et des tournures peu idiomatiques (“ce que le premier a dit au deuxième était tel que le troisième a pensé que le deuxième avait raison d'être fâché du premier”). Le fait que le langage naturel ne représente pas toujours correctement la “forme logique” d'une phrase n'est pas un simple désavantage, mais peut mener à des conséquences désastreuses, comme le montre l'exemple suivant.[28] Considérons les phrases suivantes :

(i) Tous les garçons aiment une fille.

(ii) Ce monsieur a écrit un livre sur tout.

Ces deux exemples sont des cas d'ambiguïtés structurelles : aucun constituant n'est ambigu lexicalement et pourtant la phrase complète est ambiguë. La syllogistique n'a pas les ressources qui permettent d'enlever l'ambiguïté puisqu'elle nous force à classifier chaque phrase comme étant ou bien particulière ou bien universelle.

Dans la logique des prédicats, cependant, nous pouvons réitérer des quantificateurs. “... aime $\cdots$”, par exemple, est un prédicat doublement incomplet et donc nécessite deux quantifications différentes. Afin de le compléter partiellement, nous pouvons, par exemple, quantifier sur la deuxième position argumentale. Nous obtenons “$\exists y$(... aime y)” – une expression qui est toujours incomplète : un objet

[27] Pour la logique des prédicats unaires, cf. le ch. 10.5. Le prix à payer pour ce gain d'expressivité, cependant, sera l'indécidabilité de la logique des prédicats (que nous prouverons dans la leçon 11, cf. p. 205), phénomène que nous ne retrouvons pas dans la logique des prédicats unaires

[28] Frege notamment considérait le langage ordinaire comme essentiellement imparfait, une source inévitable de tromperies.

satisfait ce prédicat juste au cas où il aime quelque chose ; s'il y a et seulement s'il y a quelque chose qui est aimé par cet objet. Le prédicat "$\exists y$(... aime y)" est donc équivalent à "... aime quelque chose". Nous pouvons maintenant le compléter : "$\forall x(\exists y(x$ aime $y))$" – une phrase qui dit que tout objet est tel que cet objet aime quelque chose – une interprétation qui laisse ouverte la possibilité que différents objets aiment différentes choses.

Nous pouvons, cependant, inverser l'ordre de ces deux étapes et obtenir un résultat différent : au lieu de d'abord quantifier existentiellement sur la deuxième position argumentale, nous pouvons d'abord lier la première position par un quantificateur universel. Ainsi nous obtenons "$\forall x(x$ aime ...)", une phrase ouverte qui est vraie d'un objet si et seulement si cet objet est aimé par tout le monde. Si nous quantifions existentiellement la position de la variable libre, nous arrivons à "$\exists y(\forall x(x$ aime $y))$" – une phrase qui dit qu'il y a quelque chose qui est aimé par tout le monde ; que tout le monde aime la même chose. Nous sommes donc arrivés à une représentation logique de la phrase structurellement ambiguë : nous avons distingué deux formes logiques différentes que l'on peut donner à **(i)**.

Imaginons que **(i)** est dit d'un groupe comprenant deux garçons et deux filles. L'ambiguïté de **(i)** réside dans le fait que deux scénarios différents peuvent rendre la phrase vraie : dans un scénario, tous les garçons aiment une fille – Paul aime Marie et Marcel aime Pauline. Dans un deuxième scénario, non seulement tous les garçons sont amoureux mais ils sont en plus tous amoureux de la même fille : Paul et Marcel aiment Pauline et personne n'aime Marie. Il y a donc une seule fille qui est aimée par tous les garçons. Ce dernier scénario correspond à la deuxième des deux interprétations suivantes de (i) :

(i′) $\forall x$ (x est un garçon $\rightarrow$ $\exists y(y$ est une fille $\wedge$ x aime $y))$

(i″) $\exists y$ (y est une fille $\wedge$ $\forall x(x$ est un garçon $\rightarrow$ x aime $y))$

La différence logique entre ces deux phrases est que dans la première, **(i′)**, le quantificateur existentiel se trouve dans la portée du quantificateur universel bien que dans la deuxième, **(i″)**, le quantificateur universel se trouve dans la portée du quantificateur existentiel. Dans **(i′)**, nous nous trouvons dans la portée du quantificateur universel lorsque nous choisissons un y qui rend vraie la phrase ouverte : nous pouvons faire dépendre notre choix du x de la valeur de "y" en question. Dans **(i″)**, cependant, nous n'avons pas cette liberté : le y doit être choisi tout au début et il est dit de ce y que tous les x l'aiment.

Nous donnerons le même diagnostic de la phrase suivante :

(ex) Toute personne est amoureuse de quelqu'un.

Avant même de se demander si la phrase (**ex**) est vraie, il faut la comprendre. Mais qu'est-ce qu'elle dit ? Il y a deux possibilités :

(dist) $\forall x \, \exists y \, (x$ aime $y)$

(**dist**) veut dire que, pour toute personne, on trouve une autre personne (qui, cependant, peut être la même)[29] telle que la première aime la deuxième. Comparez ceci à la phrase suivante :

(coll) $\exists y \, \forall x \, (x$ aime $y)$

(**coll**) dit qu'il y a une personne qui est telle que tout le monde l'aime, un/une bien-aimé(e) universel(le). On peut très bien s'imaginer des situations (contre-factuelles) où (**dist**) est vraie mais (**coll**) est fausse. L'ambiguïté de (**ex**) entre (**dist**) et (**coll**) montre que le langage ordinaire n'arrive pas très bien à distinguer des anaphores et des références implicites, un travail qui, dans des langues formelles, est

[29] Il ne faut pas oublier cette possibilité : le fait que nous formalisons une phrase avec des variables *ne nous oblige pas* de leurs assigner différentes valeurs. "x aime x", par exemple, peut être vrai de ⟨ Marc, Marc ⟩, (**ex**) peut être vrai si tout le monde s'aime, mais n'aime personne d'autre que soi-même.

fait par les variables et les quantificateurs. Nous pouvons ainsi distinguer la situation où nous arrivons à trouver, pour toute personne (∀) une personne (∃) aimée par elle, de la situation (beaucoup plus rare) ou une seule personne (∃) est aimée par tout le monde (∀). La différence entre (**dist**) et (**coll**) est alors une différence de priorité de choix : dans (**dist**), nous pouvons faire notre choix d'aimé en fonction de l'amant en question, bien que pour (**coll**) nous devons choisir une seule personne qui sera aimée par tous.

La distinction cruciale entre "∀∃" et "∃∀" n'est pas seulement importante pour l'analyse du langage ordinaire, mais peut aussi jouer un rôle important en mathématiques. Ce n'était qu'au 19ème siècle que les mathématiciens ont réussi à distinguer nettement la continuité "simple" de la continuité dite "uniforme" qui impose des restrictions plus sévères. Pour être continue, une fonction doit être "régulière" localement ($\forall\epsilon\ \exists\delta\ (|x-y| < \delta \rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon)$) : chaque différence entre ses valeurs peut être 'capturée' par une différence entre les arguments ; pour être continue uniformément, elle doit être régulière globalement ($\exists\delta\ \forall\epsilon\ (|x-y| < \delta \rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon)$) : quoique la différence entre les valeurs, une seule mesure de différence la capture. Le premier s'ensuit du deuxième mais l'inverse n'est pas vrai : il y a des fonctions qui sont continues sans être continue uniformément. Par contre, toute fonction continue uniformément est automatiquement continue.

Le même type d'ambiguïté se trouve dans le cas de **(ii)** : ou bien le monsieur en question a écrit un livre qui traite de toutes les choses **(ii″)**, ou bien, sur n'importe quel sujet, ce monsieur a écrit au moins un livre **(ii′)** :

(ii′) $\forall x\ (\exists y(y$ est un livre de ce monsieur $\wedge\ y$ est sur $x))$

(ii″) $\exists y\ (\forall x(y$ est un livre de ce monsieur $\wedge\ y$ est sur $x))$

La première phrase dit que le monsieur, le long de sa carrière, a publié sur tous les sujets ; la deuxième qu'il a publié un livre qui traite de tout.

On remarque une conséquence sémantique : **(i″)** implique **(i′)** et **(ii″)** implique **(ii′)** – si tous les garçons aiment la même fille, tous les garçons aiment au moins une fille ; quelqu'un qui a publié un livre qui traite de tout a publié sur tous les sujets. La conséquence sémantique converse, cependant, n'obtient pas : il est très bien possible que tous les garçons sont amoureux, mais ne sont pas amoureux de la même fille, et que le monsieur a publié sur tout, mais a traité de différents sujets dans différents livres. Utilisant la sémantique formelle que nous allons développer au ch. 10.3, nous avons donc le suivant, pour toute structure $\mathcal{A}$ et toute assignation de valeurs h :

$$\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x_1 \forall x_2\ (\phi) \urcorner \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x_2 \exists x_1\ (\phi) \urcorner$$

La converse, par contre, n'est pas vrai : du fait que nous trouvons un y pour tout x nous ne pouvons pas conclure que le même y va faire l'affaire pour tous les x.

Points à retenir

1. Nous obtenons des prédicats (ou phrases ouvertes) des phrases en effaçant un ou plusieurs termes singuliers.
2. La syllogistique classique distingue quatre types de phrases : **SaP**, **SiP**, **SeP**, **SoP**.
3. Ces quatre types de phrases correspondent à des relations entre les extensions des termes "S" et "P".
4. Ces relations peuvent être symbolisées à l'aide de diagrammes de Venn ; on peut ainsi vérifier, par exemple, le carré des oppositions.

5. Les inférences valides de la syllogistiques sont des inférences directes ou indirectes ; des dernières il y en a 19 principales que l'on peut mémoriser à l'aide des noms comme "Barbara", "Ferio", "Cesare" et "Felapton".
6. Les diagrammes de Venn dépassent déjà les limites de la syllogistique.
7. Les défauts principaux de la syllogistique et des diagrammes de Venn sont :
   (a) ils ne peuvent pas être combinées avec la logique propositionnelle ;
   (b) ils ne font pas de distinction entre termes singuliers et prédicats ; par conséquent, elles ne traitent de phrases existentielles que si on introduit des prédicats qui ne sont vrais d'un seul individu ;
   (c) ils ne laissent pas de place pour une 'logique des relations', ne s'appliquant qu'à des prédicats unaires.
8. Les prédicats ne sont ni vrais ni faux, mais vrais ou faux *de* certains choses ; les choses les satisfont de la même manière comme les arguments satisfont les fonctions.
9. Les variables indiquent des lacunes dans les phrases ouvertes ; les quantificateurs servent à en former des phrases complètes.
10. La formalisation à l'aide de variables permet de traiter la généralité multiple et d'expliquer la distinction entre "Tout le monde aime quelqu'un" et "Quelqu'un est aime par tout le monde".

Chapitre 9

La logique des prédicats

9.1 Quelques inférences valides de la logique des prédicats

La logique propositionnelle nous permet de formaliser des inférences qui reposent sur le comportement logique des connecteurs propositionnels. Ces connecteurs relient des phrases et en forment des phrases complexes. Dans le langage naturel, cependant, il est également possible de formuler d'autres inférences que la tradition a également considérées comme inférences logiques. En voici quelques exemples :

(1)

Tous les hommes sont mortels.
Tous les philosophes sont des hommes.
———
Tous les philosophes sont mortels.

(2)

Aucun philosophe n'est méchant.
Quelques logiciens sont des philosophes.
———
Quelques logiciens ne sont pas méchants.

(3)

Aucun homme n'est parfait.
Tous les philosophes sont des hommes.
———
Aucun philosophe n'est parfait.

Dans les trois cas, nous retrouvons toutes les caractéristiques des inférences logiques : la validité de ces inférences ne semble dépendre que de quelques mots qu'on peut appeler "logiques", comme "tous", "aucun" et "quelques"; toutes les inférences ayant la même forme que (1), (2) et (3) sont également valides ; et leur validité ne dépend pas du fait qu'il y ait ou non des êtres humains immortels ou parfaits ou des philosophes méchants.

La logique propositionnelle ne nous permet pas d'expliquer la validité de ces inférences, car elle ne prend pas en compte la structure interne des phrases simples qu'elle traite : elle traite les "p" et les "q" comme atomes et n'en analyse pas la structure interne. L'inférence (1), par exemple, serait formalisée comme "p ; q ; donc, r" – ce qui ne correspond pas à un schéma d'inférences valide de la logique propositionnelle.

Pour formaliser les trois inférences et expliquer leur validité, il faut utiliser la notion de prédicat.

Soit "H" une abréviation pour "... est un homme", "M" pour "... est mortel" et "P" pour "... est un philosophe" (où les lacunes indiquent les places où il faudrait insérer un nom pour obtenir une phrase). Étant donné ces abréviations, nous sommes en mesure de représenter (1) comme suit :

(4)

Tous les H sont des M.
Tous les P sont des H.
___
Tous les P sont des M.

Peu importe ce que nous substituons pour "H", "P" et "M" : nous obtenons des inférences valides, comme, par exemple, la suivante :

(5)

Tous les animaux sont maudits.
Tous les pingouins sont des animaux.
___
Tous les pingouins sont maudits.

Nous avons utilisé "H", "P" et "M" pour remplacer des prédicats. Mais qu'est-ce qu'un prédicat ? Observons d'abord qu'il n'y a pas de différence, d'un point de vue logique, entre "Aucun homme n'est parfait", "Il n'y a pas d'homme parfait" et "Aucun homme n'est une chose parfaite". Nous n'utilisons donc pas la notion grammaticale de "prédicat". On remarque aussi que les prédicats substitués à la place de "H", "P" et "M" peuvent être de complexité quelconque ;[1] en particulier, les prédicats peuvent être logiquement complexes, c'est-à-dire conjonctives, disjonctives, négatives et implicatives. C'est pour cela que nous devons souvent choisir l'expression inélégante "...est un x tel que ...$x \cdots$" pour les lire.

Il est important de ne pas confondre un prédicat (dans le sens que la logique donne à ce terme) avec le terme général qu'il peut contenir. "Pingouin", par exemple, est un terme général, mais le prédicat correspondant est "... est un pingouin" – le prédicat est ce qui, avec un nom, forme une phrase.[2] Nous pouvons obtenir un prédicat à partir de n'importe quelle phrase, en remplaçant au moins un nom dans cette dernière par trois points. De la phrase

(6) Robert est l'animal préféré de Sam.

nous obtenons les prédicats "... est l'animal préféré de Sam", "Robert est l'animal préféré de ..." (ce qui, pour des raisons de lisibilité, est parfois transformé en "... est tel que Robert est son animal préféré") et finalement aussi le prédicat binaire "... est un animal préféré de $\cdots$". Nous reviendrons plus tard sur les particularités de ce troisième prédicat.

La caractéristique logique la plus importante des prédicats est qu'ils peuvent être dits *vrais de* certaines choses. Le prédicat "... est un pingouin", par exemple, est vrai de tous les pingouins et n'est vrai de rien d'autre. Nous appellerons l'ensemble de toutes les choses dont un prédicat est vrai *l'extension* de ce prédicat. L'extension du prédicat "... est un pingouin", par exemple, est l'ensemble de tous les pingouins, l'extension du prédicat "... est un pingouin heureux" est l'ensemble de tous les pingouins heureux (qui est un sous-ensemble de l'ensemble de tous les pingouins) et ainsi de suite. L'extension d'un prédicat peut contenir un seul ou même aucun membre. L'extension de "... est un satellite de la

[1] Nous avons vu à la p. 143, que non seulement (1), mais l'argument suivant est également valide :

Tous les amis de mon grand-père qui vit en Australie sont soit des kangourous, soit des admirateurs de la lune.
Tous les pingouins qui ne sont ni roses ni employés par Microsoft sont des amis de mon grand-père qui vit en Australie.
___
Tous les pingouins qui ne sont ni roses ni employés par Microsoft sont soit des kangourous, soit des admirateurs de la lune.

[2] C'est pour cette raison que nous appelons les prédicats "prédicatifs" ou, suivant Frege, "insaturés".

terre" ne contient que la lune, et l'extension de "... est une licorne" est l'ensemble vide $\emptyset$.

L'extension joue le même rôle pour les prédicats que la valeur de vérité pour les phrases : dans une logique extensionnelle, on ne s'intéresse qu'aux extensions des prédicats, aux dénotations des termes singuliers et à la valeur de vérité des phrases. En logique des prédicats, une phrase singulière simple sera vraie si et seulement si la dénotation (ou le référent) du terme singulier appartient à l'ensemble qui est l'extension du prédicat. "Sam est un pinguin heureux", par exemple, est vrai si et seulement si Sam (le référent de "Sam") est un membre de l'ensemble de tous les pingouins heureux (qui est l'extension du prédicat "x est un pingouin heureux"). Cette relation de satisfaction entre des prédicats et des choses doit être nettement distinguée de la propriété des phrases d'être vraies ou fausses.

9.2 Être vrai et être vrai de

Pour dire qu'une phrase ouverte est satisfaite par (ou vraie d') un certain individu, nous formons ce que nous appellerons une *"phrase singulière"*. Une phrase singulière est une phrase qui contient un nom d'au moins un individu particulier et prédique un prédicat de cet individu (ou une relation de plusieurs individus).[3] Pour dire que Sam est triste, par exemple, nous disons que Sam satisfait la phrase ouverte "... est triste" ou que cette phrase ouverte est vraie de Sam. Pour désigner Sam nous utilisons dans la logique des prédicats ce qu'on appelle une *"constante individuelle"*, par exemple "a". Pour dire que a satisfait la phrase ouverte "Fx", nous appliquons la fonction représentée par "Fx" à un argument, représenté par une constante individuelle :

(7) Fa

(8) est la forme générale d'une phrase simple dans la logique des prédicats et consiste de trois éléments : un constante individuelle (un terme singulier, "a"), un prédicat ("Fx"), et l'application de la fonction dénotée par "Fx" à l'argument a (représentée par la juxtaposition de "F" et "a").

Selon son interprétation fregéenne, la phrase singulière (8) désigne la valeur de la fonction Fx pour l'argument a – comme les prédicats sont des fonctions d'individus à des valeurs de vérité, cette valeur est **v**, le Vrai, si Sam est triste, et elle est **f**, le Faux, s'il n'est pas le cas que Sam est triste.

Il y a cependant d'autres phrases que les phrases singulières. Quand je dis que tous les pingouins sont heureux, par exemple, ou qu'il y a un philosophe irlandais, je ne parle d'aucun pingouin et d'aucun philosophe en particulier. Il n'y a pas d'individu spécifique dont je prédique être un pingouin heureux ou un philosophe irlandais. Nous appellerons de telles phrases qui ne sont pas singulières des *"phrases générales"*.

C'est pour le traitement des phrases générales que nous utilisons des quantificateurs et des variables. Pour dire que le prédicat "x est un philosophe irlandais" est vrai d'au moins une chose, je quantifie existentiellement sur l'occurrence de la variable "x" dans cette phrase ouverte, obtenant "$\exists x$(x est un philosophe irlandais)". Pour dire que le prédicat "x est heureux" est vrai de tous les pingouins, je coordonne l'occurrence de "x" dans "x est un philosophe irlandais" avec l'occurrence de "x" dans "x est un pingouin" en quantifiant les *deux* occurrences par le *même* quantificateur : "$\forall x$(x est un pingouin $\rightarrow x$ est heureux)".

Utilisant les mêmes signes que pour les connecteurs propositionnelles, nous pouvons former des pré-

[3] Nous appelons "individu" n'importe quelle chose dénotée par une constante individuelle. Même si normalement nos individus sont des "substances premières" dans le sens Aristotélicien du terme (Sam, sa maison, ses dents et le bout de viande qui se trouve entre eux), rien ne nous empêche de traiter comme individus des évènements (son mariage), des tropes (la blancheur non-répétable de son visave), des espèces (homo sapiens sapiens) ou substances secondes (l'humanité).

dicats complexes à partir des prédicats simples, remplaçant les conditions de vérité (pour des phrases) par des conditions de satisfaction (pour des prédicats) :[4]

C¬ : Un objet a satisfait "$\neg Fx$" si et seulement si a ne satisfait pas "Fx".

C∧ : Un objet a satisfait "$Fx \wedge Gx$" si et seulement si a satisfait "Fx" et a satisfait "Gx".

C∨ : Un objet a satisfait "$Fx \vee Gx$" si et seulement si soit a satisfait "Fx", soit a satisfait "Gx".

C → : Un objet a satisfait "$Fx \rightarrow Gx$" si et seulement si soit a ne satisfait pas "Fx", soit a satisfait "Gx".

C ↔ : Un objet a satisfait "$Fx \leftrightarrow Gx$" si et seulement si soit a satisfait "Fx" et "Gx", soit ne satisfait ni "Fx" ni "Gx".

Au niveau de leurs extensions, ces conditions de satisfaction correspondent à des opérations entre des ensembles : la négation d'un prédicat aura comme extension le *complément* de l'extension du prédicat nié, la conjonction l'intersection des extensions des deux disjoints et la disjonction leur union.

Comme les phrases ouvertes ne sont ni vraies ni fausses, mais seulement vraies ou fausses *de* certains objets, la sémantique des connecteurs qui les relient ne peut pas être donnée par des tables de vérité. C'est pourquoi nous utilisons un autre concept fondamental de la sémantique, celui de satisfaction, pour expliquer leurs significations : la condition **C∧**, par exemple, donne la signification (c'est-à-dire les conditions de satisfaction) du prédicat complexe "$Fx \vee Gx$" sur la base de la signification (les conditions de satisfactions) des deux prédicats simples "Fx" et "Gx" :[5] le principe de compositionalité ne s'applique alors pas aux phrases entières, mais à des phrases ouvertes.

La condition **C¬** a une importance particulière. C'est elle qui garantit que nos prédicats sont entièrement définis (ce que nous avons déjà observé à la p. 154) : que pour tout objet dont nous voulons parler, le prédicat en question est ou bien vrai de cet objet ou bien faux de cet objet. Ceci nous oblige, par exemple, de compter comme fausses des phrases comme "César est impair", et comme vraies des phrases comme "Il n'est pas le cas que César est impair" et "Soit César est impair soit il ne l'est pas".

FINE

occurrence

9.3 Les termes singuliers

9.4 La formalisation dans la logique des prédicats

La combinaison avec un nom n'est pas la seule manière dont une phrase ouverte peut devenir une phrase et être vraie ou fausse. Considérons les phrases suivantes :

A1 Tous les philosophes sont mortels.

B1 Il n'y a rien d'entièrement noir qui est entièrement rouge.

C1 Quelques pingouins sont heureux.

D1 Quelques animaux ne sont pas des pingouins.

[4] Nous ferons ceci avec beaucoup plus de rigueur dans le ch. 10.3, utilisant la notion clef d'"interprétation".

[5] Comme dans le cas des phrases, nous voulons à strictement parler donner les conditions de satisfaction pour *n'importe quel* prédicat conjonctif, quoi que soit sa complexité logique. C'est pourquoi nous utiliserons des lettres grecques ("$\phi(x)$", "$\psi(x,y)$" etc.) dans notre traitement rigoureux dans la prochaine leçon.

Les phrases **A1** à **D1** sont complètes mais ne contiennent pas de nom : elles expriment des phrases générales (qui correspondent aux quatre types de phrases catégorielles étudiés en syllogistique). Nous discernons des connecteurs, par exemple une négation dans **D1**. Ces connecteurs, cependant, ne relient pas des phrases entières mais des prédicats, des phrases ouvertes. Quels sont les connecteurs dans **A1** et **B1** ? Les réformulations suivantes nous montrent qu'il s'agit des implications (**A1** et **B1**) et des conjonctions (**C1** et **D1**) :

A2 Si quelqu'un est un philosophe, alors il est mortel.

B2 Si une chose est entièrement noir, alors elle n'est pas entièrement rouge.

C2 Il y a au moins un pingouin et il est heureux.

D2 Il y a au moins un animal et il n'est pas un pingouin.

A2 à **D2** nous montrent également que les phrases ouvertes liées par des connecteurs ne peuvent pas être évaluées de manière indépendante des autres, puisqu'elles contiennent des pronoms ("il" dans **A2**, **C2** et dans **D2**, "elle" dans **B2**) qui dépendent, pour leurs valeurs sémantiques, de leurs antécédents dans le reste de la phrase. Ces pronoms, comme nous le verrons plus tard, correspondent à des variables dont les valeurs sont coordonnées par le quantificateur qui les gouverne.

Si nous interprétons nos phrases modèles à l'aide de la notion de satisfaction, nous obtenons les phrases métalinguistiques suivantes :

A3 Toutes les choses qui satisfont "... est un philosophe" satisfont également "... est mortel".

B3 Toutes les choses qui satisfont "... est entièrement noir" ne satisfont pas "... est entièrement rouge".

C3 Il y a des choses qui satisfont "... est un pingouin" et "... est heureux".

D3 Il y a des choses qui satisfont "... est un animal", mais qui ne satisfont pas "... est un pingouin".

Toutes ces phrases commencent par une tournure que nous appellerons "quantificateur" : pour exprimer des quantificateurs, nous préférons normalement les tournures suivantes, qui réduisent le nombre de tournures 'logiques' de quatre ("tous", "quelques", "aucun", "quelques ne ... pas") à deux ("tous" et "il y a") :

A4 Tout ce qui est un philosophe est mortel.

B4 Tout ce qui est entièrement noir n'est pas entièrement rouge.

C4 Il y a des pingouins heureux.

D4 Il y a des animaux qui ne sont pas des pingouins.

Suivant le modèle de **A2** à **D2**, nous pouvons introduire des variables pour remplacer les pronoms et rendre perspicace la manière dont les phrases ouvertes sont liées par des connecteurs :

A5 Pour tout x, si x est un philosophe, alors x est mortel.

B5 Pour tout x, si x est entièrement noir, alors x n'est pas entièrement rouge.

C5 Il y a des x tels que x est un pingouin et x est heureux.

D5 Il y a des x tels que x est un animal et x n'est pas un pingouin.

Nous retrouvons des connecteurs propositionnels ("$\rightarrow$" dans (**A5**) et (**B5**), "$\wedge$" dans (**C5**) et (**D5**), "$\neg$" dans (**B5**) et (**D5**)) qui ne relient pas des phrases, mais des phrases ouvertes. Le résultat de leur application à des phrases ouvertes est une autre phrase ouverte, logiquement complexe – les connecteurs propositionnels forment des prédicats complexes à partir de prédicats plus simples.

Bien qu'elles ne contiennent pas de noms, les phrases (**A1**) à (**D1**) (et (**A2**) à (**D2**) etc.) sont néanmoins complètes : elles peuvent être vraies ou fausses et n'ont pas besoin d'être complétées par des noms. Le mécanisme qui en est responsable est appelé *"quantification"* et représenté par les deux tournures "pour

tout” (abrégée par “$\forall$” et appelée “quantificateur universel”) et “il existe au moins un” (abrégée par “$\exists$” et appelée “quantificateur existentiel”).[6] Ces quantificateurs prennent une phrase ouverte et forment une phrase complète, exprimant que tous ou certains objets satisfont les phrases ouvertes en question. La traduction de nos exemples serait la suivante :

A6 $\forall x$ (si x est un philosophe, alors x est mortel)

B6 $\forall x$ (si x est entièrement noir, alors x n’est pas entièrement rouge)

C6 $\exists x$ (x est un pingouin et x est heureux).

D6 $\exists x$ (x est un animal et x n’est pas un pingouin)

En introduisant les connecteurs et en abrégeant les prédicats, nous obtenons les phrases suivantes comme résultat final de notre essai de formalisation :[7]

A7 $\forall x\ (\mathbf{Ph}(x) \rightarrow \mathbf{M}(x))$

B7 $\forall x\ (\mathbf{noir}(x) \rightarrow \neg\mathbf{rouge}(x))$

C7 $\exists x\ (\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{H}(x))$

D7 $\exists x\ (\mathbf{A}(x) \wedge \neg\mathbf{P}(x))$

Nous observons que nous pouvons appliquer les transformations habituelles aux connecteurs reliant les phrases ouvertes. Les lois de Morgan, la définition de “$\rightarrow$” en termes de “$\vee$” et de “$\neg$” et l’élimination de la double négation nous assurent, par exemple, que les phrases suivantes sont sémantiquement équivalentes aux phrases **A7**, **B7**, **C7** et **D7** respectivement :

A8 $\forall x\ \neg(\mathbf{Ph}(x) \wedge \neg\mathbf{M}(x))$

B8 $\forall x\ \neg(\mathbf{noir}(x) \wedge \mathbf{rouge}(x))$

C8 $\exists x\ \neg(\neg\mathbf{P}(x) \vee \neg\mathbf{H}(x))$

D8 $\exists x\ \neg(\neg\mathbf{A}(x) \vee \mathbf{P}(x))$

Il est important de distinguer les négations internes, qui portent sur les phrases ouvertes, des négations externes, qui portent sur des phrases complètes. Qu’est-ce qui arrive si nous ajoutons des négations externes à ces phrases ? La négation de **A8**, par exemple, dirait qu’il n’est pas le cas que tous les x sont tels qu’ils sont ni philosophes ni immortels – qu’il y a, par conséquent, au moins un x qui n’est ni philosophe ni immortel. La négation de **C8** dirait qu’il n’y a pas de x qui ne satisfait pas la phrase ouverte “x n’est pas un pingouin ou x n’est pas heureux” – et donc que tous les x la satisfont, que tous les x sont soit autre que des pingouins, soit ne sont pas heureux.

Dans le langage de la logique de prédicats, nous distinguons les variables telles que “x”, “y”, “z”, ... des constantes individuelles telles que “a”, “b”, “Maria”, “Sam”. La différence est que “a” et “Maria” dénotent un individu particulier, tandis que “x” et “y” dénotent des individus “arbitraires”.[8] Dans le langage ordinaire, les pronoms, les expressions anaphoriques et des expressions comme “tel que” correspondent aux variables. La formalisation d’une phrase du langage ordinaire dans la logique des prédicats se fait donc en deux étapes :

1. Nous construisons d’abord une phrase synonyme qui représente plus clairement la forme logique de la phrase initiale :

[6] Il existe d’autres manières d’abréger les quantificateurs. Pour le quantificateur universel, on utilise parfois “$(x)(\ldots x \ldots)$”, “$\bigvee x(\ldots x \ldots)$” et, en la notation dite “polonaise”, “$\Pi x(\ldots x \ldots)$” au lieu de “$\forall x(\ldots x \ldots)$”. Pour le quantificateur existentiel, on trouve “$E(x)(\ldots x \ldots)$”, “$\bigwedge x(\ldots x \ldots)$” et “$\Sigma x(\ldots x \ldots)$” à la place de “$\exists x(\ldots x \ldots)$”.

[7] Nous utilisons “$\mathbf{Ph}(x)$” pour “... est un philosophe”, “$\mathbf{M}(x)$” pour “... est mortel”, “$\mathbf{rouge}(x)$” pour “... est entièrement rouge”, “$\mathbf{noir}(x)$” pour “... est entièrement noir”, “$\mathbf{A}(x)$” pour “... est un animal”, “$\mathbf{P}(x)$” pour “... est un pingouin” et “$\mathbf{H}(x)$” pour “... est heureux”.

[8] Nous reviendrons sur cette notion problématique d’“individu arbitraire” au ch. 11.4.

"Tout existe." ⇝ "Toute chose est telle qu'elle existe."
"Tout homme est mortel." ⇝ "Tout est tel que si c'est un homme, il est mortel."
"Sam entre et rit." ⇝ "Il y a quelque chose tel que cette chose est Sam et cette chose entre et rit."

2. Nous introduisons ensuite des variables pour rendre ces dépendances encore plus explicites :

"Toute chose est telle qu'elle existe." ⇝ $\forall x(x$ existe$)$
"Tout est tel que si c'est un homme, il est mortel." ⇝ $\forall x(x$ est un homme $\rightarrow x$ est mortel$)$
"Il y a qqch. tel qui est Sam, entre et rit." ⇝ $\exists x(x =$ Sam $\wedge\, x$ entre $\wedge\, x$ rit$)$

Nous remarquons une équivalence sémantique propre aux quantificateurs : dire que tous les pingouins sont heureux revient à dire qu'il n'y a pas de pingouins qui ne sont pas heureux ; dire qu'il y a des pingouin romantiques revient à dire qu'il n'est pas le cas qu'aucun pingouin n'est romantique. Tous les F sont G si et seulement s'il n'y a pas de F qui n'est pas G. Il y a un F si seulement s'il n'est pas le cas que toutes les choses soient $\neg F$. Une phrase de la même forme que "$\forall x(\ldots x \ldots)$" est donc équivalente sémantiquement à une phrase de la même forme que "$\neg\exists x\neg(\ldots x \ldots)$", et le même raisonnement vaut pour les phrases de la même forme que "$\exists x(\ldots x \ldots)$" et de "$\neg\forall x\neg(\ldots x \ldots)$". Il n'était donc pas nécessaire d'introduire les deux quantificateurs dans le lenage : l'introduction d'un seul aurait déjà nous donnée les ressources pour définir l'autre.[9]

Cette "dualité" des quantificateurs s'explique par leurs relations à des conjonctions et disjonctions. L'affirmation universelle, de tous les pingouins, qu'ils sont heureux revient à dire que a (le plus petit pingouin) est heureux *et* que b est heureux, ...*et* que a_{100023} (le plus grand pingouin) est également heureux. De la même manière, une affirmation existentielle correspond à une disjonction : dire qu'il y ait un pingouin heureux revient à dire que soit le premier, soit le deuxième, soit le n-ième est heureux.[10]

La dualité des quantificateur peut donc être vu comme 'extension' de la dualité entre conjonction et disjonction, capturée par les lois de Morgan : comme nous pouvons 'faire entrer' une négation à une conjonction si nous nions les conjoints et en font la disjonction, nous pouvons 'faire entrer' une

---

[9]Nous avons remarqué un phénomène similaire dans la logique propositionnelle dans le ch. 3.7.

[10]Cette "correspondance" est compliquée par deux facteurs : elle n'est valide que pour les domaines de quantification finis, premièrement, et présuppose une "condition de clôture" deuxièment. S'il y avait une infinité de pingouins, en effet, la "conjonction" ou "disjonction" devenait infinie, ce qui est exclut par notre définition de "formule bien formé" pour le langage de la logique des prédicats (cf. déf. 45 à la p. 181). La nécessité d'une condition de clotûre devient évidente quand on considère que les inférences

(8) $$\frac{Ga \wedge Gb \wedge \ldots \wedge Gz}{\forall x(Fx \rightarrow Gx)}$$

et

(9) $$\frac{\exists x(Fx \wedge Gx)}{Ga \vee Gb \vee \ldots \vee Gz}$$

ne sont pas valides, même si nous réuississons en effet d'enumérer tous les F par "a", "b", ..., "z". La raison pour ceci est simplement qu'il est toujours possible qu'il y ait plus de F que ceux qui existent en réalité, et que nous requérons pour la validité la transmission *nécessaire* de la vérité des prémisses à la conclusion. Nous sommes donc obligés de rajouter une prémisse supplémentaire aux deux inférences, stipulant que notre énumeration est en effet exhaustive :

(10) $$\frac{\begin{array}{c} Ga \wedge Gb \wedge \ldots \wedge Gz \\ \forall x(Fx \rightarrow (x = a \vee x = b \vee \ldots \vee x = z)) \end{array}}{\forall x(Fx \rightarrow Gx)}$$

(11) $$\frac{\begin{array}{c} \exists x(Fx \wedge Gx) \\ \forall x(Fx \rightarrow (x = a \vee x = b \vee \ldots \vee x = z)) \end{array}}{Ga \vee Gb \vee \ldots \vee Gz}$$

négation à une quantification universelle si nous nions la phrase quantifiée et la quantifions existentiellement : comme $\wedge$ correspond à $\neg \vee \neg$, $\forall$ correspond à $\neg\exists\neg$. Schématiquement, en utilisant $\ulcorner\phi(x)\urcorner$ comme nom de n'importe quelle phrase qui contient une occurrence de la variable "x", nous obtenons ceci :

$$\ulcorner\forall x\ (\phi(x))\urcorner \iff \ulcorner\neg\exists x\ \neg(\phi(x))\urcorner$$
$$\ulcorner\exists x\ (\phi(x))\urcorner \iff \ulcorner\neg\forall x\ \neg(\phi(x))\urcorner$$

En nous servant des négations dites "externes", qui portent sur des phrases complètes, nous pouvons donc formaliser les quatre phrases considérées à l'aide d'un seul quantificateur :

A9	$\forall x(\mathbf{Ph}(x) \to \mathbf{M}(x))$	**A10**	$\neg\exists x(\mathbf{Ph}(x) \wedge \neg\mathbf{M}(x))$
B9	$\forall x(\mathbf{noir}(x) \to \neg\mathbf{rouge}(x))$	**B10**	$\neg\exists x(\mathbf{noir}(x) \wedge \mathbf{rouge}(x))$
C9	$\neg\forall x(\mathbf{P}(x) \to \neg\mathbf{H}(x))$	**C10**	$\exists x(\mathbf{P}(x) \wedge \mathbf{H}(x))$
D9	$\neg\forall x(\mathbf{A}(x) \to \mathbf{P}(x))$	**D10**	$\exists x(\mathbf{A}(x) \wedge \neg\mathbf{P}(x))$

L'équivalence sémantique entre "$\forall x(\ldots x \ldots)$" et "$\neg\exists x\neg(\ldots x \ldots)$" a une autre conséquence : elle implique que le quantificateur universel n'a pas d'"engagement existentiel' – que nous ne pouvons pas conclure du fait que tous les F sont G qu'il y a des F.[11] Cela s'explique par l'équivalence mentionnée : s'il n'y a pas de F, il n'y a pas de F qui sont G et il n'y a pas non plus de F qui sont $\neg G$. Par conséquent "$\neg\exists x(Fx \wedge Gx)$" et "$\neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$" sont des phrases vraies. Ces phrases, cependant, sont équivalentes à "$\forall x(Fx \to \neg Gx)$" et à "$\forall x(Fx \to Gx)$" respectivement. Étant donné qu'il n'y a pas de licornes, "toutes les licornes sont bleues" et "toutes les licornes ne sont pas bleues" sont deux phrases également vraies.

Il est donc significatif que nous formalisions "tous les F sont G" par "$\forall x(Fx \to Gx)$", utilisant l'implication pour restreindre le choix des x en question. Il est également significatif que nous formalisons "il y a des F qui sont des G" ou "quelques F sont des G" par "$\exists x(Fx \wedge Gx)$", utilisant la conjonction plutôt que, par exemple, l'implication. Étant donné l'interdéfinissabilité des connecteurs, "$\exists x(Fx \to Gx)$" est équivalente à "$\exists x(\neg Fx \vee Gx)$", une phrase qui n'affirme pas qu'il y a des F.

9.5 Problèmes de formalisation

Vu le gain en expressivité, la formalisation en logique des prédicats est plus difficile que celle en logique propositionelle. Considérons par exemple le phénomène de généralité multiple (ch. 8.7). La formalisation des phrases du langage ordinaire exhibant une généralité multiple en termes d'une langue de la logique de prédicats est souvent compliquée par le fait que le langage ordinaire contient beaucoup d'occurrences d'une généralité implicite, comme dans l'exemple suivant :

(**i**) Toutes les filles bien-élevées aiment un prince.

Comparée à d'autres phrases comme "toutes les filles bien-élevées aiment leur père" vs. "toutes les filles bien-élevées aiment leurs pères", (**i**) n'est pas ambigüe entre "$\forall\exists$ et $\exists\forall$, mais plutôt entre les deux phrases suivantes :

(**i**′)	$\forall x((Fx \wedge Bx) \to \exists y(Py \wedge Axy))$	toutes les filles bien-élevées aiment quelque prince
(**i**″)	$\forall x((Fx \wedge Bx) \to \forall y(Py \to Axy))$	toutes les filles bien-élevées aiment n'importe quel prince

[11] Nous avons vu à la p. 145 que ce charactéristique distingue la logique des prédicats de la syllogistique.

Pour illustrer d'autres difficultés, considérons les raisonnements fallacieux suivants :

F1 Bleu est la couleur du ciel. La couleur du ciel change. Donc bleu change.

F2 Les apôtres sont douze. Jean est un apôtre. Donc Jean est douze.

F3 Les hommes sont disséminés un peu partout sur la Terre. Jacques est un homme. Donc Jacques est disséminé un peu partout sur la Terre.

A propos de la première inférence (**F1**), il faut faire la distinction entre descriptions définis et noms propres, puisque c'étaient précisément des exemples comme celui-ci qui avaient motivés Bertrand Russell (1905) pour sa théorie des descriptions définis (traduction française : Russell (1989a)).

L'inférence (**F1**) est valide dans la logique des prédicats standard si nous la formalisons comme suit :[12]

(12)
$$\frac{\begin{array}{c}\text{bleu} = \text{la couleur de ciel}\\ \text{change(la couleur du ciel)}\end{array}}{\text{change(bleu)}}$$

(13) est valide parce qu'une et la même chose ne peut pas satisfaire et en même temps ne pas satisfaire la même phrase ouverte "… change". La théorie des descriptions définis de Russell nous conseille, cependant, de ne pas formaliser la première prémisse comme l'affirmation d'une identité, "bleu = la couleur de ciel", mais comme une prédication "la couleur de ciel(bleu)" – disant de la couleur bleu (une propriété), qu'elle satisfait la phrase ouverte "… est la couleur de ciel". Plus généralement, Russell nous conseille de formaliser une description définie comme "le roi de la France" comme suit

"Le roi de la France est chauve." $\rightsquigarrow$ $\exists! x(x \text{ est roi de la France} \wedge x \text{ est chauve})$[13]

Cette formalisation a l'avantage considérable de nous permettre une distinction entre deux interprétations de "Le roi de la France n'est pas chauve", une qui implique qu'il est poilu (et donc existe), une autre qui dit seulement que la phrase "le roi de la France est chauve" est fausse :

"Le roi de la France, il n'est pas chauve." $\rightsquigarrow$ $\exists! x(x \text{ est roi de la France} \wedge \neg(x \text{ est chauve}))$

"Il n'est pas le cas que : le rdF est chauve." $\rightsquigarrow$ $\neg\exists! x(x \text{ est roi de la France} \wedge x \text{ est chauve})$

Definite descriptions Russell ON DENOTING + Introduction to Mathematical Philosophy ch 16

Un terme singulier est une expression qui désigne exactement un objet ; selon la classification traditionnelle d'Aristote, c'est ce dont quelque chose (un prédicat) est prédiqué ou dit et ce qui ne peut pas être dit d'autre chose (de la manière d'un prédicat). Le propre d'un terme singulier est sa relation de désignation ou de référence à un et un seul objet précis. Parmi les termes singuliers, la philosophie du langage distingue au moins trois sous-espèces d'expressions : un nom propre, comme "Sam" ou "Paris", est une expression qui se réfère "directement" à un objet ;[14] une expression indexicale, comme "ceci",

---

[12] Il faut remarquer, cependant, que la logique des prédicats standard ne considère que des prédicats de premier ordre. La formalisation donnée est donc incorrecte pour plus d'une raison.

[13] Nous utilisons ici "$\exists! x(\phi(x))$" pour dire qu'il existe *exactement* une chose qui ϕ. Dans le langage naturel, "il y a un qui …x…" est souvent ambigüe entre "$\exists x(\phi(x))$" et "$\exists! x(\phi(x))$". Dans le cas de "il y a un philosophe irlandais", la bonne formulation utilise "$\exists$", dans "il a un enfant" elle utilise "$\exists!$", mais "il a fait une faute" (sans intonation particulière) peut être ambigüe entre les deux.

[14] Ceci a été contestée par beaucoup de philosophes de langage, en particulier par Frege (1892b) (traduction française : Frege (1971c)). Je suis ici la thèse célèbre de Saul Kripke (1972) que les noms sont des "désignateurs rigides" (traduction française : Kripke (1982)).

"je" ou "maintenant", désigne son référent par l'intermédiaire d'un contexte d'énonciation ;[15] et une description définie comme "le roi actuel de France" et "l'homme dans le coin" désigne au moyen de son contenu 'descriptif' (le prédicat à l'aide duquel il est formé, "… est le roi actuel de France", "… est l'homme dans le coin"). En logique des prédicats, nous ne formalisons par des constantes individuelles que des noms propres.

Dans la deuxième inférence (**F2**), nous avons affaire à un prédicat numérique "… sont douze", qui pose les mêmes problèmes que le prédicat "… existe" (cf. le ch. **??**). Nous ne pouvons donc pas les formaliser comme prédicats ordinaires, puisque autrement l'inférence suivante serait valide :

(13)
$$\begin{array}{c} \forall x(x \text{ est un apôtre} \rightarrow x \text{ est douze.} \\ \underline{(\text{...est un apôtre})\ \text{Jean}} \\ (\text{...est douze})\ \text{Jean} \end{array}$$

Comme "…existe", les prédicats numériques doivent être formalisés à l'aide du quantificateur existentiel :

il y a au moins un F	$\rightsquigarrow$	$\exists x(Fx)$
il y a au maximum un F	$\rightsquigarrow$	$\forall x \forall y\ ((Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y)$
il y a exactement un F	$\rightsquigarrow$	$\exists x\ (Fx\ \wedge \forall y\ (Fy \rightarrow y = x))$[16]
il y a au moins deux F	$\rightsquigarrow$	$\exists x \exists y\ (Fx \wedge Fy\ \wedge\ x \neq y)$
il y a au maximum deux F	$\rightsquigarrow$	$\forall x \forall y \forall z((Fx \wedge Fy \wedge Fz) \rightarrow (x = y \vee y = z \vee x = z))$
il y a exactement deux F	$\rightsquigarrow$	$\exists x \exists y\ (Fx \wedge Fy\ \wedge\ x \neq y\ \wedge\ \forall z\ (Fz \rightarrow (x = z \vee y = z)))$
il y a au moins trois F	$\rightsquigarrow$	$\exists x \exists y \exists z\ (Fx \wedge Fy \wedge Fz\ \wedge\ x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$
il y a exactement trois F	$\rightsquigarrow$	$\exists x \exists y \exists z\ (Fx \wedge Fy \wedge Fz\ \wedge\ x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge$ $\forall w(Fw \rightarrow (w = x \vee w = y \vee w = z)))$

La troisième inférence (**F3**), finalement, est la plus difficile à exclure : le diagnostic est que"… être disséminé" est un prédicat 'collectif' qui s'applique à une pluralité et ne peut pas être défini en termes de prédicats qui s'appliquent aux membres de cette pluralité.[17] Considérons les exemples suivants :

Russell et Whitehead sont des hommes.	$\Leftrightarrow$	Russell est un homme $\wedge$ Whitehead est un homme
Russell et Whitehead ont écrit les *Principia.*	$\not\Leftrightarrow$	Russell a écrit les *Principia* $\wedge$ Whitehead a écrit les *Principia*

Le fait que la deuxième équivalence ne fonctionne pas montre que "… a écrit les *Principia*", contrairement a "… est un homme", est un prédicat collectif : être co-auteur ne veut pas dire être auteur, mais être membre d'un collectif d'hommes veut dire être un homme. C'est parce qu'il s'agit d'un prédicat collectif que nous ne pouvons pas formaliser la première prémisse de (**F3**) comme :

$$\forall x\ (x \text{ est un homme } \rightarrow\ x \text{ est disséminé un peu partout sur la Terre})$$

9.6 Une classification des expressions

La logique propositionnelle, nous l'avons dit, traite des phrases et des connecteurs, la logique des prédicats traite des prédicats, des quantificateurs et des constantes individuelles. Nous avons également

[15] Ceci, au moins, d'après l'analyse classique et communément accepté qu'en a donné David Kaplan (1989).

[17] A la suite de Boolos (1984), différents auteurs ont développé une "logique plurielle", qui introduit des constantes individuelles pour des pluralités (cf. par. ex. McKay 2006). Nous reviendrons sur cette "quantification plurielle" au ch. 12.7.

dit qu'une phrase est ce qui est exprimé par une phrase complète qui peut être vraie ou fausse et qu'un prédicat est tiré d'une phrase après l'effacement d'un ou de plusieurs noms. Nous devons maintenant être un peu plus précis.

La notion de proposition, qui est une notion philosophique, ne coïncide pas avec la notion de phrase, qui est une notion grammaticale. Une phrase peut être complète du point de vue grammatical sans pour autant exprimer une proposition : "J'ai faim", pour être vraie ou fausse, a besoin d'être complétée par le contexte de l'énonciation pour attribuer une référence indexicale à "je"; dans certains contextes, cette phrase exprime la phrase qu'un certain individu, a, a faim, dans d'autres qu'un autre individu, b, a faim. Une phrase peut aussi être complexe et ainsi exprimer une phrase complexe qui contient plusieurs phrases simples. Le critère d'identification des phrases est leur capacité à être vraies ou fausses. Parallèlement à ce critère sémantique, il existe un critère purement syntaxique : une phrase (au sens logique) est une entité linguistique qui peut être combinée avec une négation externe ("il n'est pas le cas que ...").

Les différences entre les points de vue grammatical et logique se multiplient quand on prend en compte la structure interne des phrases, comme nous le faisons dans la logique des prédicats. La grammaire classique distingue des noms propres, des noms communs, des verbes, des particules, des prépositions, des adverbes et des adjectifs. La logique des prédicats ne reconnaît, cependant, que des connecteurs propositionnels, des quantificateurs, des prédicats et des termes singuliers. Les connecteurs sont les concepts formels qui nous servent à former des phrases complexes à partir de phrases simples. Un prédicat est une expression qui nous sert à attribuer une propriété. Cette propriété peut être une propriété d'une ou de plusieurs choses ; un prédicat unaire (qui résulte d'une phrase en effaçant (plusieurs occurrences d') un seul nom) attribue une propriété monadique, un prédicat binaire (tertiaire, ...) une propriété relationnelle. Syntaxiquement, un prédicat est une expression qui peut être combinée avec une négation 'interne', "... n'est pas tel que ...", qui prend un prédicat (dans sa deuxième position) et en fait un autre.

Une représentation claire et exhaustive de représenter ces différences grammaticales nous est fournie par la grammaire dite "catégorielle" (cf. Gardies 1975) qui représente les phrases par "S" et les termes singuliers par "N". Nous pouvons dire qu'un connecteur propositionnel binaire est une expression de la catégorie **S/SS**, parce qu'il prend deux phrases pour en faire une, plus complexe :[18]

Il pleut	et	Je suis triste
S	**S/SS**	**S**
	Il pleut et je suis triste	
	S	

Les autres connecteurs propositionnels binaires, "ou", "si-alors", "si et seulement si", s'appliquent également à deux phrases et en forment une phrase complexe. La négation externe s'applique cependant qu'à une seule phrase et est donc du type **S/S**.

Un prédicat unaire, d'après notre définition, est une expression qui forme, avec un terme singulier, une phrase complète, ce qui correspond au type **S/N** :

Sam		... est triste
N		**S/N**
	Sam est triste.	
	S	

[18]Un avantage de la notation de la grammaire catégorielle est qu'elle nous permet de calculer le type syntaxique de la juxtaposition de deux expressions arbitraires : la combinaison d'une expression du type **S/SS** avec deux expressions du type **S** serait du type **S**. La combinaison d'une telle expression avec une expression du type **N** sera mal-formée.

Les prédicats binaires seront du type **S**/**NN**, les prédicats ternaires du type **S**/**NNN** et ainsi de suite. Cette notation nous montre comment un prédicat binaire, combiné avec un seul terme singulier, devient un prédicat unaire (dit “relationnel”, parce qu’il est obtenu d’une relation) :

Sam ... aime $\cdots$ Maria
S/**NN** **N**
... aime Maria
N **S**/**N**
Sam aime Maria
S

L’expression “ ... aime $\cdots$” du type **S**/**NN** a été partiellement complétée par le nom “Maria” (du type **N**), ce qui produit une expression du type **S**/**N**. La relation exprimée par “... aime $\cdots$” est une propriété de la paire $\langle$ Sam, Maria $\rangle$, mais la propriété monadique exprimée par “... aime Maria” est une propriété de Sam.

La grammaire catégorielle nous permet aussi de symboliser l’autre usage que nous avons fait des connecteurs qui était de relier non pas des phrases ou phrases complètes, mais des phrases ouvertes :

Sam ... est triste et ... marié
S/**N** (**S**/**N**)/(**S**/**N**)(**S**/**N**) **S**/**N**
... est triste et marié
N **S**/**N**
Sam est triste et marié
S

Le connecteur “$\wedge$” dans cette phrase est du type (**S**/**N**)/(**S**/**N**)(**S**/**N**) – il prend deux phrases ouvertes et en forme une phrase ouverte.

La grammaire catégorielle nous permet de représenter facilement des prédicats de deuxième et troisième ordre. Un prédicat est dit “de premier ordre” s’il s’applique à des noms d’objets, c’est-à-dire à des expressions qui représentent des choses qui ne sont ni des propriétés ni des relations, mais des individus. C’est de ces prédicats que l’on a parlé jusqu’à maintenant. Un prédicat de deuxième ordre est un prédicat qui s’applique à des propriétés et à des relations et qui se combine avec des prédicats – les expressions, par exemple, “... est un prédicat” et “... s’applique à un nom d’un objet pour former une phrase” sont des prédicats de deuxième ordre. Comme un prédicat (unaire) de premier ordre est du type **S**/**N**, un prédicat de deuxième ordre sera du type **S**/(**S**/**N**). Il y a également des prédicats de troisième ordre (**S**/(**S**/(**S**/**N**))), de quatrième ordre, etc.

L’interprétation sémantique des prédicats de deuxième et de troisième ordre se fait plus intuitivement en termes d’ensembles. Supposons que la totalité des choses pour lesquelles nous disposons de noms ou dont nous voulons parler forme un ensemble D, notre *univers de discours* et notre *domaine de quantification*. Un prédicat, nous l’avons vu, est vrai de certaines de ces choses – son extension sera alors un sous-ensemble de D. Si nous identifions des prédicats ayant la même extension, nous pouvons dire que n’importe quel sous-ensemble de D (n’importe quel membre de $\mathcal{P}(D)$, c’est-à-dire de l’ensemble de tous les sous-ensembles de D) définit (ou correspond à) un prédicat – le prédicat qui est vrai de tous les objets et seulement des objets qui se trouvent dans le sous-ensemble de D en question.[19]

Si les prédicats de premier ordre sont des membres de $\mathcal{P}(D)$ (les sous-ensembles de D), les prédicats de

[19]Dans le cas où ce sous-ensemble est fini, nous pouvons facilement formuler un tel prédicat comme une disjonction d’identités : au sous-ensemble $\{a, b, c\}$, par exemple, correspondra le prédicat “$(x = a \vee x = b \vee = c) \wedge \forall y((y \neq a \wedge y \neq b \wedge y \neq c) \rightarrow y \neq x)$”.

deuxième ordre sont des membres de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(D))$ – ils sont vrais de certains prédicats (de certains sous-ensembles de D) et faux d'autres ; ils ont donc comme extensions des ensembles de sous-ensembles. Nous voyons par cette analogie que la similarité entre les différents ordres de prédicats et les différents types dans la théorie des ensembles n'est pas que superficielle, mais qu'elle est basés sur une vraie correspondence dans la grammaire catégorielle.

Cependant, les prédicats 'ordinaires' de deuxième ordre ne sont pas les seuls à tomber sous la catégorie $\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$: les autres expressions qui tombent sous ce type sont les quantificateurs de premier ordre. Les quantificateurs prennent des phrases ouvertes pour en faire des phrases complètes. Les phrases ouvertes peuvent être de différents ordres, selon qu'elles sont vraies (ou fausses) d'objets ou vraies (ou fausses) de prédicats ou vraies (ou fausses) de prédicats de prédicats etc. Les deux quantificateurs de la logique des prédicats, le quantificateur universel "$\forall x(\ldots x \ldots)$" et le quantificateur existentiel "$\exists x(\ldots x \ldots)$", ne prennent que des prédicats ou phrases ouvertes de premier ordre – ils quantifient sur des objets et sont, pour cette raison, appelés "objectuels" :

Il y a quelqu'un		... est triste
$\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$		$\mathbf{S}/\mathbf{N}$
	Il y a quelqu'un qui est triste.	
	$\mathbf{S}$	

Les quantificateurs de premier ordre sont de la même catégorie que les prédicats de deuxième ordre. Une logique ne contenant dans son langage que des quantificateurs qui s'appliquent à des phrases ouvertes de premier ordre (et qui sont, en conséquence, eux-mêmes de deuxième ordre) est appelée elle-même "de premier ordre". La logique classique des prédicats est la logique des prédicats de premier ordre et c'est elle que nous allons étudier.

9.7 Les quantificateurs

Nous avons vu comment nous pouvons nous servir du mécanisme de la quantification pour exprimer des phrases générales. Cette introduction de quantificateurs rend notre langage plus expressif. Supposons que nous voulons dire que tous les hommes sont mortels et l'exprimer dans notre langage. Vu qu'il n'y a qu'un nombre fini d'hommes (présents ou passés, au moins), nous pourrions énoncer la longue conjonction suivante :

Sylvie est mortelle $\wedge$ Sam est mortel $\wedge$ Marie est mortelle $\wedge$ Rosemarie est mortelle $\wedge$ Jean-Claude est mortel $\wedge$ Kevin est mortel $\wedge$ Roberta est mortelle $\wedge$ John est mortel $\wedge$ Claudia est mortelle $\wedge$ Robert est mortel $\wedge$ Philipp est mortel $\wedge$ $\ldots$

– une phrase certainement très longue, mais finie et bien-formée selon la logique propositionnelle. Si nous arrivons à énumérer tous les hommes, nous obtenons une phrase qui est vraie si et seulement si tous les hommes sont mortels. Néanmoins, une telle procédure, en plus de son caractère rébarbatif, aurait au moins trois autres désavantages majeurs :

1. La longue conjonction est équivalente sémantiquement à "tous les hommes sont mortels" seulement s'il n'y a qu'un nombre fini d'hommes.
2. La longue conjonction est équivalente sémantiquement à "tous les hommes sont mortels" seulement si tous les hommes ont des noms.
3. Lorsque nous parlons de tous les hommes, notre énonciation a un aspect général : nous ne voulons pas dire qu'il n'y a qu'un nombre fini d'hommes ou que nous connaissons un nom

pour chaque homme qui existe ou existait, mais nous voulons parler de la totalité des hommes, indépendamment des membres particuliers qu'elle contient.

L'usage du quantificateur universel "∀" ne tombe sous aucune de ces restrictions. Pour dire que tous les hommes sont mortels, nous disons simplement :[20]

(14) $\forall x$ (x est un homme $\rightarrow$ x est mortel)

Dans la phrase (15), nous ne parlons d'aucun homme en particulier : le quantificateur universel prend ses valeurs dans tout l'univers du discours. Nous notons deux conséquences de cette généralité : premièrement, (15) est 'confirmée' par tous les pingouins – parce que tout pingouin satisfait la phrase ouverte "$\neg$ (x est un homme) $\vee$ (x est mortel)". Deuxièmement, (15) est vraie s'il n'y a pas d'hommes ; dû à la signification de "$\rightarrow$", la phrase ouverte complexe est vraie de tout objet dont l'antécédent est faux.

Même si notre langage est devenu plus expressif en incluant des variables et des quantificateurs, qu'est-ce qui s'ensuit sur la logique ? Est-ce que nous serons toujours capable de formaliser comme valides les inférences syllogistiques ? Revenons donc sur les inférences (1), (2) et (3). En formalisant les prémisses et les conclusions dans la logique des prédicats, nous obtenons les inférences :

Tous les hommes sont mortels.		$\forall x$ (x est un homme $\rightarrow$ x est mortel)
Tous les philosophes sont des hommes.		$\forall x$ (x est un philosophe $\rightarrow$ x est un homme)
Tous les philosophes sont mortels.	$\rightsquigarrow$	$\forall x$ (x est un philosophe $\rightarrow$ x est mortel)
Aucun philosophe n'est méchant.		$\neg\exists x$ (x est un philosophe $\wedge$ x est méchant)
Quelques logiciens sont des philosophes.		$\exists x$ (x est un logicien $\wedge$ x est un philosophe)
Quelques logiciens ne sont pas méchants.	$\rightsquigarrow$	$\exists x$ (x est un logicien $\wedge$ $\neg$(x est méchant))
Aucun philosophe n'est parfait.		$\neg\exists x$ (x est un philosophe $\wedge$ x est parfait)
Tous les philosophes sont des hommes.		$\forall x$ (x est un philosophe $\rightarrow$ x est un homme)
Aucun homme est parfait.	$\rightsquigarrow$	$\neg\exists x$ (x est un homme $\wedge$ x est parfait)

Nous pouvons facilement justifier la validité de ces trois inférences :

(1) : si nous choisissons, pour vérifier la conclusion, n'importe quel individu a qui est un philosophe, la deuxième prémisse nous dit que cet individu est un homme et la première prémisse nous dit qu'en conséquence il est mortel ;

(2) : la deuxième prémisse nous dit qu'il y a un objet, appelons-le "a", qui est logicien et philosophe. Si, contrairement à ce que dit la conclusion, ce a n'était pas seulement un logicien, mais aussi méchant, alors il y aurait, contrairement à ce que dit la première prémisse, un philosophe méchant.

(3) : S'il y avait un philosophe parfait, alors ce philosophe, par la deuxième prémisse, serait un homme et alors, par la première prémisse, il ne serait pas parfait. Donc il n'y a pas de philosophe parfait.

[20] Il y a plusieurs façons de lire la phrase (15) :
1. Les hommes sont mortels.
2. Un humain est mortel.
3. Chaque homme est mortel.
4. Quiconque est un homme est mortel.

Nous utiliserons parfois la locution "tous les x sont tels que, si x est un homme, alors x est mortel" qui rend plus visible la forme logique.

Le but de la prochaine leçon (10) est de formuler une sémantique qui justifie la validité de ces schémas d'inférences.

La quantification est intimément liée au concept de "univers de discours" ou "domaine de quantification"."$\forall x(Fx)$" signifie que tous les éléments du domaine de quantification ont la propriété exprimée par le prédicat "Fx" ; "$\exists x(Fx)$" signifie qu'il existe au moins un élément du domaine de quantification qui a la propriété exprimée par le prédicat "Fx". Le domaine de quantification est l'ensemble des choses dont nous parlons[21] – les choses qui peuvent fournir des contre-exemples à nos assertions.

Le domaine de quantification nous fournit une interprétation d'une variable sous une assignation. Assigner une valeur à une variable revient à choisir un élément du domaine de quantification comme valeur pour la variable.

Comme nous avons vu à la p. 157, la quantification dans les langues naturelles est souvent restreinte : quand je dis, par exemple, qu'il ne reste plus de bière, je ne parle pas de toutes les bières dans l'univers, mais je dis plutôt qu'il n'y a plus de bières *dans mon appartement* : je dis de toutes les choses dans mon appartement qu'elles ne sont pas de bières. Dans la logique de prédicats, ceci correspond à une conditionalisation de mon assertion : "$\forall x(x$ est dans mon appartement $\rightarrow \neg(x$ est une bière$)x)$". Il est à remarquer que la quantification dans cette assertion *n'est pas* restreinte : l'affirmation ne parle pas seulement des choses dans mon appartement, mais de toutes les choses (et elle est, en plus, vraie de toutes les choses qui ne sont pas dans mon appartement, même des bières qui se trouvent ailleurs). De manière analogue, la restriction de la quantification existentielle se fait par une conjonction : la formalisation de "

Pour éviter cette conséquence, nous pouvons explicitement restreindre la quantification, comme nous faisons souvent en mathématique : quand je dis qu'il y ait un nombre entre 4 et 6, j'écrirait "$\exists x \in \mathcal{N}(4 < x < 6)$", où le prédicat "$x \in N$" n'est vraie que des nombres naturels.[22]

Points à retenir

1. La logique des prédicats formalise des inférences qui charactérisent le comportement logique des quantificateurs.
2. Une inférence de la logique de prédicats nous apprend qu'un prédicat est *vrai d'* une ou plusieurs choses s'il est vrai de certaines choses.
3. La forme générale d'une phrase simple dans la logique de prédicats est "Fa" – F est considéré comme une fonction qui prend une chose (a, dans notre exemple) et donne une valeur de vérité.
4. Nous pouvons donner des clauses récursives pour expliquer la signification (les conditions de satisfaction) d'un prédicat complexe en termes des significations (conditions de satisfaction) de ses parties.
5. Les prédicats dans la logique des prédicats sont unaires, binaires ou plus généralement n-adiques.
6. Un terme singulier est soit un nom, un indexical, un démonstratif ou une description définie.
7. La grammaire catégorielle charactérise un prédicat par le type $\mathbf{S}/\mathbf{N}$, les connecteurs de phrases par le type $\mathbf{S}/\mathbf{S}$, les connecteurs qui forment des prédicats complexes par le type $(\mathbf{S}/\mathbf{N})/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$ et les quantificateurs de premier ordre par le type $\mathbf{S}/(\mathbf{S}/\mathbf{N})$.
8. Les quantificateurs sont alors des prédicats de deuxième ordre, bien que, comme les termes

[21] Je dis "ensemble" même si cette notion relève des problématiques. Comme nous prouverons à la p. 231, il ne peut pas y avoir un ensemble universel – un ensemble qui contient tout ce qu'il y a (donc également soi-même). D'après beaucoup (cf. par ex. Williamson 2003), il est cependant parfaitement cohérent de quantifier sur tout ce qu'il y a. Dans une telle théorie, en conséquence, le domaine de quantification ne peut pas être un ensemble.

[22] Même dans ce cas, cependant, la différence entre "$\exists x \in \mathcal{N}(4 < x < 6)$" et "$\exists x(x \in \mathcal{N} \wedge 4 < x < 6)$" reste notationnelle.

singuliers, ils s'appliquent à des prédicats pour en faire des phrases.

9. Le quantificateur universel 'abrège' des conjonctions infinies ; le quantificateur existentiel 'abrège' des disjonctions infinies ; ils sont 'duales' de la même manière que le sont la conjonction et la disjonction.
10. Un quantificateur a un domaine de quantification associé qui limite le choix d'objet pour l'interprétation de la variable qu'il quantifie.

Chapitre 10

Syntaxe et sémantique de la logique des prédicats

10.1 Ensembles, relations et fonctions

Après avoir introduit les notions clés de “prédicat” et de “terme singulier”, nous devons parler d’une autre notion – celle de “fonction” –, importante surtout en mathématiques mais également dans la logique des prédicats.

référence : FIRST OCCURRENCE

Nous avons vu à la p. 46 que nous pouvons dire dans ce cas que la fonction *détermine* une valeur pour tout argument.

Mathématiquement, une fonction qui relie deux ensembles, $f : A \rightarrow B$, est une relation (un ensemble de paires dont le premier membre appartient à A et le deuxième à B ($\{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$), qui est telle que le choix de a détermine celui de b : il n’est pas le cas qu’on a $\langle a, b'\rangle$ et $\langle a, b''\rangle$ pour deux $b', b'' \in B$ différents : $(f(a) = b' \wedge f(a) = b'') \rightarrow b' = b''\}$.

Une fonction est une relation et donc un sous-ensemble du produit cartésien de son domaine et de son codomaine. Une relation binaire qui relie des éléments d’un ensemble A et d’un ensemble B est un sous-ensemble de $A \times B$, c’est-à-dire un ensemble de paires $\{\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \dots\}$ telles que tous les a_i sont des membres de A et tous les b_i sont des membres de B. Une telle relation est une *fonction* si et seulement si le membre de A détermine uniquement le membre de B de son paire, c’est-à-dire ssi $a_1 = a_2 \rightarrow b_1 = b_2$ et ainsi de suite pour les autres paires. Comme le membre de B est détérminé sans univoque par son correspondant dans A, on écrit “$f(a_i)$” pour b_i. Une fonction $f : A \rightarrow B$ avec domaine A et codomaine B est une relation, c’est-à-dire un sous-ensemble de $A \times B$ qui satisfait cette condition supplémentaire.

Compositionalité de satisfaction 9.2

Maintenant compositionalité de référence

10.2 Le langage $\mathcal{L}^+$

Afin de pouvoir formaliser les inférences qui nous intéressent, nous devons d'abord élargir la syntaxe de notre langue. Dans la cinquième leçon (pp. 70 et suivants), nous avons défini le langage $\mathcal{L}$ qui consiste des formules propositionnelles composées de phrases simples et de connecteurs propositionnels. Nous élargissons maintenant notre alphabet et adoptons une nouvelle définition, plus large, de ce qu'est une formule bien-formée :

Définition 42. *L'alphabet du langage $\mathcal{L}^+$ de la logique des prédicats consiste en les signes suivants :*

1. *des signes logiques :*
   (a) *les connecteurs "$\neg \ldots$" ("ne-pas"), "$\ldots \wedge \cdots$" ("et"), "$\ldots \vee \cdots$" ("ou"), "$\ldots \rightarrow \cdots$" ("si-alors) et "$\ldots \leftrightarrow \cdots$" ("ssi") ;*
   (b) *les quantificateurs "$\forall x(\ldots x \cdots)$" ("pour tout x") et "$\exists x(\ldots x \cdots)$" ("il y a au moins un x") ;*
   (c) *le signe d'identité : "$\ldots = \cdots$" ("est identique à") ;*
   (d) *des variables pour des individus : "x_i" pour tout $i \in \mathbb{N}$;*
2. *des signes non-logiques :*
   (a) *des signes pour les relations : "R_i" pour tout $i \in \mathbf{I}$;*
   (b) *des signes pour les fonctions : "f_i" pour tout $i \in \mathbf{J}$;*
   (c) *des constantes pour des individus : "c_i" pour tout $i \in \mathbf{K}$;*
3. *des signes auxiliaires : parenthèses, virgules*

Nous appelons les signes "$\forall$" et "$\exists$" des *"quantificateurs"*, les expressions de la même forme que "$\forall x$" et "$\exists x$" des *"quantifications des variables"* et les phrases de la forme "$\forall x(\ldots x \cdots)$" et "$\exists x(\ldots x \cdots)$" des *"phrases quantifiées"*. Nous écrivons "$=$" pour le signe de la relation d'identité dans la langage objet pour le distinguer de "$=$" qui représente la relation d'identité dans le métalangage. Nous abrégeons "$\neg(\ldots = \ldots)$" par "$\ldots \neq \ldots$" et adoptons les mêmes conventions d'économie de parenthèses que pour la logique propositionnelle.

Notons que $\mathcal{L}^+$ contient $\mathcal{L}$, du moins si nous nous imaginons toutes les phrases simples de $\mathcal{L}$ composées d'un prédicat (relation unaire) et d'une constante individuelle "Fa" : ceci veut dire qu'une formule bien-formée de $\mathcal{L}$ sera aussi une formule bien-formée de $\mathcal{L}^+$.[1]

Les signes non-logiques de notre alphabet jouent le rôle des phrases primitives de la logique propositionnelle : comme "p", "q" etc. (ou "p_1", "p_2", "p_3" etc.) sont des abréviations arbitraires pour les phrases de notre langage objet que nous considérons comme logiquement simple, les signes "R", "f" et "c" (ou "R_1", "R_2", "R_3" ..., "f_1", "f_2", "f_3", ... "c_1", "c_2", "c_3" etc.) nous servent pour abréger n'importe quel signe de relation, de fonction et n'importe quelle constante. Comme dans le cas de la logique propositionnelle, on peut toujours s'imaginer ces signes remplacés par des expressions du français (du type syntaxique correspondant). Pour les prédicats unaires, nous utilisons souvent "F", "G", "H" etc.

Les ensembles $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ sont des ensembles d'indices qui nous servent à distinguer les différents symboles pour les relations, les fonctions et les individus. Au lieu de "x_1", "x_2", "x_3", nous écrivons parfois "x", "y", "z" pour les variables. Nous abrégeons l'ensemble de toutes les variables de la langue $\mathcal{L}^+$ par "$\mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+)$".

Les relations et les fonctions peuvent être unaires, binaires, tertiaires et ainsi de suite. C'est pourquoi nous appelons une "*langue*" $\mathcal{L}^+$ un alphabet – incluant un choix précis de signes non-logiques – avec

[1] Une autre provision est nécessaire : les connecteurs propositionnels, définis dans le langage de la logique propositionnelle comme reliant des phrases, relient dans la logique des prédicats des phrases qui peuvent être complètes *ou* ouvertes. Ceci veut dire que les connecteurs dans $\mathcal{L}$ sont toujours du type $\mathbf{S}/\mathbf{SS}$ (cf. p. 172), bien que ceux de $\mathcal{L}^+$ soient ambiguës entre $\mathbf{S}/\mathbf{SS}$ et $(\mathbf{S}/\mathbf{N})/(\mathbf{S}/\mathbf{N})(\mathbf{S}/\mathbf{N})$.

un ensemble $\mathbf{K}$ d'indices pour les constantes et deux fonctions $\lambda : \mathbf{I} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mu : \mathbf{J} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ qui déterminent l'adicité de nos signes de relations et de fonctions.[2] Une langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ pour la logique des prédicats est donc composée de connecteurs, de quantificateurs, du signe d'identité, d'une infinité de variables individuelles, d'un certain nombre de relations et de fonctions ayant des adicités spécifiques (déterminées par λ et μ) et d'un certain nombre de constantes individuelles.

Nous pouvons maintenant définir ce qu'est un *terme* (singulier) de notre langue $\mathcal{L}^+$:

Définition 43 (Termes). *Les termes d'une langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ sont définis par les clauses récursives :*

1. *Toute variable "x_i" ($i \in \mathbb{N}$) est un terme.*
2. *Toute constante "c_i" ($i \in \mathbb{N}$) est un terme.*
3. *Si "t_1","t_2", ... ,"$t_{\mu(j)}$" sont des termes ($j \in \mathbf{J}$), alors "$f_j(t_1, t_2, \ldots, t_{\mu(j)})$" est un terme.*

Puisqu'elle utilise le prédicat à définir ("... est un terme"), cette définition est récursive, comme le sont aussi les définitions de formule atomique et de formule que nous donnerons par la suite.[3] Les termes sont les expressions de notre langage qui nous servent pour désigner les objets du domaine de discours. Nous définissons également les formules atomiques, qui jouent le rôle des phrases simples de la logique propositionnelle :

Définition 44 (Formules atomiques). *ϕ est une formule atomique de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ si et seulement si un des suivants est le cas :*

1. *ϕ est de la forme "$t_1 = t_2$" pour deux termes "t_1" et "t_2";*
2. *ϕ est de la forme "$R_i(t_1, t_2, \ldots, t_{\lambda(i)})$" pour des termes "$t_1$","$t_2$", ... ,"$t_{\lambda(i)}$" et $i \in \mathbf{I}$.*

Ayant à notre disposition l'équivalent de phrases simples, nous pouvons construire les formules complexes, en imitant la procédure pour les connecteurs de la logique propositionnelle :

Définition 45 (Formules). *ϕ est une formule de la langue $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ si et seulement si un des suivants et le cas :*

1. *ϕ est une formule atomique ;*
2. *ϕ est de la forme $\ulcorner(\neg\psi)\urcorner$ pour une formule ψ ;*
3. *ϕ est de la forme $\ulcorner(\psi \wedge \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \vee \chi)\urcorner$, $\ulcorner(\psi \to \chi)\urcorner$ ou $\ulcorner(\psi \leftrightarrow \chi)\urcorner$, pour des formules ψ et χ ;*
4. *ϕ est de la forme $\ulcorner\forall x_i(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_i(\psi)\urcorner$ pour une formule ψ et une variable "x_i", $i \in \mathbb{N}$.*

Nous économisons des parenthèses par les mêmes conventions que dans le cas de la logique propositionnelle. Nous écrivons "$\forall x, y, z(\ldots)$" au lieu de "$\forall x\ (\ldots \forall y\ (\ldots \forall z(\ldots) \ldots) \ldots)$" et "$\exists x, y, z(\ldots)$" au lieu de "$\exists x\ (\ldots \exists y\ (\ldots \exists z(\ldots) \ldots) \ldots)$". Il est à remarquer que nous considérons comme bien-formées des quantifications vides – des phrases contenant des quantificateurs qui portent sur des phrases entières comme "$\forall x(Fa)$" et "$\exists y \exists x(Fx)$".

[2]Nous exluons une adicité de 0. Alternativement, nous aurions pu définir les constantes individuelles comme des fonctions d'adicité 0.

[3]Ceci signifie que notre définition a la forme suivante :
1. Toute variable est un terme.
2. Toute constante est un terme.
3. Tout nom pour la valeur d'une fonction pour un référent d'une ou de plusieurs expressions des catégories 1 et 2 est un terme.
4. Tout nom pour la valeur d'une fonction pour un référent d'une ou de plusieurs expressions des catégories 1, 2 et 3 est un terme.
5. Tout nom pour la valeur d'une fonction pour un référent d'une ou de plusieurs expressions des catégories 1, 2, 3 et 4 est un terme.
6. ...

La récursion dans la clause (3) de la définition donnée nous permet d'abréger les conditions (3), (4), (5) etc. de cette définition itérative (c'est-à-dire non-récursive), qui a le défaut (considérable !) d'être d'une longueur infinie.

Il est crucial pour la sémantique de la logique des prédicats de distinguer entre les phrases complètes qui sont vraies ou fausses et des phrases ouvertes qui sont vraies ou fausses *de* certains objets. Cette distinction nous oblige de dire quand une variable a une occurrence "libre" dans une formule. Nous adoptons donc la définition suivante, qui nous fournit une manière plus rigoureuse de parler de ce que nous avons appelé, de manière métaphorique, un "trou" dans une phrase ouverte :

Définition 46 (Occurrence libre). *Si ϕ est une formule et "x_i" une variable, nous disons que "x_i" a une occurrence libre dans ϕ si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*

1. *ϕ est une formule atomique et contient "x_i";*
2. *ϕ a la forme $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et "x_i" a une occurrence libre dans ψ;*
3. *ϕ a la forme $\ulcorner\psi\wedge\chi\urcorner$, $\ulcorner\psi\vee\chi\urcorner$, $\ulcorner\psi\rightarrow\chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi\leftrightarrow\chi\urcorner$ et "x_i" a une occurrence libre soit dans ψ, soit dans χ;*
4. *ϕ a la forme $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$, $i \neq j$ et "x_i" a une occurrence libre dans ψ.*

Une variable a une occurrence libre dans une formule si elle n'y est pas partout gouvernée par un quantificateur correspondant. Une expression est une phrase ouverte si et seulement si elle contient au moins une occurrence libre d'une variable. Par conséquent, nous pouvons définir :

Définition 47 (Phrases). *Une phrase est une formule qui ne contient aucune occurrence libre d'une variable.*

Nous abrégeons par "ϕ", "ψ" etc. des noms pour des phrases arbitraires et par "$\ulcorner\phi(x)\urcorner$", "$\ulcorner\psi(x,y)\urcorner$" des noms pour des phrases ouvertes contenant des occurrences libres des variables "x" et des variables "x" et "y" respectivement.[4] Les résultats de la substitution des constantes individuelles "a" et "b" pour les variables sont désignés par "$\ulcorner\phi(a)\urcorner$" et "$\ulcorner\psi(a,b)\urcorner$" respectivement.

Nous disons que les occurrences de variables qui ne sont pas libres sont "liées" – liées par un quantificateur dans la portée duquel elles se trouvent.[5]

Comme les connecteurs, les quantificateurs ont aussi une *portée* – la phrase ouverte qui est gouvernée par le quantificateur. La distinction entre

(i) Personne n'est heureux et personne n'est honnête.
(ii) Personne n'est heureux et honnête.

est que le premier quantificateur universel dans la première phrase ne gouverne que la phrase ouverte simple "x est heureux" bien que celui dans la deuxième phrase le quantificateur gouverne le phrase ouverte complexe "x est heureux et x est honnête":

(i′) $\forall x\ \neg(x$ est heureux$)\ \wedge\ \forall x\ \neg(x$ est honnête$)$
(ii′) $\forall x\ \neg(x$ est heureux $\wedge\ x$ honnête$)$

Par la première phrase, je fais deux assertions : que personne n'est heureux et que personne n'est honnête – s'il y a quelque chose qui est heureux ou s'il y a quelque chose qui est honnête j'ai également tort. Par la deuxième phrase, cependant, je fais une assertion beaucoup plus faible : je dis que personne n'est heureux et honnête *en même temps* – que tous ce qui sont heureux ne sont pas honnêtes et que tous ce qui sont honnêtes ne sont pas heureux. Nous définissons la portée d'un quantificateur :

[4] Nous avons besoin des demi-crochets de Quine puisque les expressions ""... est triste"(x)", "". . . aime $\cdots$"(x,y)" ne sont pas des formules bien-formées. Les expressions "x est triste", "x aime y" (ou, à titre équivalent, "... est triste" et ". . . aime $\cdots$"), par contre, que l'on obtient en substituant "... est triste" pour $\phi(\ldots)$ et ". . . aime $\cdots$" pour $\psi(\ldots,\cdots)$, sont des phrases ouvertes bien-formées.

[5] Voici quelques exemples. La variable "x" a une occurrence libre dans toutes les expressions suivantes : "x", "Fx", "$Fx\wedge Fy$", "$\exists y(Rxy)$", "$f(x)$" et "$\forall y\exists z(Fx\rightarrow Ryz)$". Elle a aussi une occurrence libre dans "$\exists x(Fx)\wedge Gx$" (la deuxième) et dans "$\forall y(Rxy)\rightarrow\exists x(Fx)$" (la première).

Définition 48 (Portée). *Si ϕ est une formule qui contient une quantification d'une variable "x" (ou bien "$\forall x$" ou bien "$\exists x$"), nous appelons la portée de la variable "x" dans ϕ la plus petite formule qui suit la quantification de "x".*

Dans les trois formules suivantes, nous avons deux occurrences d'un quantificateur universel :

Q1 $\forall x(Px) \rightarrow (\forall x(Qxy) \vee Rx)$

Q2 $\forall x(Px \rightarrow (\forall x(Qxy) \vee Rx))$

Q3 $\forall x(Px \rightarrow \forall x(Qxy \vee Rx))$

Dans l'implication **Q1**, la portée de premier quantificateur universel qui lie la variable "x" est "Px", dans la quantification universelle **Q2** c'est "$Px \rightarrow \forall x(Qxy)) \vee Rx$" et dans **Q3** c'est "$Px \rightarrow \forall x(Qxy \vee Rx)$". La portée de la deuxième quantification de "x", dans **Q1** et dans **Q2**, est "Qxy" et "$Qxy \vee Rx$" dans **Q3**. La variable "x" a une seule occurrence libre dans **Q1** (la troisième) et n'a pas d'occurrence libre dans **Q2** ou **Q3**. La variable "y", cependant, a des occurrences libres dans chacune des trois phrases considérées.

10.3 La sémantique de la logique des prédicats

Après avoir défini, de manière rigoureuse, ce qu'est une langue pour la logique des prédicats, nous allons maintenant montrer comment il faut *interpréter* une telle langue, en donnant une sémantique pour la logique des prédicats. Une interprétation d'une formule du langage de la logique propositionnelle consiste en l'attribution de valeurs de vérité à toutes les phrases simples que cette formule contient ; une telle attribution correspond à une ligne de la table de vérité pour le connecteur principal de la formule en question. Malheureusement, la sémantique de la logique des prédicats est compliquée par deux facteurs, absents au cas de la logique propositionnelle :

1. la présence des signes non-logiques 'sub-sententiels' dans notre alphabet de base ;[6]
2. la présence des variables et, en conséquence, des phrases ouvertes.

La première difficulté signifie que nous ne pouvons pas simplement attribuer des valeurs de vérité à des phrases complètes, mais que nous sommes obligés d'interpréter les constantes, les signes de relations et les signes de fonctions. C'est pourquoi nous introduisons la notion d'une "structure". La deuxième difficulté entraîne que même une interprétation du vocabulaire non-logique ne suffira pas comme interprétation de notre langue, puisque nous devons interpréter également les phrases ouvertes : nous avons besoin de la notion d'une "assignation de valeurs" aux variables contenues dans une formule.

La définition suivante détermine quelles seront les valeurs des termes et des prédicats de notre langage. Pour les constantes et les variables, nous devons fixer un ensemble d'objet comme univers de discours – cet ensemble contient tous les individus dont nous voulons parler à l'aide du langage en question.[7] Aux signes de relations correspondront des relations à l'intérieur de cet ensemble et aux signes de fonctions des fonctions de cet ensemble dans cet ensemble.[8]

---

[6]Une expression bien-formée est appelée 'sub-sententielle' si elle ne contient pas de phrase entière.

[7]Nous reviendrons à la question des univers de discours vides plus tard, dans la leçon 11.

[8]Voici quelques exemples de structures :
1. l'ensemble de tous les êtres humains, avec la relation d'amour, la fonction exprimée par "la mère de ..." et deux constantes individuelles, "Sam" pour Sam et "Marie" pour Marie ;
2. l'ensemble de tous les animaux, avec les relations exprimées par "x est un kangourou" et "x adore y", aucune fonction

Définition 49 (Structures). *Soit $\langle \mathcal{L}^+, \mathbf{K}, \lambda, \mu \rangle$ une langue de la logique des prédicats. Une structure $\mathcal{A}$ pour $\mathcal{L}^+$ consiste en :*

1. *un ensemble non-vide $|\mathcal{A}|$, appelé "l'univers de discours" ou le "domaine de quantification" de $\mathcal{A}$;*
2. *une interprétation de tous les signes de relations : une fonction qui attribue à tout $i \in \mathbf{I}$ une relation $R_i^{\mathcal{A}}$ sur $|\mathcal{A}|$ avec $\lambda(i)$ places argumentales, c'est-à-dire un sous-ensemble $R_i^{\mathcal{A}} \subset |\mathcal{A}|^{\lambda(i)}$.*[9]
3. *une interprétation de tous les signes de fonctions : une fonction qui attribue à tout $j \in \mathbf{J}$ une fonction $f_j^{\mathcal{A}}$ sur $|\mathcal{A}|$ avec $\mu(j)$ places argumentales, c'est-à-dire une fonction $f_j^{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^{\mu(j)} \to |\mathcal{A}|$.*
4. *une interprétation de toutes les constantes, qui attribue à tout $k \in \mathbf{K}$ un élément fixe $c_k^{\mathcal{A}}$ de $|\mathcal{A}|$.*

Nous utilisons des superscripts pour rendre clair que "$R^{\mathcal{A}}$", "$f^{\mathcal{A}}$" et "$c^{\mathcal{A}}$" désignent, respectivement, une relation, une fonction et un élément de l'univers de discours qui nous servent d'interpréter le signe de relation "R", le signe de fonction "f" et la constante "c" dans la structure $\mathcal{A}$.[10] Nous appelons une telle structure une *"interprétation"* de notre langue et nous disons que nous "interprétons" les formules de cette langue dans la structure en question.

Prenons une phrase de notre langage objet, par exemple "$R(a, b)$". Nous savons, étant données nos conventions typographiques, que "R" représente une relation et que "a" et "b" sont des constantes individuelles, représentant des objets de notre domaine. Une interprétation de ces signes consistera à une assignation d'une relation précise et des référents particuliers à "R", "a" et "b". Nous pouvons, par exemple, interpréter cette phrase dans l'ensemble de toutes les personnes, assigner la relation d'amour à "R", Marie à "a" et Jean à "b". La phrase sera donc vraie s'il est le cas et seulement s'il est le cas que Marie aime Jean.

Notons que la définition d'une structure ne nous dit rien sur l'interprétation des phrases ouvertes. Si nous prenons "$R(a, x)$" comme exemple, nous savons seulement qu'un objet satisfait cette phrase ouverte si et seulement si cet objet est aimé par Marie. Mais comment pouvons-nous rendre cette relation exprimée par "... est vrai de $\cdots$" plus précise ? Dans le contexte d'une structure donnée, nous pouvons assigner des valeurs aux occurrences libres de nos variables :

Définition 50 (Assignations de valeurs). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats et $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$. Une assignation de valeurs pour $\mathcal{L}^+$ est une fonction h qui assigne à toute variable x_i ($i \in \mathbb{N}$) exactement un élément de l'univers de discours :* $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$.

Une assignation de valeurs, en d'autres termes, est une interprétation 'conditionnelle' des variables, 'conditionnelle' parce qu'elle ne les interprète pas au niveau d'une structure (une possibilité logique), mais à l'intérieur d'une structure. L'assignation de valeurs nous permet, dans certaines conditions, de traiter les phrases ouvertes comme des phrases complètes.[11] La signification d'une phrase ouverte,

et des constantes individuelles "c_1", "c_2", ..., "c_n" pour tous les kangourous ;

3. l'ensemble de tous les nombres naturels, avec la relation exprimée par "$x \leq y$", les fonctions de soustraction, addition et multiplication et deux constantes individuelles pour les nombres 0 et 1.

[9] "$|\mathcal{A}|^{\lambda(i)}$" désigne un produit cartésien, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les séquences, à $\lambda(i)$ membres, d'éléments de $|\mathcal{A}|$:

$$|\mathcal{A}|^{\lambda(i)} \quad := \quad \underbrace{|\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}| \times \ldots \times |\mathcal{A}|}_{\lambda(i) \text{ fois}}$$

[10] Alternativement, nous aurions pu dire qu'une structure $\mathcal{A}$ est une séquence de quatre éléments, $\mathcal{A} = \langle |\mathcal{A}|, h_{\mathbf{I}}, h_{\mathbf{J}}, h_{\mathbf{K}} \rangle$, consistant d'un ensemble $|\mathcal{A}|$, d'une fonction qui assigne à tout signe de relation son interprétation $h_{\mathbf{I}} : R_i \mapsto R_i^{\mathcal{A}}$, une autre fonction qui assigne à tout signe de fonction son interprétation $h_{\mathbf{J}} : f_J \mapsto f_j^{\mathcal{A}}$ et une fonction qui assigne à toute constante un élément de l'univers de discours : $h_{\mathbf{K}} : c_k \mapsto c_k^{\mathcal{A}} \in |\mathcal{A}|$.

[11] Ceci n'est pas tout à fait exact : il serait plus adéquat de dire qu'une assignation de valeurs nous permet de définir une notion générale, celle de la satisfaction, qui s'applique également aux phrases ouvertes et complètes et qui nous permet de définir la

telle que "x aime Marie", dépendra de l'assignation de valeurs dans le sens qu'une assignation de Sam à "x" nous donnera une phrase vraie, mais une assignation de Frédérique à "x" une phrase fausse. Pour éviter l'ambiguïté, il est également important qu'une assignation de valeurs soit une fonction : toute occurrence d'une variable doit être assignée à un seul objet.

Une structure et une assignation de valeurs, prises ensemble, déterminent de quels objets nous parlons à l'aide de nos expressions du langage objet : la structure en question nous fournit les référents des constantes individuelles. Les fonctions étant également interprétées dans la structure, nous pouvons donc déterminer sans univoque la référence ou la désignation de tous nos termes singuliers :

Définition 51 (Désignation de termes). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$ et $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs. La désignation $\overline{h}(t)$ d'un terme "t" de $\mathcal{L}^+$ sous cette assignation de valeurs est définie comme suit :*

1. *si "t" est une variable, $\overline{h}(t)$ est $h(t)$;*
2. *si "t" est une constante "c_k", $\overline{h}(t)$ est $c_k^{\mathcal{A}}$;*
3. *si "t" est un terme de la forme "$f_j(t_1, \dots t_{\mu(j)})$", alors $\overline{h}(t)$ est $f_j^{\mathcal{A}}(\overline{h}(t_1), \dots, \overline{h}(t_{\mu(j)}))$.*

Une interprétation détermine à quels objets se réfèrent nos termes singuliers et quels objets sont représentés par nos variables : c'est ainsi qu'une assignation de valeurs h et une structure $\mathcal{A}$ déterminent la fonction $\overline{h}$ qui associe à tous nos termes singuliers et nos variables leurs désignations (dans une structure et sous une assignation de valeurs).

Comme nous avons vu à la p. 165 de la sct. 9.2, nous pouvons donner des conditions de satisfaction pour des prédicats logiquement complexes, ainsi expliquant leurs significations par la signification de leurs parties.

Au lieu de dire que les phrases ouvertes ne sont ni vraies ni fausses mais vraies ou fausses *de* certains objets, nous pouvons maintenant dire qu'elles sont vraies ou fausses *sous une assignation de valeurs* aux variables dont elles contiennent des occurrences libres. Cette notion de vérité-sous-une-assignation-de- valeurs est la notion clef de la sémantique de la logique des prédicats :

Définition 52 (Vérité sous un assignation de valeurs). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$ et $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est vraie sous l'assignation de valeurs h ou que l'assignation de valeurs h satisfait la formule ϕ (abrégé : "$\mathcal{A} \models_h \phi$") si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*

S1	*ϕ a la même forme que "$t_1 = t_2$"*	*et*	$\overline{h}(t_1) = \overline{h}(t_2)$
S2	*ϕ a la même forme que "$R_i(t_1, \dots, t_{\lambda(i)})$"*	*et*	$R_i^{\mathcal{A}}(\overline{h}(t_1), \dots, \overline{h}(t_{\lambda(i)}))$
S3	*ϕ est de la forme $\ulcorner \neg\psi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \not\models_h \psi$
S4	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \wedge \chi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *et* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S5	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \vee \chi \urcorner$*	*et*	*soit* $\mathcal{A} \models_h \psi$ *soit* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S6	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \to \chi \urcorner$*	*et*	*soit* $\mathcal{A} \not\models_h \psi$ *soit* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S7	*ϕ est de la forme $\ulcorner \psi \leftrightarrow \chi \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_h \psi$ *si et seulement si* $\mathcal{A} \models_h \chi$
S8	*ϕ est de la forme $\ulcorner \forall x_i(\psi) \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *pour tous les* $a \in |\mathcal{A}|$
S9	*ϕ est de la forme $\ulcorner \exists x_i(\psi) \urcorner$*	*et*	$\mathcal{A} \models_{h\binom{x_i}{a}} \psi$ *pour au moins un* $a \in |\mathcal{A}|$

Nous ajoutons le signe de l'assignation de valeurs au signe de conséquence sémantique et écrivons "$\models_h$" pour indiquer qu'il ne s'agit pas, comme dans le cas de la logique propositionnelle, d'une relation entre un ensemble de phrases et une proposition, mais d'une relation ternaire entre une structure, une assignation de valeurs et une proposition.

---

vérité d'une phrase complète comme cas limite.

Nous disons qu'une phrase ouverte est *satisfaisable dans une structure* s'il y a une assignation de valeurs qui la satisfait. Elle est *satisfaisable* s'il y a une structure dans laquelle elle est satisfaisable. Un ensemble de phrases Σ est satisfaisable si tous ses membres $\phi \in \Sigma$ le sont. Comme avant, dire que Σ est satisfaisable revient à dire qu'il est logiquement possible que toutes les phrases dans Σ soient vraies ensembles, qu'elles décrivent une possibilité logique : une possibilité logique, dans la logique des prédicats, correspondra donc à une structure et une assignation de valeurs.

S1 et **S2** disent que les phrases qui affirment une identité ou que certaines choses se trouvent dans une certaine relation sont vraies sous une assignation de valeurs, si et seulement si les choses dites identiques sont réellement traitées comme étant identiques par cette assignation de valeurs et les choses dont on dit qu'elles se trouvent dans une certaine relation R_i se trouvent réellement dans cette relation d'après l'assignation de valeurs en question. En bref, elles disent que les phrases atomiques sont vraies si elles représentent les choses comment elles sont d'après l'assignation en question.

Les conditions **S3** à **S7** répètent les clauses que nous avons données pour la sémantique des connecteurs propositionnels, sauf qu'elles sont maintenant appliquées également à des connecteurs qui relient des phrases ouvertes.[12]

Les deux clauses concernant les quantificateurs sont plus difficiles à comprendre. Elles utilisent une notion que nous n'avons pas encore introduite, celle d'une "assignation variée à la place "x" ". Ce que nous voulons dire, en stipulant la condition **S9**, c'est qu'une formule quantifiée existentiellement est vraie dans $\mathcal{A}$ sous h si et seulement s'il y a un objet dans l'univers du discours dont est vraie la phrase ouverte précédée par le quantificateur existentiel. Nous ne savons pas, cependant, si l'assignation h en question assigne cet objet à l'occurrence libre de la variable dans la phrase ouverte. Nous avons donc besoin de changer l'assignation en question, pour rendre sûr qu'elle assigne le bon objet.

Définition 53 (Assignations variées). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats, $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$, $h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}+) \to |\mathcal{A}|$ une assignation de valeurs et "x_i" une variable de $\mathcal{L}^+$. Nous définissons l'assignation variée à la place "x_i" – appelée "$h\binom{x_i}{a}$" – comme suit :*

$$h\binom{x_i}{a}(x_j) \quad := \quad \begin{cases} h(x_j) & i \neq j \\ a & i = j \end{cases}$$

$h\binom{x_i}{a}$ est une fonction qui assigne à toutes les variables sauf "x_i" le même individu que leur assigne h et assigne a à "x_i" – c'est une modification locale de l'assignation h à la place "x_i" qui la force d'assigner a à "x_i".

S8 dit, en conséquence, qu'une formule universellement quantifiée est vraie sous une assignation de valeurs si et seulement si la phrase ouverte est vraie sous toute modification de cette assignation et donc sous toute assignation d'un élément du domaine à la variable en question. Une quantification universelle est vraie uniquement au cas où la phrase ouverte, gouvernée par le quantificateur universel, est satisfaite en tenant compte de toutes les valeurs possibles de ses variables. **S9**, de l'autre côté, dit qu'une phrase existentielle est vraie sous une assignation de valeurs s'il y a et seulement s'il y a, dans l'univers de discours en question, au moins un individu qui peut être assigné comme valeur à la variable ayant une occurrence libre dans la phrase ouverte en question.

[12] Comme nous les avons définis les connecteurs propositionnels, les connecteurs reliant des phrases ouvertes ne sont pas des connecteurs propositionnels. Strictement parlant, il n'est donc pas vrai que les formules bien-formées de la logique propositionnelle sont aussi des formules bien-formées du calcul des prédicats. Nous aurions pu, cependant, définir les connecteurs dès le début et pour des phrases complètes et pour des phrases ouvertes – dans la logique propositionnelle, nous n'aurions donc traité que d'un de ces cas.

10.4 La notion de validité

Nous avons vu que la définition de la notion de vérité sous un assignation de valeurs consiste en trois parties :

1. une première partie qui affirme la vérité des formules atomiques de la forme "$t_1 = t_2$" et "$R_i(t_1, \ldots, t_{\lambda(i)})$" si l'assignation en question attribue au termes les mêmes désignations (premier cas) et au signe de relation une relation entretenue entre les désignations des termes (deuxième cas) ;
2. une deuxième partie qui donne des définitions récursives pour les formules contenant des connecteurs propositionnels ;
3. une troisième partie qui traite des quantificateurs et utilise la notion d'assignation de valeurs variée à une place : une phrase universellement quantifiée est vraie sous une assignation si et seulement si elle est vraie sous toute assignation variée à la place de la variable universellement quantifiée ; une phrase existentiellement quantifiée est vraie sous une assignation si et seulement si elle est vraie sous au moins une telle assignation variée.

Une formule est vraie sous une assignation de valeurs si et seulement si l'assignation des valeurs à ses variables correspond à la manière dont ces variables sont reliées dans la proposition. En examinant les clauses **S1** à **S9**, nous remarquons que leurs résultats pour certaines phrases ne dépendent pas de l'assignation h en question. Si nous choisissons, par exemple, la phrase "$\forall x(0 \leq x)$" et nous l'évaluons dans la structure des nombres naturels (et avec l'interprétation de "$\leq$" par la relation de n'être pas plus grand que), selon **S8** le résultat est qu'elle est vraie sous toutes les assignations. La raison pour cela est simple : il n'y a rien à assigner à cette proposition, puisqu'elle ne contient pas d'occurrence libre d'une variable (la seule variable qu'elle contient, "x", a une seule occurrence et celle-là est gouvernée par le quantificateur universel).

Cette observation se généralise : il est vrai de toutes les *phrases* que leurs valeurs de vérité ne dépendent pas d'une assignation de valeurs particulière. Une phrase ne contient pas d'occurrence libre d'une variable, donc il n'y a rien à assigner – si elle est vraie, elle est vraie sous toutes les assignations, si elle est fausse, elle n'est vraie sous aucune. Nous obtenons ainsi la notion de vérité (ne s'appliquant qu'à des phrases complètes) comme cas limite de la notion de vérité-sous-une-assignation (qui s'applique également à des phrases ouvertes) :

Définition 54 (Vérité dans une structure). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats et $\mathcal{A}$ une structure pour $\mathcal{L}^+$. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est vraie dans la structure $\mathcal{A}$ si et seulement si ϕ est vraie sous toutes les assignations de valeurs pour $\mathcal{L}^+$:*

$$\mathcal{A} \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \textit{pour tout } h : \mathsf{Vbl}(\mathcal{L}^+) \to |\mathcal{A}| : \quad \mathcal{A} \models_h \phi$$

Si ϕ est vraie dans une structure $\mathcal{A}$, nous appelons $\mathcal{A}$ un "modèle" de ϕ.

Cette définition de vérité-dans-une-structure comme vérité-sous-toutes-les-assignations est essentiellement celle de Tarski (1933).

La notion de vérité-dans-une-structure est une généralisation de la notion ordinaire de vérité, qui traite le monde actuel comme seule structure digne d'intérêt. En logique, nous ne nous intéressons pas à ce qui est vrai ou faux dans une structure particulière : nous nous intéressons à ce qui est vrai dans toutes les structures (aux tautologies) et aux relations qu'il y a entre les vérités dans différentes structures (aux relations de conséquence sémantique).

Pour arriver à une notion de vérité logique, nous devons donc généraliser sur toutes les structures :

Définition 55 (Validité). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats. Nous disons qu'une formule ϕ de $\mathcal{L}^+$ est valide ou qu'elle est une vérité logique (de la logique des prédicats) si et seulement si ϕ est vraie dans toutes les structures pour $\mathcal{L}^+$:*

$$\models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{pour tout } \mathcal{A} : \quad \mathcal{A} \models \phi$$

De cette notion de validité, nous obtenons une notion de conséquence sémantique :

Définition 56 (Conséquence sémantique). *Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats. Nous appelons une formule ϕ une conséquence sémantique d'un ensemble de formules si et seulement si ϕ est vrai dans toutes les structures où toutes ces formules sont vraies :*

$$\Sigma \models \phi \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{pour tout } \mathcal{A} : \text{si } \mathcal{A} \models \psi \text{ pour toutes les formules } \psi \in \Sigma, \text{ alors } \mathcal{A} \models \phi$$

Cette définition de validité nous permet de compter comme valide ou logiquement vraies des phrases qui ne sont pas des tautologies de la logique propositionnelle. Prenons par exemple la phrase ouverte suivante :

(1) $(x = y) \rightarrow (Rxb \rightarrow Ryb)$

Interprétée dans une certaine structure, (1) dit, par exemple, que si la valeur de la variable "x" est la même que la valeur de la variable "y", alors si x aime Marie, alors y aime Marie. La vérité de (1) ne dépend pas de la valeur des variable "x" et donc de l'assignation de valeurs en question – quelle que soit l'assignation particulière, si elle assigne le même individu à ces deux variables, alors l'amour de Marie ne distinguera pas leurs référents. Nous voyons également que la vérité de (1) ne dépend pas non plus de l'interprétation particulière de "R", ni de celle de "b" – si nous l'interprétons comme "si les valeurs de "x" et de "y" sont les mêmes, alors si un des deux dépend de Dieu, alors l'autre en dépend également", elle est également vraie. La phrase (1) est donc vraie dans toutes les structures, et sous toutes les assignations, donc logiquement vraie ou valide.

Qu'est-ce qui change si nous préfixons (1) de deux quantificateurs universels qui lient les variables "x" et "y" qui ont des occurrences libres dans (1) ?

(2) $\forall x \forall y\, ((x = y) \rightarrow (Rxb \rightarrow Ryb))$

Nous avons déjà vu que la validité d'une phrase ne dépend jamais d'une assignation de valeurs. Nous appelons *"clôture universelle"* d'une formule ϕ la formule obtenue en adjoignant à ϕ des quantificateurs universels correspondant à chaque variable dont ϕ contient une occurrence libre. La validité ne distingue pas entre une formule et sa clôture universelle :

Théorème 57. *Une formule est valide si et seulement si sa clôture universelle est valide.*

Preuve Soit $\mathcal{A}$ une structure arbitraire. ϕ est valide si et seulement si ϕ est vraie dans $\mathcal{A}$ sous toutes les assignations de valeurs possibles. Étant donné **S8**, cette condition est nécessaire et suffisante pour la vérité, dans $\mathcal{A}$, de la clôture universelle de ϕ. □

Nous voyons donc que (1) sera valide si et seulement si sa clôture universelle (2) est également valide. Ce théorème nous apprend que nous pouvons nous limiter à la considération de phrases pour décider des questions de validité.

Nous avons comme exemple d'une équivalence sémantique (conséquence sémantique réciproque) le suivant : Soit ϕ une formule contenant n occurrences libres de variables différentes "x_1", ... "x_n" :

(3) $\mathcal{A} \models \phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \ulcorner \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n\, (\phi) \urcorner$

Il est à remarquer que cette équivalence est vraie seulement au niveau de la validité : si ϕ est valide, c'est-à-dire vraie dans toutes les structures et sous toutes les assignations de valeurs, alors sa clôture universelle l'est aussi, et vice versa. Au niveau d'une structure et d'une assignation particulière, une formule et sa clôture universelle peuvent très bien différer. Soit $\mathcal{A}$, par exemple, une structure dont l'univers de discours sont tous les animaux et "Px" est interprété par l'ensemble de tous les pingouins. Sous une assignation particulière – une assignation qui assigne un pingouin à "x", "Px" sera vraie. Mais ceci ne veut pas dire que tous les animaux sont des pingouins, ni que, sous cette assignation, "$\forall x(Px)$" sera également vraie.

10.5 La logique des prédicats unaires

A part des équivalences sémantiques du type de (3) nous avons également affaire à un autre type d'équivalences – plus fortes, parce qu'il ne s'agit non seulement des équivalences entre la vérité des formules dans une structure, mais d'équivalences reliant la *satisfaction* de quelques formules dans des structures par des assignations de valeurs. Un exemple d'une telle équivalence est l'interdéfinissabilité des quantificateurs que nous avons déjà rencontrée dans la leçon 8 :

Théorème 58. *Soit ϕ une formule, $\mathcal{A}$ n'importe quelle structure pour la logique des prédicats et h n'importe quelle assignation de valeurs aux variables de $\mathcal{L}^+$:*

$$\mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x\, (\phi(x)) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \models_h \ulcorner \neg \exists x\, \neg(\phi(x)) \ulcorner$$
$$\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x\, (\phi(x)) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \models_h \ulcorner \neg \forall x\, \neg(\phi(x)) \ulcorner$$

D'autres équivalences définitionnelles de ce dernier type, appelées "règles de passage" par Quine (1950: 142–148), nous disent sous quelles conditions nous pouvons "entrer" et "sortir" des quantificateurs :

Théorème 59. *Soit ϕ une formule et ψ une formule dans laquelle la variable "x" n'a pas d'occurrence libre. Si $\mathcal{A}$ est n'importe quelle structure pour la logique des prédicats et h n'importe quelle assignation de valeurs aux variables de $\mathcal{L}^+$, nous avons les équivalences suivantes :*

$$\mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi \vee \psi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi) \vee \psi \urcorner$$
$$\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi \vee \psi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi) \vee \psi \urcorner$$
$$\mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi \wedge \psi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi) \wedge \psi \urcorner$$
$$\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi \wedge \psi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi) \wedge \psi \urcorner$$
$$\mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\psi \rightarrow \phi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \models_h \ulcorner \psi \rightarrow \forall x(\phi) \urcorner$$
$$\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\psi \rightarrow \phi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \models_h \ulcorner \psi \rightarrow \exists x(\phi) \urcorner$$
$$\mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi \rightarrow \psi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi) \rightarrow \psi \urcorner$$
$$\mathcal{A} \models_h \ulcorner \exists x(\phi \rightarrow \psi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \models_h \ulcorner \forall x(\phi) \rightarrow \psi \urcorner$$

Preuve Des quatre premières équivalences, nous ne prouvons que la première : on en obtient la

deuxième par l'interdéfinissabilité de $\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$ et $\ulcorner\neg\exists x\neg(\phi)\urcorner$ et la troisième et la quatrième par l'interdéfinissabilité des connecteurs.

Soit $\mathcal{A}$ une structure arbitraire et h une assignation de valeurs. Si $\ulcorner\forall x(\phi \vee \psi)\urcorner$ est vraie dans cette structure et sous cette assignation, $\ulcorner\phi\vee\psi\urcorner$ est vraie sous toute assignation variée à la place "x". Si c'est le premier disjoint ϕ qui est vrai, rien ne se change dans $\ulcorner\forall x(\phi) \vee \psi\urcorner$. Si c'est le deuxième disjoint ψ, une assignation variée à la place "x" sera juste une assignation ordinaire, puisque la variable "x" n'a pas d'occurrence libre dans ψ. En conséquence, $\ulcorner\forall x(\phi) \vee \psi\urcorner$ sera également vraie sous cette assignation. La converse est prouvée de manière similaire.

La cinquième et la sixième équivalence sont obtenues de la première et la deuxième par l'équivalence entre $\ulcorner\psi \rightarrow \phi\urcorner$ et $\ulcorner\phi \vee \neg\psi\urcorner$.

Pour la septième équivalence, notons que $\ulcorner\forall x(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ est équivalente à $\ulcorner\forall x(\neg\phi \vee \psi)\urcorner$ et donc, par la première équivalence, à $\ulcorner\forall x(\neg\phi) \vee \psi\urcorner$. Par l'interdéfinissabilité des quantificateurs, les formules de cette dernière forme sont équivalentes à $\ulcorner\neg\exists x(\phi) \vee \psi\urcorner$, dont nous obtenons $\ulcorner\exists x(\phi) \rightarrow \psi\urcorner$.

Pour la huitième équivalence, nous transformons $\ulcorner\exists x(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ en $\ulcorner\exists x(\neg\phi \vee \psi)\urcorner$, en $\ulcorner\exists x(\neg\phi) \vee \psi\urcorner$, en $\ulcorner\neg\forall x(\phi) \vee \psi\urcorner$ et puis en $\ulcorner\forall x(\phi) \rightarrow \psi\urcorner$. □

Les quatre premières équivalences nous permettent de faire entrer et de faire sortir des conjoints et des disjoints de la portée d'un quantificateur s'ils ne contiennent pas de variable qui est liée par celui-ci. La cinquième et sixième équivalence nous permettent de faire la même chose avec les antécédents des implications. La septième et la huitième, au contraire, nous montrent que les antécédents des implications sont implicitement niées et qu'il faut par conséquent changer le quantificateur en question en son quantificateur dual si on veut distribuer un quantificateur à travers une implication dont il quantifie l'antécédent.

Prises ensembles, ces dix équivalences nous permettent de réduire toute formule ne contenant que des prédicats unaires à une forme *purifiée* (où la portée de chaque quantificateur est minimale) et d'appliquer une procédure mécanique pour établir si oui ou non la formule en question est valide Quine (cf. 1950: 121–128) :

Théorème 60 ((Löwenheim 1915)). *La logique des prédicats unaires est décidable.*

Les équivalences prouvées nous montrent comment nous pouvons faire entrer et sortir des quantificateurs à travers des connecteurs *si une des formules ne contient pas d'occurrence libre de la variable qui est quantifiée par le quantificateur correspondant.*[13] La qualification est important : si nous avons affaire à un prédicat binaire dont les deux places argumentales sont gouvernées par différents quantificateurs, nous ne pouvons pas recourir à ces équivalences. Il n'aura, par exemple, aucune manière de transformer "$\forall x(Fx \rightarrow \exists y(Rxy))$" en "$\exists x(Fx) \rightarrow \exists y(Rxy)$".

Ceci nous oblige à accepter, pour des relations binaires, des quantifications 'mixtes' (contenant une alternation de quantificateurs universels et existentiels) que nous ne pourrons pas distribuer sur les parties de la phrase ouverte complexe qu'elles gouvernent. Il est important à noter, cependant, que ce cas n'arrivera pas avec des prédicats unaires : dans la logique des prédicats unaires, toute formule peut être transformée (préservant la satisfaction par une assignation) *en forme prénex*, où toutes les quantificateurs se trouvent au début de la formule, et toutes les quantifications peuvent également être transformées en une forme *purifiée*, où la portée de chaque quantificateur ne comprend que des formules atomiques dans lesquelles la variable quantifiée a une occurrence libre.

[13]Ceci n'est pas vrai de toutes les équivalences notées. La deuxième et la troisième sont valides peut importe si oui non ψ contient des occurrences libres de la variable "x". Les formules "$\forall x(Fx \vee Gx) \rightarrow (\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx))$" et "$(\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)) \rightarrow \exists x(Fx \wedge Gx)$", par contre, ne sont pas valides.

Nous pouvons, alors, nous demander ce qu'on obtiendrait en nous limitant à des prédicats unaires : Le changement serait dramatique : la logique des prédicats, incluant des signes de relations (binaire), est indécidable (ce que nous verrons dans la leçon 12) ; la logique des prédicats unaires, par contre, est décidable et permet un test de validité simple et efficace.[14]

Nous notons d'abord que, grâce à l'équivalence sémantique de toute formule avec sa clôture universelle, le problème de trouver une procédure de décision peut se limiter aux phrases, formules qui ne contiennent pas d'occurrence libre de variables. Nous pouvons maintenant appliquer, à n'importe quelle phrase ϕ de $\mathcal{L}^+$ ne contenant que des prédicats unaires, les règles suivantes pour déterminer si elle est valide.

1. Si ϕ ne contient pas de quantificateurs (et est alors appelée "booléen"), alors ϕ est valide si et seulement si la configuration de ces prédicats correspond à une tautologie propositionnelle (remplaçant "Fx" par "p", "Gx" par "q" etc.).[15]
2. Si ϕ est $\ulcorner\exists x(\psi)\urcorner$ pour une phrase booléenne ψ, alors ϕ est valide si et seulement si ψ est valide d'après (1).
3. Si ϕ est $\ulcorner\neg\exists x(\psi)\urcorner$ pour une phrase booléenne ψ, alors ϕ est valide si et seulement si ψ est inconsistante d'après (1).
4. Si ϕ est une disjonction de phrases de la forme $\ulcorner\neg\exists x(\psi_i)\urcorner$ pour des phrases booléennes ψ_i, alors ϕ est valide si au moins un de ces disjoints est valide d'après (3).
5. Si ϕ est l'implication d'une phrase du type (2) par une ou plusieurs phrases du type (2), alors ϕ est valide si et seulement si une des phrases de son antécédent implique, dans le sens de (1), la phrase qui est son conséquent.
6. Si ϕ est une conjonction de phrases du type (2) à (5), alors ϕ est valide si et seulement si chacun de ces conjoints est valide d'après (2) à (5).

La condition (1), en effet, réduit le problème de la détermination de la validité d'une phrase contenant des occurrences libres d'une seule variable et ne contenant aucun quantificateur au problème correspondant de la logique propositionnelle.

Il nous reste à montrer que toutes les phrases de la logique des prédicats unaires tombe sous une des catégories mentionnées. Utilisant le fait que toute phrase de la logique des prédicats unaires est équivalente à une phrase en forme prénex, nous montrons comme suit que notre test détermine la validité de n'importe quelle phrase.

Soit ϕ une phrase arbitraire ne contenant que des prédicats unaires :

1. Si ϕ contient des quantificateurs universels ou des négations de quantificateurs universels, nous appliquons les lois d'interdéfinissabilité des quantificateurs pour les changer en des quantificateurs existentiels.
2. Nous transformons le résultat de (1) dans une forme normale conjonctive, à savoir une conjonction de disjonctions. D'après (6), le teste de validité sera appliqué aux conjoints individuellement.
3. Toute disjonction qui apparaît dans la formule sera une disjonctions de phrases du type (2) ou (3). Puisque le quantificateur existentiel distribue sur les disjonctions, toute disjonction sera une disjonction d'au plus une phrase du type (2) et de quelques (peut-être plusieurs) disjonctions du type (3). Il ne reste que quatre cas possible :
   (i) Si ϕ n'est qu'une seule phrase du type (3), elle tombe sous (3).

[14] Dans la présentation de la procédure de décision pour la logique des prédicats unaires, je suis Quine (1950: 121–128).

[15] "$Fx \vee \neg Fx$" et "$(Fx \wedge \neg Fx) \rightarrow Gx$", par exemple, sont valides pour cette raison. S'il y a une interprétation propositionnelle qui rend vraie la formule propositionnelle correspondante, alors il y aura, dans toute structure (qui, d'après nos définitions, contiendra au moins un objet) une assignation de valeurs qui rend vraie la phrase ouverte. S'il n'y a, par contre, pas d'interprétation propositionnelle, il y aura une interprétation qui rend la phrase ouverte faux de cet objet.

(ii) Si ϕ est une disjonction de plusieurs phrases du type (3), elle tombe sous (4).
(iii) Si ϕ ne contient qu'une seule phrase du type (2), elle tombe sous (2).
(iv) Si ϕ contient plusieurs phrases du type (3) et une seule phrase du type (2), elle tombe sous (5), puisque "$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n \vee q$" est équivalent à "$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$".

Nous voyons donc que notre test de validité s'applique à toutes les phrases de la logique des prédicats unaires et pouvons énoncer le théorème suivant, découvert par Löwenheim (1915) :

Théorème 61. *La logique des prédicats unaires est décidable.*

Preuve Nous venons d'esquisser une procédure de décision, applicable à n'importe quelle formule de $\mathcal{L}^+$. □

10.6 Les substitutions

La notion d'assignation de valeurs variée à la place "x_i" (cf. p. 186) nous permet de dire quand une assignation de valeurs satisfait une phrase universellement ou existentiellement quantifiée. Imitant la procédure de substitution pour la logique propositionnelle (cf. p. 119), nous pouvons définir des notions analogues en syntaxe : la substitution d'un terme par un autre terme dans un terme ou une formule.

Définition 62 (Substitutions dans des termes)**.** *Si "s" et "t" sont des termes et "x_i" une variable, nous définissons un nouveau terme, que nous appelons 'la substitution de "x_i" par "t" dans "s"' ou ""$s(x_i/t)$"", de manière récursive, comme suit :*

1. *Si "s" est la même variable que "x_i", alors "$s(x_i/t)$" est "t".*
2. *Si "s" est une variable autre que "x_i", alors "$s(x_i/t)$" est "s".*
3. *Si "s" est une constante, alors "$s(x_i/t)$" est "s".*
4. *Si "s" est un terme pour une valeur de fonction "$f_j(t_1, \ldots, t_{\mu(j)})$" pour des termes "$t_1$", ..., "$t_{\mu(j)}$", alors "$s(x_i/t)$" est "$f_j(t_1(x_i/t), \ldots, t_{\mu(j)}(x_i/t))$".*

En bref, toute occurrence de "x_i" dans "s" est remplacée par "t". Nous pouvons maintenant définir ce qu'est la substitution d'un terme par un autre dans une formule :

Définition 63 (Substitutions dans des formules)**.** *Si ϕ est une formule, "t" un terme et "x_i" une variable, nous définissons une nouvelle formule, que nous appelons 'le résultat de la substitution de "x_i" pour "t" dans ϕ' ou "$\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$", d'une manière récursive comme suit :*

1. *Si ϕ est "$t_1 = t_2$" pour deux termes "t_1" et "t_2", alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est "$t_1(x_i/t) = t_2(x_i/t)$".*
2. *Si ϕ est "$R_i(t_1, \ldots t_{\lambda(i)})$" pour un signe de relation "R_i" et des termes "t_1", ..."$t_{\lambda(i)}$", alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est "$R_i(t_1(x_i/t), \ldots t_{\lambda(i)}(x_i/t))$".*
3. *Si ϕ est $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ pour une formule ψ, alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est $\ulcorner\neg\psi(x_i/t)\urcorner$.*
4. *Si ϕ est $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ pour des formules ψ et χ, alors $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est $\ulcorner\psi(x_i/t) \wedge \chi(x_i/t)\urcorner$, $\ulcorner\psi(x_i/t) \vee \chi(x_i/t)\urcorner$, $\ulcorner\psi(x_i/t) \rightarrow \chi(x_i/t)\urcorner$ ou $\ulcorner\psi(x_i/t) \leftrightarrow \chi(x_i/t)\urcorner$ respectivement.*
5. *Si ϕ est $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$ pour une formule ψ et une variable "x_j", alors*

$$\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner := \begin{cases} \ulcorner\forall x_j\psi(x_i/t)\urcorner & i \neq j \\ \phi & i = j \end{cases} \qquad \ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner := \begin{cases} \ulcorner\exists x_j\psi(x_i/t)\urcorner & i \neq j \\ \phi & i = j \end{cases}$$

En bref, nous remplaçons toute occurrence libre de la variable "x_i" par le terme "t". Si "x_i" n'a aucune occurrence libre dans ϕ, $\ulcorner\phi(x_i/t)\urcorner$ est la même formule que ϕ. Si nous pouvons être assurés grâce au contexte que ϕ contient au moins une occurrence libre de "x", nous écrivons $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ pour $\ulcorner\phi(x/a)\urcorner$: $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est l'*application* du prédicat $\ulcorner\phi(x)\urcorner$ à a.

En substituant des termes pour des variables à leurs occurrences libres, nous devons faire attention à ne pas lier une variable qui ne l'était pas initialement. Soit ϕ la formule "$\exists x(x \neq y)$". Si une structure a un domaine contenant plus qu'un seul individu, il y aura toujours une assignation de valeurs à "y" qui satisfait cette phrase ouverte. Si nous substituons une autre variable "z" pour "y" dans ϕ, nous obtenons "$\exists x(z \neq y)$", formule qui est également satisfaisable dans toutes les structures à plus d'un individu – $\ulcorner\phi(y/z)\urcorner$ sera vrai si et seulement si ϕ l'est également.

En substituant "y" par "x" nous obtenons un autre résultat : la formule "$\exists x(x \neq x)$" est une phrase complète et qui n'est vraie dans aucune structure. Le diagnostic de ce changement est que l'occurrence de la variable "y", libre dans ϕ, a été liée dans $\ulcorner\phi(y/x)\urcorner$ – un simple changement "terminologique' a réduit le nombre total d'occurrences libres de variables. Nous devons exclure ce cas pour les substitutions admissibles.

Nous disons alors que la variable "x" dans ϕ n'était pas *libre pour "y"* et adoptons la définition suivante :

Définition 64 (Substitutions admissibles). *Soit ϕ une formule, "t" un terme et "x_i" une variable. Nous disons que "t" est libre pour "x_i" dans ϕ si l'une des possibilités suivantes est le cas :*

1. *ϕ est une formule atomique ;*
2. *ϕ est $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et "t" est libre pour "x_i" dans ψ ;*
3. *ϕ est $\ulcorner\psi \wedge \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \vee \chi\urcorner$, $\ulcorner\psi \rightarrow \chi\urcorner$ ou $\ulcorner\psi \leftrightarrow \chi\urcorner$ pour des formules ψ et χ et "t" est libre pour "x_i" dans ψ et dans χ ;*
4. *ϕ est $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$ et "x_i" n'a pas d'occurrence libre dans ψ.*
5. *ϕ est $\ulcorner\forall x_j(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x_j(\psi)\urcorner$, "$x_j$" n'a pas d'occurrence dans "t" et "t" est libre pour "x_i" dans ψ.*

Cette définition nous apprend qu'un terme "t" est libre pour une variable "x_i" dans une formule ϕ s'il n'y a pas de variable "x_j" dans "t" et aucun quantificateur "$\forall x_j$" dans ϕ tel qu'une occurrence libre de "x_i" est dans la portée de "$\forall x_j$". Reprenons le cas de deux variables, où la substitution de "y" par "x" n'étais pas admissible. "x" n'est pas libre pour "y" dans "$\exists x(x \neq y)$" parce que ni la quatrième ni la cinquième possibilité est réalisée : "y" a une occurrence libre dans "$x \neq y$" (ce qui exclut la quatrième) et "x" (= '"x_j") a une occurrence dans "x" (= "t").

Intuitivement, un terme n'est pas libre pour une variable dans une formule si une éventuelle substitution du terme pour la variable réduisait le nombre total d'occurrences libres de variables dans la formule. Notre définition formalise cette intuition en définissant les formules dans lesquelles un terme est libre pour une variable : toute formule atomique a cette propriété (condition (1)), cette propriété est préservée sous les connecteurs propositionnels (conditions (2) et (3)) et n'est perdue par une quantification que si cette dernière lie une variable déjà contenu dans le terme. Nous verrons plus tard que les règles d'inférence de spécialisation universelle (SE) et de généralisation existentielle (GE) ne sont applicables qu'à des termes libres pour les variables que nous substituons par eux.

10.7 Un calcul axiomatique pour la logique des prédicats

Même si la syntaxe de leurs deux langues $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^+$ est différente, la logique propositionnelle est dans un certain sens contenue dans la logique des prédicats. Cela veut dire que nous pouvons, de manière

absolument analogue à ce que nous avons fait dans la leçon 5 (cf. pp. 80 et suivants), définir des interprétations, maintenant appelées *interprétations propositionnelles*, pour des formules de la logique des prédicats. Nous pouvons alors appeler *tautologie propositionnelle* toute formule de $\mathcal{L}^+$ que l'on obtient en substituant aux phrases simples d'une tautologie de la logique propositionnelle des formules de la logique des prédicats. Une définition plus rigoureuse est la suivante :

Définition 65. *Soit ϕ une tautologie d'une langue $\mathcal{L}$ pour la logique propositionnelle et "p_1","p_2",... "p_n" toutes les phrases simples contenues dans ϕ. Une tautologie propositionnelle d'une langue $\mathcal{L}^+$ de la logique des prédicats est une formule $\ulcorner\phi(\alpha_1/p_1, \alpha_2/p_2, \ldots, \alpha_n/p_n)\urcorner$ que l'on obtient en substituant à "p_1","p_2",... "p_n" n'importe quelles formules "α_1","α_2", ..., "α_n" bien-formées de $\mathcal{L}^+$.*

Il est facile de montrer qu'une tautologie propositionnelle d'une langue $\mathcal{L}^+$ est valide dans la logique des prédicats.

Le calcul axiomatique que nous allons donner pour axiomatiser les formules valides de la logique des prédicats consiste en des axiomes de trois types. Pour que nos axiomes soient valides (et donc que le calcul soit correct), il est nécessaire qu'ils soient vrais dans toutes les structures. Par conséquent, leur vérité ne peut pas dépendre d'une interprétation particulière des symboles non-logiques. Le premier type d'axiomes regroupe les formules dont la vérité ne dépend que des connecteurs ; le deuxième, celles qui sont vraies en vertu de la relation d'identité "=", et le troisième les formules qui sont vraies grâce aux quantificateurs qu'elles contiennent.

Définition 66 (HC$^+$). *Les axiomes du calcul* HC$^+$ *consistent en toutes les formules de $\mathcal{L}^+$ suivantes :*

TP *toutes les tautologies propositionnelles ;*

ID *les formules ayant la forme de l'un des axiomes d'identité suivants (pour des variables "x","y","z","w", "x_1","x_2", ..., "$x_{\lambda(i)}$","y_1","y_2", ..., "$y_{\lambda(i)}$","z_1","z_2", ..., "$z_{\mu(j)}$","w_1","w_2", ..., "$w_{\mu(j)}$" et tous les $i \in \mathbf{I}$, $j \in \mathbf{J}$:*

ID$_1$	$x = x$	*réflexivité*
ID$_2$	$y = z \rightarrow (y = w \rightarrow z = w)$	*confluence*
ID$_3$	$(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_{\lambda(i)} = y_{\lambda(i)}) \rightarrow (R_i(x_1, \ldots, x_{\lambda(i)}) \rightarrow R_i(y_1, \ldots, y_{\lambda(i)}))$	*indiscernabilité*
ID$_4$	$(z_1 = w_1 \wedge \ldots \wedge z_{\mu(j)} = w_{\mu(j)}) \rightarrow f_j(z_1, \ldots, z_{\lambda(i)}) = f_j(w_1, \ldots, w_{\mu(j)})$	*fonctionnalité*

QU *les formules ϕ qui ont la forme de la phrase suivante, où ψ est une formule et "t" un terme libre pour "x" dans ψ :*

Qu $\forall x(\psi) \rightarrow \psi(x/t)$ *instanciation*

HC$^+$ *a deux règles d'inférences :*

MP *la première règle d'inférences de* HC$^+$ *est modus ponens* MP *:*

$$\frac{\phi, \ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner}{\psi}$$

$\forall$ *la deuxième règle d'inférences de* HC$^+$ *est appelée "généralisation" ou "$\forall$" :*

$$\frac{\phi \rightarrow \psi}{\phi \rightarrow \forall x(\psi)} \quad \text{si "}x\text{" n'a pas d'occurrence libre dans } \phi$$

Les deux premiers axiomes d'identité, **ID$_1$** et **ID$_2$**, impliquent que la relation désignée par "=" (dans toutes les structures) est une relation d'équivalence, c'est-à-dire une relation réflexive, transitive et

symétrique.[16] Le principe d'indiscernabilité des identiques est parfois appelé "loi de Leibniz".[17] Le principe de fonctionnalité nous assure que nos signes de fonctions désignent réellement des fonctions, c'est-à-dire que leurs valeurs sont uniquement déterminées par leurs arguments.[18] $\mathbf{ID_3}$ et $\mathbf{ID_4}$ ensemble nous permettent de substituer des variables qui sont assignées au même objet dans des formules atomiques.

Puisque les variables et les signes de relations et de fonctions dans $\mathbf{ID_1}$ à $\mathbf{ID_4}$ ne sont pas spécifiées, il s'agit de schémas d'axiomes, schémas qui déterminent chacun une infinité d'axiomes : $\mathbf{ID_1}$, par exemple, nous donne un axiome pour chaque variable dans notre langue et $\mathbf{ID_3}$ pour chaque variable dans notre langue et pour chaque signe de relation.

Qu nous dit que nous pouvons toujours instancier une variable universellement quantifiée par un terme. Pour voir pourquoi la restriction aux termes libres pour la variable est nécessaire, considérons la formule "$\exists y(y \neq x)$" – dans cette formule, "y" n'est pas libre pour "x". Nous ne pouvons donc pas dériver de **Qu** que la phrase suivante est un axiome :

(4) $\forall x \exists y(y \neq x) \rightarrow \exists y(y \neq y)$

Il est avantageux que (4) ne soit pas un axiome, car (4) n'est pas valide : il existe des structures contenant plus de deux éléments (où l'antécédent est donc vrai), mais qui ne contiennent pas d'individus qui manquent d'être identique à eux-mêmes (aucune structure ne contient de tels élément, sinon le premier axiome d'identité ne serait pas valide).

La validité de **Qu** dépend du fait qu'une formule de la logique des prédicats est valide si et seulement si sa clôture universelle l'est aussi. **Qu** nous donne trois autres règles d'inférences dérivées, qui peuvent aussi être démontrées comme valides. Prises ensemble, il s'agit des règles d'inférences pour l'introduction et l'élimination des quantificateurs que nous utiliserons pour la déduction naturelle :

GU généralisation universelle :

$$\frac{\phi}{\ulcorner \forall x(\phi) \urcorner} \quad \text{si "}x\text{" n'a pas d'occurrence libre avant l'application de cette règle}$$

SU spécialisation universelle :

$$\frac{\ulcorner \forall x(\phi) \urcorner}{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner} \quad \text{si "}t\text{" est libre pour "}x\text{" dans } \phi$$

GE généralisation existentielle :

$$\frac{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner}{\ulcorner \exists x(\phi) \urcorner} \quad \text{si "}t\text{" est libre pour "}x\text{" dans } \phi$$

[16] La symétrie s'ensuit de la confluence et en échangeant "y" pour "z" ; la réflexivité nous assure de l'antécédent. La transitivité s'ensuit de la confluence et de la symétrie, en remplaçant "y" par "z" et "z" par "y" – la symétrie nous permet alors de changer "z" et "y" dans l'antécédent.

[17] Sa converse, beaucoup plus controversée en métaphysique, est le principe de l'identité des indiscernables nous permettant d'identifier tout ce qui ne peut pas être distingué.

[18] Comme on l'a vu dans la leçon 2, cela veut dire que l'argument d'une fonction *détermine* sa valeur. Mathématiquement, une fonction qui relie deux ensembles, $f : A \rightarrow B$, est une relation (un ensemble de paires dont le premier membre appartient à A et le deuxième à B ($\{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$), qui est telle que le choix de a détermine celui de b : il n'est pas le cas qu'on a $\langle a, b'\rangle$ et $\langle a, b''\rangle$ pour deux $b', b'' \in B$ différents : $(f(a) = b' \wedge f(a) = b'') \rightarrow b' = b''\}$.

SE spécialisation existentielle :

$$\frac{\ulcorner \exists x(\phi) \urcorner}{\ulcorner \phi(x/t) \urcorner}$$ si "x" n'a pas d'occurrence libre avant l'application de cette règle

Nous reviendrons sur ces règles d'inférences en relation avec la méthode de la déduction naturelle pour la logique des prédicats.

Points à retenir

1. L'alphabet d'une langue pour la logique des prédicats contient des connecteurs, le signe d'identité, des variables, des quantificateurs, des signes de relations, des signes de fonctions et des constantes individuelles. Les trois dernières catégories composent les signes non-logiques du langage.
2. Les quantificateurs de la logique des prédicats sont de la même catégorie syntaxique que les prédicats de deuxième ordre.
3. Une variable a une occurrence libre dans une formule si elle ne se trouve pas partout dans la portée d'un quantificateur correspondant.
4. Une structure pour un langage de la logique des prédicats consiste d'un univers de discours et d'une interprétation de ses signes non-logiques.
5. Une interprétation d'une constante lui assigne un élément de l'univers de discours ; l'interprétation d'un signe de relation lui assigne une relation dans cet univers ; et l'interprétation d'un signe de fonction lui assigne une fonction qui prend ses arguments et ses valeurs dans cet univers de discours.
6. Une assignation de valeurs dans une structure assigne à toute variable de la langue un élément de l'univers de discours.
7. La notion clef de la sémantique de la logique des prédicats est celle de la satisfaction d'une phrase ouverte par une assignation de valeurs dans une structure. La phrase ouverte est alors appelée 'vraie sous cette assignation' (dans cette structure).
8. Une formule est vraie dans une structure si elle est et seulement si elle est vraie sous toutes les assignations de valeurs dans cette structure. Une telle structure est appelée un 'modèle' de la formule. Une formule est valide si et seulement si elle est vraie dans toutes les structures.
9. La substitution d'un terme pour une variable dans une formule substitue ce terme à toute occurrence de la variable dans la formule. Pour qu'une telle substitution compte comme instanciation, il faut que le terme soit libre pour la variable dans la formule, c'est-à-dire qu'il ne contient pas de variable qui devient liée par la substitution.
10. L'ordre des quantificateur est important : "$\exists y \forall x\ (Rxy)$" implique formellement "$\forall x \exists y\ (Rxy)$", mais la converse est fausse.

Chapitre 11

La méthode des arbres

11.1 Les phrases quantifiées

Nous avons remarqué que, étant donné un univers de discours, une quantification universelle est vraie si la phrase ouverte gouvernée par le quantificateur universel est vraie de tous les objets dans cet univers de discours. Nous avons également dit qu'une phrase ouverte conjonctive est vraie d'un objet si cet objet et seulement si cet objet satisfait les deux phrases ouvertes qui forment la conjonction. Une phrase qui est gouvernée par un quantificateur existentiel, par contre, dit qu'au moins un objet dans l'univers de discours satisfait la phrase ouverte. Une disjonction de phrases ouvertes est également satisfaite si un objet de l'univers de discours satisfait au moins un de ses disjoints. Nous sommes ainsi amenés à l'observation suivante :

Théorème 67. *Soit $\mathcal{A}$ une structure dont l'univers de discours $|\mathcal{A}| = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ est fini et $\ulcorner \phi(x) \urcorner$ une formule qui contient une occurrence libre de la variable "x". Nous avons les équivalences sémantiques suivantes :*

$$\begin{array}{lcl} \ulcorner \forall x(\phi(x)) \urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner \phi(a_1) \wedge \phi(a_2) \wedge \ldots \wedge \phi(a_n) \urcorner \\ \ulcorner \exists x(\phi(x)) \urcorner & \Longleftrightarrow & \ulcorner \phi(a_1) \vee \phi(a_2) \vee \ldots \vee \phi(a_n) \urcorner \end{array}$$

où "a_1","a_2", ..., 'a_n" sont des constantes individuelles désignant tous les membres de $|\mathcal{A}|$.

Preuve Le théorème s'ensuit de nos conditions de vérité **S3** et **S8** pour qu'une formule soit vraie dans une structure. □

Une quantification universelle sur un domaine fini est équivalente à une conjonction, une quantification existentielle sur un tel domaine est équivalente à une disjonction. La restriction aux univers de discours finis est importante parce que notre langage ne considère pas des conjonctions ou disjonctions "infinies" comme bien-formées.

Ne considérant que des structures avec des domaines finis, la définissabilité est mutuelle : une conjonction est vraie si tous et seulement si tous ses conjoints sont vrais ; une disjonction est vraie si au moins un et seulement si au moins un de ses disjoints est vrai. Si nous appelons une *instanciation* d'une phrase (universellement ou existentiellement) quantifiée toute formule qui résulte de la phrase ouverte en remplaçant la variable gouvernée par le quantificateur par une constante individuelle, nous pouvons constater :

F10 Si une quantification universelle $\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$ est vraie, alors toutes ses instanciations $\ulcorner\phi(a)\urcorner$, pour une constante individuelle "a", sont vraies.

F11 Si une quantification universelle $\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$ est fausse, alors au moins une instanciation $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est fausse.

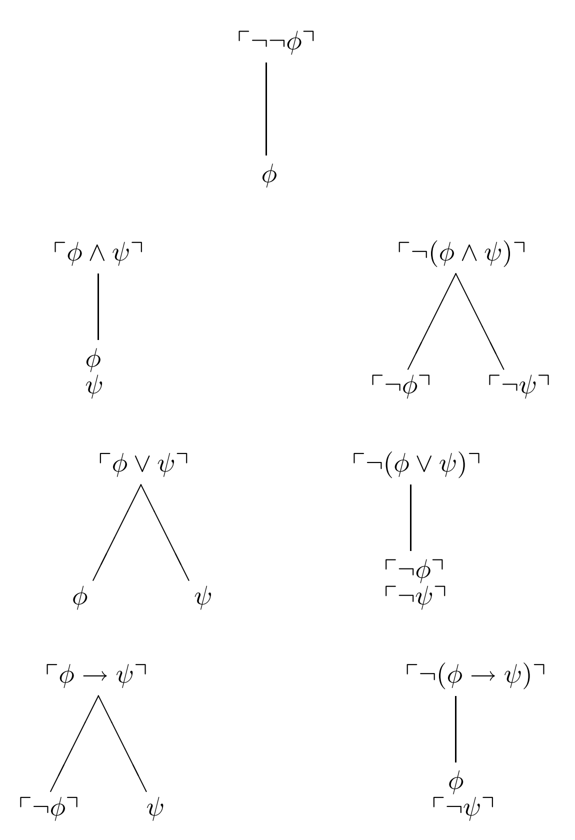
F12 Si une quantification existentielle $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ est vraie, alors au moins une instanciation $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est vraie.

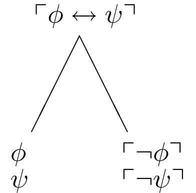
F13 Si une quantification existentielle $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ est fausse, alors toutes ses instanciations $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ sont fausses.

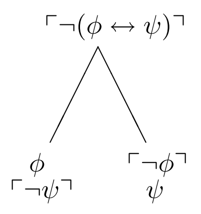
Comme nous l'avons fait pour la logique propositionnelle, nous utiliserons ces faits pour construire des arbres testant la consistance d'une certaine phrase ou d'un certain ensemble de phrases appartenant au langage de la logique des prédicats.

11.2 La méthode des arbres pour la logique des prédicats

Dans la leçon 5 (cf. pp. 95 et suivants), nous avons rencontré une méthode graphique et intuitive pour tester la consistance d'un ensemble de phrases. Les règles de construction d'arbres nous ont permis, pour n'importe quelle formule propositionnelle, de construire un arbre qui ou bien nous montre qu'il n'y a aucune interprétation qui rend vraie toutes les phrases initiales ou bien nous donne un modèle, c'est-à-dire une interprétation sous laquelle elles sont toutes vraies. Rappelons ces règles de construction d'arbres :







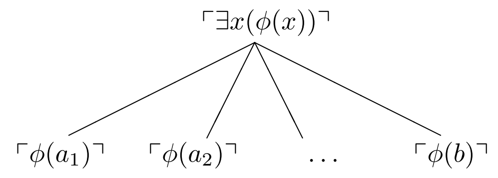
En analogie avec les règles de construction d'arbres pour la conjonction et la disjonction, nous adoptons, motivés par **F10**, la règle suivante pour les phrases universellement quantifiées :

$\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$

$\ulcorner\phi(a_1)\urcorner$
$\ulcorner\phi(a_2)\urcorner$ pour toutes les constantes "a_i" apparaissant sur cette branche
$\ulcorner\phi(a_3)\urcorner$
.
.

La vérité d'une quantification universelle nous commet à la vérité de toutes ses instanciations. Il est important que le quantificateur universel soit instancié pour *toutes* les constantes qui apparaissent sur la branche, y inclus les constantes qui n'apparaissent seulement plus tard. La raison pour ceci est qu'une branche qui ne se ferme pas est censée représenter un modèle pour la formule en question – c'est pourquoi la méthode des arbres est une méthode pour tester la consistance d'une formule ou d'un ensemble de formules. Or, nous n'avons pas de garantie d'avoir décrit un modèle pour la formule universellement quantifiée en question avant que nous l'avons instanciée pour toutes les constantes que nous utilisons pour décrire le modèle en question. Si nous introduisons une nouvelle constante après avoir appliqué la règle du quantificateur universel, par exemple par une application de la règle pour le quantificateur existentiel que l'on discutera après, nous devons revenir en arrière et faire l'instanciation correspondante.

Comme le montre **F12**, une quantification existentielle nous donne le droit de choisir l'élément de l'univers de discours qui instancie la phrase ouverte existentiellement quantifiée. Nous pouvons donc adopter comme règle de construction d'arbres la suivante :



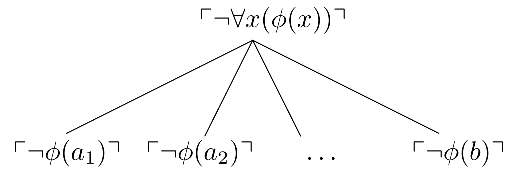
pour toutes les constantes "a_i" de la branche et une nouvelle constante "b"

Si notre branche contient deux constantes individuelles, par exemple, cet règle nous dit d'ouvrir trois nouvelles branches.

Nous instancions la quantification existentielle avec toutes les constantes apparaissant sur la branche : si nous omettions une, nous ne pourrions pas conclure l'insatisfaisabilité de la phrase ouverte existentiellement quantifiée du fait que toutes les branches se ferment – au moins une possibilité n'aurait pas été considérée. Nous avons également besoin d'une nouvelle constante ("nouvelle" dans le sens qu'elle

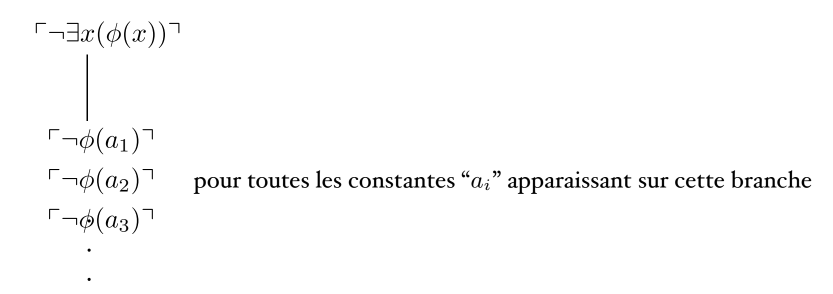
n'apparaît nulle part sur la branche avant l'application de la règle) pour ne pas devoir conclure que les trois phrases "Pa", "Pb" et "Pc" soient inconsistantes avec "$\exists x \neg Px$" – le fait que tous les éléments considérés de l'univers de discours étaient P ne veut pas dire qu'il n'y ait aucun qui n'est pas P !

Etant donné l'interdéfinissabilité des connecteurs, **F11** et **F13**, les règles de construction d'arbres pour les négations de phrases quantifiées s'ensuivent de celle pour les quantificateurs opposés. Pour la négation d'un quantificateur universel, nous avons :



pour toutes les constantes "a_i" de la branche et une nouvelle constante "b"

Pour la négation d'une phrase existentiellement quantifiée, nous avons une variante de la règle pour le quantificateur universel :



Comme ces règles pour les quantificateurs nous obligent à prendre en compte toutes les constantes individuelles apparaissant sur une branche, l'ordre de leur application devient important. Pour faire l'arbre d'une phrase ou d'un ensemble de phrases, nous appliquons d'abord toutes les neuf règles pour la logique propositionnelle. Ensuite, nous appliquons les règles pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel, c'est-à-dire les règles qui multiplient le nombre de branches. A ces nouvelles branches, nous appliquons les règles pour le quantificateur universel et la négation du quantificateur existentiel, c'est-à-dire les règles qui nécessitent la considération de toutes les constantes apparaissant sur la branche. Si nous pouvons alors fermer toutes les branches de l'arbre résultant, nous pouvons conclure que l'ensemble de phrases initial est consistant. Autrement, nous cherchons des connecteurs que nous n'avons pas encore traités et répétons la procédure. Représentée schématiquement, la procédure est donc la suivante :

1. Est-ce qu'il y a des connecteurs reliant des phrases complètes ? Appliquons les règles pour les connecteurs.
2. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par "$\exists$" ou par "$\neg\forall$" ? Appliquons les règles correspondantes pour ouvrir de nouvelles branches pour toutes les constantes et une nouvelle.
3. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par "$\forall$" ou par "$\neg\exists$" ? Appliquons les règles correspondantes pour faire des instanciations pour toutes les constantes.
4. Est-ce qu'il y a des connecteurs reliant des phrases complètes ? Retournons à l'étape 1).
5. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par "$\exists$" ou par "$\neg\forall$" ? Retournons à l'étape 2).
6. Est-ce qu'il y a des formules qui commencent par "$\forall$" ou par "$\neg\exists$" ? Retournons à l'étape 3).
7. L'arbre est entièrement développé quand aucune règle pour des connecteurs est applicable ; nous avons crées de nouvelles branches pour toutes les formules commençant par "$\exists$" ou par "$\neg\forall$" et toutes les constantes sur les branches correspondantes, et nous avons ajouté toutes les

instanciations des formules commençant par "$\forall$" ou par "$\neg\exists$" pour toutes les constantes sur les branches correspondantes.

11.3 Quelques exemples

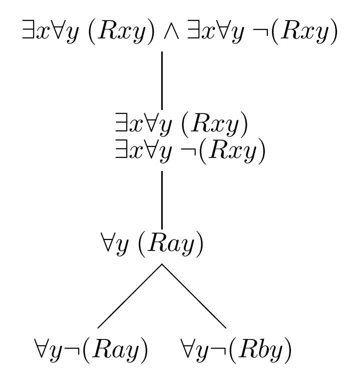
Considérons, par exemple, la formule "$\exists x\forall y\ (Rxy) \wedge \exists x\forall y\ \neg(Rxy)$". Nous commençons à construire son arbre en appliquant la règle pour la conjonction :

$$\begin{array}{c} \exists x\forall y\ (Rxy) \wedge \exists x\forall y\ \neg(Rxy) \\ | \\ \exists x\forall y\ (Rxy) \\ \exists x\forall y\ \neg(Rxy) \end{array}$$

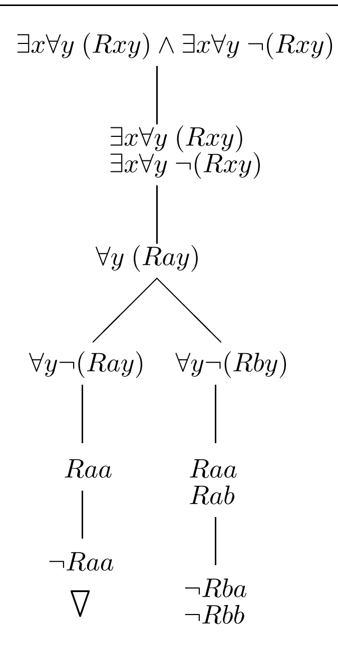
A ce stade, nous appliquons la règle pour le quantificateur existentiel à la première de nos deux formules existentiellement quantifiées, c'est-à-dire avec "$\exists x\forall y\ (Rxy)$". Comme notre seule branche ne contient aucune constante individuelle, nous n'avons qu'à introduire une nouvelle constante, que nous abrégeons par "a" :

$$\begin{array}{c} \exists x\forall y\ (Rxy) \wedge \exists x\forall y\ \neg(Rxy) \\ | \\ \exists x\forall y\ (Rxy) \\ \exists x\forall y\ \neg(Rxy) \\ | \\ \forall y\ (Ray) \end{array}$$

D'après nos règles de procédure, nous devons traiter le deuxième quantificateur existentiel "$\exists x\forall y\ \neg(Rxy)$" avant d'appliquer la règle pour le quantificateur universel. Nous introduisons alors une nouvelle constante, "b" et instancions la deuxième quantification existentielle également avec notre ancienne constante "a", obtenant deux branches :



Sur la branche gauche, nous n'avons qu'une seule constante, "a" : les deux instanciations des quantifications universelles "$\forall y\ (Ray)$" et "$\forall y \neg(Ray)$" nous donnent donc "Paa" et "$\neg Paa$" – la branche se ferme. A droite, nous avons deux constantes et obtenons "Paa" et "Pab" de la première quantification universelle "$\forall y\ (Ray)$" et "$\neg Pba$" et "$\neg Pbb$" de la deuxième, "$\forall y \neg(Ray)$" – la branche ne se ferme pas. Nous sommes arrivés à l'arbre suivant :



Nous ne pouvons plus appliquer aucune règle à la branche droite et nous avons trouvé un modèle pour la phrase "$\exists x \forall y\ (Rxy) \land \exists x \forall y\ \neg(Rxy)$" – une structure $\mathcal{A}$, où $R^{\mathcal{A}}$ relie a à a et a à b et rien d'autre. Un modèle pour la phrase initiale serait donc par exemple une structure qui consiste d'un univers de discours de deux personnes, Sam et Marie, et d'une relation exprimée par "x aime y" qui est telle que Sam aime soi-même et Marie, et Marie ne s'aime pas et n'aime pas non plus Sam.

Comme pour la méthode des arbres de la logique propositionnelle, nous pouvons également utiliser la méthode pour vérifier la validité d'une proposition : une phrase sera valide si et seulement si sa négation est inconsistante, c'est-à-dire si toutes les branches de l'arbre pour cette négation se ferment.

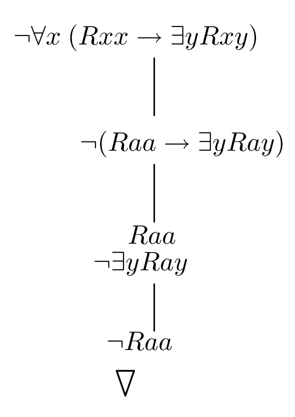
Vérifions, par exemple, la validité de la phrase "$\forall x\ (Rxx \rightarrow \exists y Rxy)$". Cette phrase ne contient aucune constante individuelle – c'est pourquoi nous commençons par l'instancier avec une nouvelle constante "a" et nous appliquons la règle pour les formules $\ulcorner \neg(\phi \rightarrow \psi) \urcorner$:

$$\neg \forall x\ (Rxx \rightarrow \exists y Rxy)$$

$$\neg(Raa \rightarrow \exists y Ray)$$

$$Raa$$
$$\neg \exists y Ray$$

Comme "a" est la seule constante, l'instanciation nous donne "Paa" et nous pouvons fermer la (seule) branche :



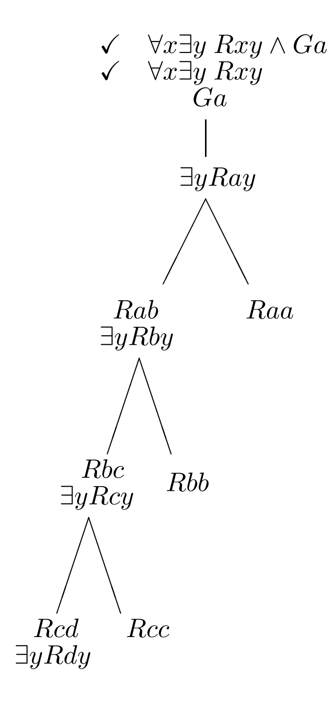
La branche unique est fermée : la phrase est inconsistante et sa négation est valide.

Comme dans le cas de la logique propositionnelle, la méthode des arbres pour la logique des prédicats nous permet également de tester la validité d'une inférence. Prenons l'argument qui a comme prémisses "$\forall x(Fx \to Gx)$" et "$\neg\exists x(Gx)$" et "$\neg\exists x(Fx)$" comme conclusion. Pour vérifier si oui ou non la conclusion est une conséquence sémantique des prémisses (si oui ou non il est le cas que $\{\ \forall x(Fx \to Gx), \neg\exists x(Gx)\} \models \neg\exists x(Fx)$), nous construisons l'arbre pour la négation de l'implication correspondante.

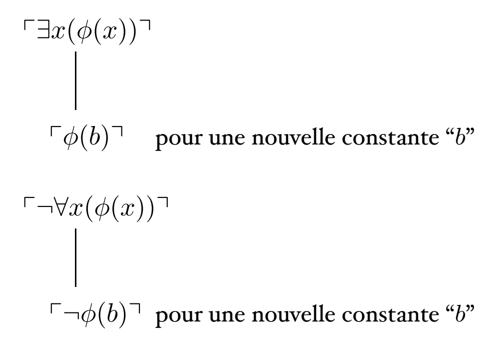
11.4 Les individus arbitraires

La règle de branchement pour le quantificateur existentiel (et la négation du quantificateur universel) et la règle d'instanciation pour le quantificateur universel (et la négation du quantificateur existentiel) peuvent interférer l'une avec l'autre, de sorte que la première nous force à introduire de nouvelles constantes que la seconde nous force d'utiliser dans des instanciations et ainsi de suite.

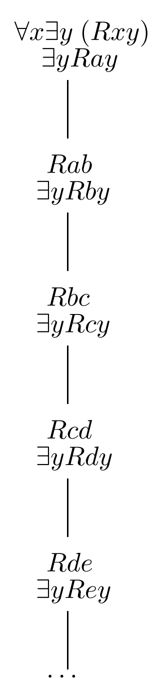
Considérons la phrase "$\forall x\exists yRxy\wedge Ga$" et faisons son arbre. Nous remarquons que nous n'en arriverons jamais au bout :



L'arbre qui en résulte est infini dans deux direction : il contient une branche infinie (celle tout à gauche) et il contient un nombre infini de branches. Nous observons aussi que les branches partant à droite n'ajoutent rien : la nouvelle constante "b", par exemple, introduite après le premier branchement, peut nous servir également pour représenter la vielle constante "a" – si nous le voulons, nous sommes libres de l'interpréter par le même individu que nous utilisons pour interpréter "a". Nous arrivons donc aux simplifications suivantes pour nos règles de branchement :



Avec ces nouvelles règles, notre arbre n'est infini que dans la direction verticale :



Pour prouver la validité d'une proposition, la nouvelle méthode est aussi efficace que l'ancienne. Ceci est dû au fait suivant :

Théorème 68. *Si une phrase a un modèle de n individus, alors elle a aussi un modèle de $n+1$ individus.*

Preuve Partant d'un modèle de n individu rendant vrai la phrase en question, nous rajoutons simplement un individu de plus et stipulons que les mêmes prédicats sont vraies de lui que le sont d'un des n individus dans l'ancien modèle. □

La conversion de ce théorème dit que si une phrase n'a pas de modèle de $n+1$ individus, elle n'aura pas de modèle de n individus. Les branches générées par les règles du quantificateur existentiel (et de la négation du quantificateur universel) de l'ancienne méthode représentaient de telles modèles : nous préservons l'utilité de la méthode pour prouver des phrases si nous laissons tomber ces chemins de vérité qui correspondant à des modèles contenant moins d'individus.

11.5 Les arbres infinis

11.6 Les limites de la méthode des arbres

Le fait qu'il est possible que nous construisons, en appliquant nos règles, des arbres infinis, montre une différence importante entre la logique propositionnelle et la logique des prédicats : la logique propositionnelle est décidable et la logique des prédicats ne l'est pas. Dans le cas de la logique propositionnelle, la méthode des arbres nous fournit une méthode syntaxique de prouver des phrases qui est correct et complète. Ceci implique que

(i) Si une phrase est une tautologie, alors toutes les branches de l'arbre pour sa négation se ferment.
(ii) Si une phrase n'est pas une tautologie, son arbre nous montre pour quelle interprétation de ses constituantes non-logique (phrases simples) elle est vraie.

La méthode des arbres pour la logique des prédicats retient la propriété (i) : les phrases que nous prouvons par cette méthode sont des tautologies. Comme le montre le dernier exemple, la propriété (ii) n'est pas retenu. Pour les phrases qui ne peuvent être vraies que dans une structure contenant une infinité d'objets, la méthode ne nous fournit pas d'interprétation de ses constituantes non-logique qui la rende vraie. Cependant ce désavantage est limité aux structures infinies : si une phrase est vraie dans une structure finie, la méthode des arbres nous permet d'en trouver au moins une.

Cette différence montre une asymétrie fondamentale entre la logique des prédicats et la logique propositionnelle. Pour la logique propositionnelle, la méthode des arbre nous donne ce que l'on appelle une "procédure de décision" : une méthode mécanique pour tester si oui ou non une phrase est une tautologie. Une telle méthode mécanique à deux propriétés importantes :

(i) Si une phrase est valide, elle répond par "oui".
(ii) Si une phrase n'est pas valide, elle répond par "non".

Notre exemple montre que la deuxième condition n'est pas satisfaite par la méthode des arbres pour la logique des prédicats. Il peut arriver que la méthode ne répond pas. Cette limitation n'est pas spécifique à la méthode des arbres. Comme Alonzo Church a prouvé en 1936, il n'existe pas de procédure de décision pour la logique des prédicats. Si nous voulons savoir si oui ou non une phrase est valide, et que nous faisons l'arbre pour sa négation et qu'après n étapes restons avec des chemins ouverts, nous ne pouvons conclure que la phrase est réellement valide *seulement si* tous les quantificateurs universels et tous les négations de quantificateurs existentiels ont été instancié pour toutes les constantes sur leurs branches. Comme le montre l'exemple précédent, il est possible que cette situation ne se produise jamais.

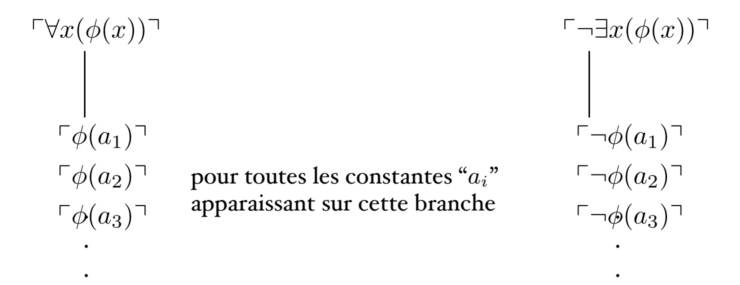
Cette limitation des la méthode des arbres ne signifie pas que nous n'arriverons jamais à trouver une structure vérifiant une phrase satisfaisable. Si la phrase admet un modèle fini, nous le trouverons. Mais si elle n'a que des modèles infinies, il n'est pas toujours possible d'en trouver un. Cette tâche requiert de l'ingéniosité.

11.7 L'indécidabilité de la logique des prédicats

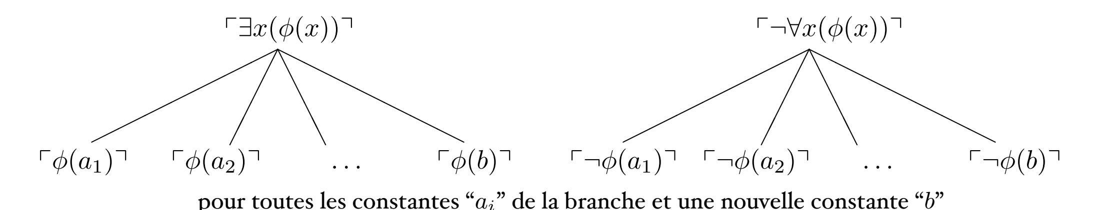
Il n'y a pas de procédure de décision pour le calcul de prédicat Church (1936), mais il y en a pour le fragment monadique, c'est-à-dire cette partie de la logique des prédicats qui ne considère que des prédicats unaires et laisse de côté les relations.

Points à retenir

1. Si une quantification universelle $\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$ est vraie, alors toutes ses instanciations $\ulcorner\phi(a)\urcorner$, pour une constante individuelle "a", sont vraies. Si une quantification existentielle $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ est fausse, alors toutes ses instanciations $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ sont fausses.
2. Si une quantification universelle $\ulcorner\forall x(\phi(x))\urcorner$ est fausse, alors au moins une instanciation $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est fausse. Si une quantification existentielle $\ulcorner\exists x(\phi(x))\urcorner$ est vraie, alors au moins une instanciation $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ est vraie.
3. Les règles de construction d'arbres pour le quantificateur universel et la négation d'un quantificateur existentiel sont les suivantes :



4. Les règles de construction d'arbres pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel sont les suivantes :



pour toutes les constantes "a_i" de la branche et une nouvelle constante "b"

5. Dans une structure ayant un domaine fini, une quantification universelle est équivalente à la conjonction de ses instanciations et une quantification existentielle est équivalente à la disjonction de ses instanciations.
6. Nous pouvons simplifier les dernières règles pour "$\exists x(\phi(x))$" et pour "$\neg\forall x(\phi(x))$" en nous concentrant uniquement sur la branche contenant la constante nouvelle.
7. Cette nouvelle méthode est aussi efficace pour prouver des phrases que l'ancienne, parce qu'une phrase avec un modèle de n individus a aussi un modèle avec $n+1$ individus.
8. La méthode des arbres nous permet prouver une phrase *si* cette phrase est valide.
9. Nous ne pouvons pas déduire de l'impossibilité de prouver une phrase (du fait que l'arbre pour sa négation ne se ferme pas) le caractère non-valide de celle-ci. Nous avons une garantie de trouver un modèle seulement si la phrase est vraie dans une structure avec un univers de discours fini.
10. Ceci correspond à une différence importante entre la logique propositionnelle et la logique des prédicats : la première est décidable (admet une procédure mécanique pour tester le caractère tautologique d'une proposition), la dernière ne l'est pas. Pour trouver des contre-exemples, il faut de l'ingéniosité.

Chapitre 12

La déduction naturelle

Après avoir donné les définitions du langage $\mathcal{L}^+$ et des notions clefs de la sémantique des prédicats, nous étudierons dans cette leçon deux calculs syntaxiques pour prouver des théorèmes de la logique des prédicats. Le premier calcul est un calcul axiomatique, qui consiste en quelques axiomes et deux règles d'inférences à l'aide desquelle on en déduit des théorèmes. La deuxième méthode syntaxique est une extension de la méthode des arbres pour la logique propositionnelle, avec quatre règles supplémentaires pour les phrases quantifiées et leurs négations.

12.1 Les règles d'introduction et d'élimination de quantificateurs

Pour pouvoir traiter des phrases quantifiées par les méthodes de la déduction naturelle, nous avons besoin de règles d'introduction et d'élimination pour les quantificateurs.

Comme nous l'avons fait pour la méthode des arbres, nous devons prendre en considération le fait qu'une quantification universelle sur un domaine fini est équivalente à la conjonction de toutes ses instanciations, et qu'une quantification existentielle sur un tel domaine fini correspond à une disjonction de ses instanciations. Éliminer un quantificateur universel revient donc à l'instancier pour tous les membres du domaine. Considérons l'inférence suivante :

(1)

Tous les hommes sont mortels.
Socrate est un homme.
―――――――――――――
Socrate est mortel.

L'inférence valide (1) correspondra à cette preuve-ci dans le calcul que nous développerons dans cette leçon :

1	$Ha, \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	$\vdash Ha$	prémisse
2	$Ha, \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	$\vdash \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	prémisse
3	$Ha, \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	$\vdash Ha \rightarrow Ma$	de (2) par (SU)
4	$Ha, \forall x(Hx \rightarrow Mx)$	$\vdash Ma$	de (1) et (3) avec (MP)

La règle (SU), appelée *spécialisation universelle*, nous permet de passer d'une quantification universelle à n'importe quelle instanciation de la phrase ouverte universellement quantifiée pour une constante.

L'élimination du quantificateur universel revient donc à une instanciation de la phrase ouverte qu'il gouverne, remplaçant toutes les occurrences libres d'une variable par des occurrences d'une constante.

Comment pouvons nous *introduire* un quantificateur universel dans une formule ? L'analogie avec la conjonction pourrait nous faire penser qu'il suffirait, pour établir la vérité de "$\forall x(Fx)$", par exemple, de prouver "$F(a_1)$", "$F(a_2)$" et "$F(a_3)$", si nous nous trouvons dans une structure finie ne contenant que les trois objets a_1, a_2 et a_3 dans son domaine. Cette méthode, cependant, ne s'avère aucunement valide. Non seulement elle serait inapplicable dans le cas d'un domaine infini et le serait aussi dans le cas où nous ne disposons pas de noms pour tous les objets dans le domaine. Son application signifierait également utiliser, à l'intérieur d'une preuve, une information qui ne nous est donnée que de l'extérieur du modèle : même si nous arrivions 'accidentellement' à prouver "Fx" de tous les membres du domaine – et ainsi à prouver, pour toute constante "a", que Fa –, nous n'aurions pas encore prouvé *que "Fx" est vrai de tous les membres du domaines* – pour cela, nous aurions besoin d'une garantie que la totalité des individus dont nous avons prouvé "Fx" comprend réellement tous les individus du domaine.

Une piste plus prometteuse nous est désignée par les preuves mathématiques et par l'introduction de nouvelles constantes dans la méthode des arbres. Si un géomètre, par exemple, veut prouver que la somme des angles intérieurs de n'importe quel triangle est égale à 180 degrés, il dessinera au tableau noir un triangle particulier, nommé ABC d'après ses trois angles. S'il ne fait usage, dans sa preuve du théorème, d'aucune propriété de ce triangle autre que celles qui lui sont imposées par la définition même d'un triangle, le théorème vaudra pour tout triangle. Le triangle particulier ABC aura représenté tous les triangles. Dans ce sens, le triangle ABC peut être appelé 'triangle arbitraire'.

Nous sommes passées par une étape analogue dans le développement de la méthode des arbres ; nous avons montré qu'il était possible de simplifier les règles pour le quantificateur universel et la négation du quantificateur existentiel, en nous limitant à une seule constante, nouvelle, qui représentait également les anciennes constantes déjà introduites sur la branche correspondante. Au lieu de dire que la constante nouvelle représentait les individus que nous n'avions pas encore considérés dans notre preuve, nous avons simplement dit qu'elle représentait *n'importe quel* individu du domaine. Nous nous avons servi de la constante pour désigner un individu arbitraire.

Pour prouver une quantification universelle à partir des prémisses particulières, nous exigerons donc que ces prémisses soient vraies d'un individu arbitraire.[1] Un tel individu nous est fourni par exemple par la règle de spécialisation universelle, comme c'est le cas dans la preuve suivante :

1	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \to Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash Fa$	de (1) par (SU)
4	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash Fa \to Ga$	de (2) par (SU)
5	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash Ga$	de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x(Fx), \forall x(Fx \to Gx)$	$\vdash \forall x(Gx)$	de (5) avec (GU)

Nous appellerons cette règle, qui nous permet d'établir une phrase générale à partir d'une phrase singulière parlant d'un individu arbitraire, "*généralisation universelle*" (GU).

Cependant, il est clair que nous devons restreindre notre usage de (GU) : le raisonnement suivant est

[1] Je préfère cette présentation à celle de Lemmon (1965a: 107) qui parle de *noms arbitraires* pour des raisons esquissées dans la leçon trois. Pour une théorie développée des individus arbitraires, voir Fine (1985) et, pour une revue critique de différentes théories, Nef (1998).

clairement fallacieux :

1	Fa	$\vdash Fa$	prémisse
2	Fa	$\vdash \forall x(Fx)$	de (1) par (GU)

Nous ne pouvons pas, du fait qu'un certain individu a soit F conclure que toutes les choses dans l'univers de discours soient F – le a en question doit être arbitraire. Mais qu'est-ce que cela signifie concrètement ? Dans le cas de la méthode des arbres, ceci signifiait que la constante était "nouvelle" pour la branche, c'est-à-dire n'avait pas d'occurrence précédente. Dans le cas du géomètre qui prouve des théorèmes sur tous les triangles, ceci signifie que la preuve en question ne dépende d'aucune assomption particulière sur le triangle étant considéré paradigmatique ou arbitraire. Dans la déduction naturelle, nous combinons ces deux exigences : la constante en question, "a", ne doit apparaître dans aucune supposition ou prémisse dont dépend la preuve de la phrase singulière "Fa".

De même que les règles pour l'introduction et l'élimination de la disjonction sont plus complexes que celles pour la conjonction, de même les règles pour le quantificateur existentiel sont un peu plus compliquées que celles pour le quantificateur universel. Pour introduire le quantificateur existentiel, nous *généralisons* une phrase particulière : si "Fa" est prouvée pour un certain a, alors nous pouvons prouver "$\exists x(Fx)$". La règle d'introduction du quantificateur existentiel est donc appelée '*généralisation existentielle*' (GE). En voici un exemple :

1	$\forall x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx)$	$\vdash Fa$	de (1) par (SU)
3	$\forall x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	de (2) par (GE)

Même si la constante individuelle "a" que nous introduisons dans l'application de (SU) désigne un individu arbitraire, nous pouvons toujours conclure, du fait que cet individu arbitraire est F, qu'il y en a au moins un F – a, bien que arbitraire, existe.[2]

Pour la règle d'élimination du quantificateur existentiel, nous nous rappelons de la règle ($\vee$**E**) : cette règle éliminait une disjonction dans le sens qu'elle nous permettait de prouver une formule prouvée à partir des deux disjoints directement de la disjonction elle-même. D'une manière analogue, la règle d'élimination du quantificateur existentiel nous permet de passer des preuves d'une formule ϕ à partir de toute la série des instanciations "$Fa_1 \vee Fa_2 \vee \ldots \vee Fa_n \vee \ldots$" à une preuve de ϕ directement à partir de "$\exists x(Fx)$".

Au lieu de montrer que ϕ est une conséquence de toutes les instanciations de la quantification universelle, il suffit de montrer qu'elle s'ensuit d'une instanciation *quelconque* – d'une instanciation par un individu arbitraire, où "arbitraire" veut dire la même chose que dans l'application de la règle de généralisation universelle ((GU), l'introduction du quantificateur universel). Nous appelons cette instanciation le "*disjoint typique*" qui correspond à la quantification existentielle. Nous appelons "(SE)" ou "*spécialisation existentielle*" la règle qui élimine la quantification existentielle en faveur du disjoint typique.

Les règles de généralisation universelle (GU) et de spécialisation existentielle (SE) sont intimement liées : non seulement elles sont toutes deux restreintes par la condition selon laquelle l'individu en question est un individu arbitraire, mais de plus la notion d'arbitraire qu'elles utilisent est la même : (GU) est applicable à une phrase ϕ si et seulement si ϕ aurait pu être obtenue, par (SE), de sa quantification existentielle. L'application de la règle de spécialisation existentielle comprend quatre étapes :

[2] La raison sémantique pour la validité du séquent "$\forall x(Fx) \vdash \exists x(Fx)$" est que nous avons exclu les domaines vides dans notre définition d'une structure pour la logique des prédicats. Nous avons parlé d'une "logique libre" qui ne faisant pas cette présupposition dans la leçon 10 (cf. p. 177).

1. la preuve d'une quantification existentielle sous certaines suppositions et à partir de certaines prémisses ;
2. la supposition du disjoint typique ;
3. une preuve d'une autre phrase sous la supposition du disjoint typique ;
4. l'application de la règle, ayant comme conclusion la formule que nous pouvons également prouver sous la supposition du disjoint typique, et comme suppositions et prémisses celles de la quantification existentielle ;

Voici, comme exemple, une preuve du séquent "$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx) \vdash \exists x(Gx)$" :

1	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	prémisse
3	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^* Fa$	supposition (du disjoint typique)
4	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^* Fa \rightarrow Ga$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^* Ga$	de (3) et (4) avec (MP)
6	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^* \exists x(Gx)$	de (5) avec (GE)
7	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Gx)$	de (2), (3) et (6) avec (SE)

Étant donné les prémisses que tout ce qui est F est également G et qu'il y a quelque chose qui est F, nous supposons, à la ligne (3), qu'un individu arbitraire a est F. Sous cette supposition, nous démontrons ensuite qu'il y a quelque chose qui est G (ligne 6). De ces deux lignes et de la ligne où nous avons prouvé la quantification existentielle, nous concluons qu'il y a quelque chose qui est G (ligne 7). Dans une application de (SE), nous indiquons trois lignes : celle où nous avons prouvé la quantification existentielle, celle où nous avons fait la supposition du disjoint typique et celle où nous avons montré que la phrase en question peut être démontrée sous cette supposition.

Comme l'indique le parallélisme entre (SE) et (GU), nous devons également adopter quelques restrictions pour éviter des raisonnements fallacieux comme le suivant :

1	$\exists x(Fx)$	$\vdash \exists x(Fx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx)$	$Fa \quad \vdash^* Fa$	supposition
3	$\exists x(Fx)$	$\vdash Fa$	de (1), (2) et (2) avec (SE)
4	$\exists x(Fx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	de (3) avec (GU)

L'application de (GU) est correcte, puisque "$\exists x(Fx)$" ne contient pas "a". Mais l'application de (SE) est incorrecte, puisque la conclusion prouvée sous la supposition du disjoint typique contient elle-même une occurrence de la constante pour l'individu arbitraire a. Même si "Fa" est une conséquence d'elle-même, il ne s'ensuit pas de "$\exists x(Fx)$" qu'un individu, arbitrairement choisi, est F. Nous devons donc limiter les conclusions obtenues à partir du disjoint typique à des phrases qui portent sur des individus autres que celui qui nous a servi pour l'instanciation.

Cette restriction correspond à l'exigence que, de toutes les phrases que nous dérivons de la supposition du disjoint typique, seules celles qui ne concernent pas l'individu choisi comme arbitraire sont également des conséquences de la quantification existentielle.

Cette précaution, même si elle est nécessaire, n'est pas encore suffisante. Nous devons également supposer que "a" n'a pas d'occurrence dans les suppositions sous lesquelles est obtenue la conclusion

dérivée du disjoint typique. Ceci est montré par le raisonnement fallacieux suivant :

1	$\exists x(Fx), Ga$		$\vdash$	$\exists x(Fx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx), Ga$		$\vdash$	Ga	prémisse
3	$\exists x(Fx), Ga$	Fa	$\vdash^*$	Fa	supposition
4	$\exists x(Fx), Ga$	Fa	$\vdash^*$	$Fa \wedge Ga$	de (2) et (3) avec ($\wedge$**I**)
5	$\exists x(Fx), Ga$	Fa	$\vdash^*$	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	de (4) avec (GE)
6	$\exists x(Fx), Ga$		$\vdash$	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	de (2), (3) et (5) avec (SE)

Ce raisonnement est fallacieux – nous procédons de deux prémisses portant sur deux individus – qu'un individu arbitraire est F et que quelque chose est G – à la conclusion qu'il y a quelque chose qui est en même temps F et G. Le problème n'est pas que la conclusion obtenue, à la ligne (5), de la supposition du disjoint typique, contient "a". Le caractère fallacieux du raisonnement est plutôt dû au fait qu'elle reste sur une supposition, à savoir "Ga", autre que le disjoint typique, contenant "a". "$\exists x(Fx \wedge Gx)$" a été dérivé en faisant une assomption sur l'individu arbitraire en question – qu'il n'était pas seulement F, mais également G.

Ces quatre règles (GU), (SU), (GE) et (SE) ainsi que les règles pour les connecteurs forment un calcul de déduction naturelle pour la logique des prédicats. Les règles pour les connecteurs sont maintenant interprétées comme s'appliquant à des phrases du langage $\mathcal{L}^+$. Il est important de noter que l'on ne peut pas, par exemple, supposer une phrase ouverte – une telle supposition donnerait facilement lieu à des raisonnements fallacieux et serait sémantiquement non-sensée : nous supposons qu'une phrase est vraie et ne pouvons pas supposer qu'une phrase ouverte est satisfaite par quelques objets.[3]

12.2 Les règles de la déduction naturelle pour la logique des prédicats

Nous sommes maintenant en mesure de formuler nos règles de la déduction naturelle pour les quantificateurs, règles qui se rajoutent à celles pour les connecteurs, maintenant interprétées comme gouvernant non seulement des connecteurs propositionnels, mais aussi des connecteurs reliant des phrases ouvertes.

L'élimination du quantificateur universel et l'introduction du quantificateur existentiel

Soit ϕ une formule de $\mathcal{L}^+$, "x" une variable et "t" un terme *libre pour "x" dans ϕ*.[4] Soit $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$ le résultat de la substitution (uniforme) de "t" pour "x" dans ϕ. La règle de "*spécialisation universelle*" (SU)

[3] L'application des anciennes règles aux nouvelles formules peut créer de nouveaux types d'erreurs : Pour l'application de la règle de preuve conditionnelle, par exemple, il faut garder à l'esprit qu'elle ne nous permet d'enlever que la supposition transformée en l'antécédent de l'implication. Nous ne pouvons pas, par exemple, supposer "Fa", prouver sous cette supposition que $\exists x(Gx)$ et conclure ensuite "$\exists x(Fx) \to \exists x(Gx)$".

[4] Nous avons défini cette notion dans la leçon 12 (cf. p. 193). Un terme n'est pas libre pour une variable dans une formule si une éventuelle substitution de la variable par le terme avait comme conséquence qu'une occurrence libre de cette variable dans le terme devenait gouvernée par un quantificateur dans la formule. Dans le cas où le terme en question est une variable, cela veut dire qu'il serait substitué à l'intérieur d'un quantificateur qui le gouvernera.

nous donne alors le droit de conclure $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$ à partir de $\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$:

m	$\vdash \ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner\phi(x/t)\urcorner$	de (m) avec (SU)

La règle de "*généralisation existentielle*" (GE) est la converse de (SU) : elle nous donne le droit d'inférer $\ulcorner\exists x(\phi)\urcorner$ à partir de $\ulcorner\phi(x/t)\urcorner$.

m	$\vdash \ulcorner\phi(x/t)\urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner\exists x(\phi)\urcorner$	de (m) avec (GE)

Dans les deux cas, d'éventuelles suppositions ou prémisses à la ligne (m) sont conservées à la ligne (n).

L'introduction du quantificateur universel et l'élimination du quantificateur existentiel

Soit $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ une formule qui contient une constante individuelle "a". S'il n'est pas le cas que "a" a une occurrence dans une des prémisses dont dépend la preuve de ϕ, la règle de *généralisation universelle* (GU) nous permet d'étendre une preuve de $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ à une preuve de $\ulcorner\forall x(\phi(a/x))\urcorner$:

m	$\vdash \ulcorner\phi(a)\urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\vdash \ulcorner\forall x(\phi(a/x))\urcorner$	de (m) avec (GU)

La règle de *spécialisation existentielle* (SE) nous permet de prouver, à partir de $\ulcorner\exists x(\phi(a/x))\urcorner$ toute formule ψ que nous pouvons prouver à partir de la supposition $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ – s'il n'est pas le cas que "a" a une occurrence dans ψ ou dans une supposition ou une prémisse dont dépend la preuve de ψ à partir de $\ulcorner\phi(a)\urcorner$:

m	$\vdash \ulcorner\exists x(\phi(a/x))\urcorner$	
.	.	
.	.	
.	.	
n	$\ulcorner\phi(a)\urcorner \quad \vdash^* \ulcorner\phi(a)\urcorner$	supposition
.	.	
.	.	
.	.	
o	$\ulcorner\phi(a)\urcorner \quad \vdash^* \psi$	
.	.	
.	.	
.	.	
p	$\vdash \psi$	de (m), (n) et (o) avec (SE)

La ligne (p) contiendra toutes les prémisses ou suppositions de la ligne (m) et toutes les suppositions nécessaires pour la preuve de ψ à partir de $\ulcorner\phi(a)\urcorner$ (autres que $\ulcorner\phi(a)\urcorner$).

12.3 Quelques exemples

Le premier exemple illustre le bon usage de la règle de spécialisation existentielle (SE). Pour prouver une conclusion à partir d'une quantification existentielle, nous essayons de la dériver de son disjoint typique. Voici une preuve du séquent "$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge Hx)$". Nous commençons par la supposition du disjoint typique :

1	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$		$\vdash \forall x(Gx \to Hx)$	prémisse
2	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$		$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa \wedge Ga$	supposition

Une instanciation de la quantification universelle pour la constante "a" qui représente l'individu arbitraire qui était dit être F et G nous permet alors d'appliquer les règles ordinaires de connecteurs, prouvant que a n'est pas seulement F mais aussi H :

4	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ga \to Ha$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ga$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
6	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ha$	de (4) et (5) avec (MP)
7	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
8	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa \wedge Ha$	de (6) et (7) avec ($\wedge$**I**)

Pour compléter la preuve de "$\exists x(Fx \wedge Hx)$", il nous reste à faire une généralisation existentielle par rapport à l'individu arbitraire et d'appliquer la règle de spécialisation existentielle au résultat :

9	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx \wedge Hx)$	de (8) avec (GE)
10	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$		$\vdash \exists x(Fx \wedge Hx)$	de (2), (3) et (9) avec (SE)

L'application de (SE) est légitime car "a" n'a pas d'occurrence dans "$\exists x(Fx \wedge Hx)$" et parce que la preuve de la dernière phrase ne dépendait pas d'autres suppositions sur a que celle que le disjoint typique était vrai.

Prouvons la distributivité du quantificateur universel sur la conjonction, c'est-à-dire le séquent "$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx) \vdash \forall x(Fx \wedge Gx)$". La preuve consiste en une instanciation des deux conjoints, suivie d'une généralisation de la conjonction des instanciations :

1	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \forall x(Fx)$	de (1) avec ($\wedge$**E**)
3	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash Fa$	de (2) avec (SU)
4	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \forall x(Gx)$	de (1) avec ($\wedge$**E**)
5	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash Ga$	de (2) avec (SU)
6	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash Fa \wedge Ga$	de (3) et (5) avec ($\wedge$**I**)
7	$\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \wedge Gx)$	de (6) avec (GU)

Dans la preuve précédente, nous n'avons dû faire aucune supposition. Par contre, pour prouver la distributivité du quantificateur existentiel sur la disjonction, nous devons en faire une. Prouvons alors

le séquent "$\exists x(Fx \vee Gx) \vdash \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$" :

1	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$\vdash \exists x(Fx \vee Gx)$		prémisse
2	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga$	$\vdash^* Fa \vee Ga$	supposition
3	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^* Fa$	supposition
4	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	de (3) avec (GE)
5	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga, Fa$	$\vdash^* \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	de (4) avec (∨**I**)
6	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^* Ga$	supposition
7	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^* \exists x(Gx)$	de (6) avec (GE)
8	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga, Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	de (7) avec (∨**I**)
9	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$Fa \vee Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	de (2, 3, 5, 6, 8) avec (∨**E**)
10	$\exists x(Fx \vee Gx)$	$\vdash \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$		de (1), (2) et (9) avec (SE)

Comme nous l'avons vu dans la discussion sur les règles de passage (p. 189 dans a leçon 10,le quantificateur existentiel distribue aussi sur l'antécédent d'une implication qui ne contient pas d'occurrence libre de la variable qu'il quantifie. Nous pouvons donc prouver "$\exists x(Fa \rightarrow Fx) \vdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$" :

1	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$\vdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$		prémisse
2	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	Fa	$\vdash^* Fa$	supposition
3	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^* Fa \rightarrow Fb$	supposition
4	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^* Fb$	de (2) et (3) avec (MP)
5	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa, Fa \rightarrow Fb$	$\vdash^* \exists x(Fx)$	de (4) avec (GE)
6	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	Fa	$\vdash^* \exists x(Fx)$	de (1), (3) et (5) avec (SE)
7	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$\vdash Fa \rightarrow \exists x(Fx)$		de (2) et (6) avec (PC)

Puisque nous avons déjà une occurrence de la constante "a", nous devons choisir, à la ligne (3), la constante "b" pour désigner l'individu arbitraire qui figure dans le disjoint typique de la quantification existentielle.

Nous pouvons aussi prouver un séquent, "$\forall x \forall y(Rxy) \vdash \forall y \forall x(Rxy)$", qui correspond à une observation que nous avons faite auparavant : que les variables, prises individuellement, sont interchangeables – tout ce qui distingue une variable d'une autre sont leurs propriétés relationnelles, en particulier si elles sont liées par des quantificateurs de différentes types :

1	$\forall x \forall y(Rxy)$	$\vdash \forall x \forall y(Rxy)$	prémisse
2	$\forall x \forall y(Rxy)$	$\vdash \forall y(Ray)$	de (1) avec (SU)
3	$\forall x \forall y(Rxy)$	$\vdash Rab$	de (2) avec (SU)
4	$\forall x \forall y(Rxy)$	$\vdash \forall x(Rxb)$	de (3) avec (GU)
5	$\forall x \forall y(Rxy)$	$\vdash \forall y \forall x(Rxy)$	de (4) avec (GU)

Comme dans la dernière preuve, nous devons choisir deux constantes individuelles différentes, car sans le faire, nous déduirions le séquent invalide "$\forall x \forall y(Rxy) \vdash \forall x(Rxx)$", ayant perdu toute possibilité de distinguer les deux places argumentales.

Finalement, nous prouvons un séquent compliqué, à savoir le suivant :

$$\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Rxy)), \forall x(Fx \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Rxy)) \vdash \forall x(Gx \rightarrow \neg Bx)$$

En abrégeant "$\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Rxy))$" par "**A**" et "$\forall x(Fx \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Rxy))$" par "**B**", nous

obtenons la preuve suivante :

1	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow Rxy))$			prémisse
2	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \forall x(Fx \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Rxy))$			prémisse
3	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	supposition
4	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*$	Fa	de (3) avec (∧)
5	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*$	$\forall y(Gy \rightarrow Ray)$	de (3) avec (∧)
6	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*$	$Fa \rightarrow \forall y(By \rightarrow \neg Ray)$	de (2) avec (SU)
7	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*$	$\forall y(By \rightarrow \neg Ray)$	de (4) et (6) avec (MP)
8	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*$	Gb	supposition
9	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*$	$Gb \rightarrow Rab$	de (5) avec (SU)
10	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*$	Rab	de (8) et (9) avec (MP)
11	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*$	$Bb \rightarrow \neg Rab$	de (7) avec (SU)
12	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*$	$\neg\neg Rab$	de (10) avec (DN)
13	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray), Gb$	$\vdash^*$	$\neg Bb$	de (12) et (11) avec (MT)
14	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*$	$Gb \rightarrow \neg Bb$	de (8) et (13) avec (PC)
15	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$Fa \wedge \forall y(Gy \rightarrow Ray)$	$\vdash^*$	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Bx)$	de (14) avec (GU)
16	$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	$\vdash \forall x(Gx \rightarrow \neg Bx)$			de (1), (3) et (15) avec (SE)

Comme toujours, nous commençons par des instanciations des quantifications, ce qui nous permet ensuite d'appliquer les règles pour les connecteurs. En vue d'une application de (PC), nous supposons, à la ligne (8), l'antécédent de l'implication dont nous voulons prouver la quantification universelle. Nous généralisons le résultat obtenu à la ligne (15) et enlevons la supposition du disjoint typique, ce qui est permis parce que la conclusion obtenue n'en dépend pas.

12.4 Le théorème de déduction

12.5 Les limites de la logique des prédicats

(2)

George a toutes les qualités d'un grand général.
L'intelligence est une qualité d'un grand général.
―――――――――――――――――――――――
George est intelligent.

12.6 La logique des prédicats de deuxième ordre

12.7 La quantification plurielle

Points à retenir

1. La déduction naturelle pour la logique des prédicats consiste en les règles de déduction naturelle pour les connecteurs et en quatre règles d'introduction et d'élimination de quantificateurs.
2. La règle (SU), appelée "*spécialisation universelle*", nous permet de passer d'une quantification universelle à une instanciation de la phrase ouverte pour n'importe quel terme.
3. Un quantificateur existentiel est introduit par la règle de *généralisation existentielle* (GE).

4. Pour qu'une application des règles (SU) et (GE) soit correcte, il est requis que le terme remplacé par la variable soit libre pour cette variable dans la formule qui le contient, c'est-à-dire qu'il ne se trouve pas dans la portée d'un quantificateur qui lie cette variable.
5. Pour prouver une quantification universelle à partir d'une prémisse particulière à l'aide de la règle de *généralisation universelle* (GU), nous exigeons que cette prémisse soit vraie d'un individu arbitraire, c'est-à-dire d'un individu qui n'apparaît dans aucune supposition ou prémisse dont dépend la preuve de cette phrase particulière.
6. Par (GU), nous pouvons ensuite inférer une quantification universelle dans laquelle le terme arbitraire est substitué *partout* par une variable. Il est important que cette substitution soit uniforme.
7. La règle d'élimination du quantificateur existentiel (SE) correspond à celle de l'élimination de la disjonction ($\vee$**E**) et est par conséquent plus compliquée.
8. L'application de la règle de spécialisation existentielle (SE) comprend quatre étapes :
   (a) la preuve d'une quantification existentielle sous certaines suppositions et à partir de certaines prémisses ;
   (b) la supposition du disjoint typique ;
   (c) une preuve d'une autre phrase sous la supposition du disjoint typique ;
   (d) l'application de la règle, avec la conclusion que nous pouvons également prouver la phrase prouvée sous la supposition du disjoint typique à partir des suppositions et prémisses nécessaires pour la preuve de la quantification existentielle ;
9. La règle de spécialisation existentielle (SE) est sujette aux mêmes deux conditions que la règle de généralisation universelle :
   (a) la constante remplaçant la variable dans le disjoint typique ne doit apparaître dans aucune prémisse ou supposition de laquelle dépend la quantification existentielle ;
   (b) elle ne doit pas avoir d'occurrence dans la quantification existentielle que nous voulons prouver.
10. L'application de ces règles nous permet de prouver des théorèmes ("$\vdash \phi$") et des séquents ("$\phi \vdash \psi$") La déduction naturelle est une méthode syntaxique qui est correcte et complète par rapport à la sémantique de la logique des prédicats : toute phrase valide est un théorème et tout théorème est valide ; tout séquent déductible correspond à une relation de conséquence sémantique et toute conséquence sémantique peut être déduite comme séquent.

Chapitre 13

Propriétés métalogiques de la logique des prédicats

13.1 Les propriétés métalogiques de la logique des prédicats

Dans cette leçon, nous démontrerons quelques propriétés métalogiques de la logique des prédicats :

- la *correction* de la méthode des arbres, du calcul axiomatique et de la méthode de déduction naturelle, dont s'ensuit leur consistance ;
- la *complétude* de la méthode des arbres, du calcul axiomatique et de la déduction naturelle ;
- le *théorème de Löwenheim-Skolem* sur la logique des prédicats.
- la *compacité* de la logique des prédicats ;

Nous esquisserons aussi une preuve du méta-théorème le plus important de la logique et mathématiques modernes, le théorème d'incomplétude de Gödel.

Un système formel (au sens précédent) est dit consistant si on ne peut pas démontrer une formule et son contraire. Il est dit complet si pour toute formule du système formel, il existe un processus de transformation qui permet de prouver qu'elle est vraie ou fausse.

complétude Gödel (1931)

13.2 La correction et la complétude de la méthode des arbres pour la logique des prédicats

Pour prouver la complétude de la méthode des arbres pour la logique des prédicats, nous reprenons quelques notions et définitions de la leçon 9 et suivons la présentation de Smullyan (1968: 57 et seq.). Comme avant, nous divisons les sept autres règles de construction d'arbres (considérant les règles pour l'équivalence matérielle comme dérivées) en deux catégories : celles qui traitent des formules 'du type α' ($\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$, $\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi\vee\psi)\urcorner$, $\ulcorner\neg(\phi\rightarrow\psi)\urcorner$) qui 'continuent sur la même branche', et celles qui traitent des formules 'du type β' ($\ulcorner\neg(\phi\wedge\psi)\urcorner$, $\ulcorner\phi\vee\psi\urcorner$ et $\ulcorner\phi\rightarrow\psi\urcorner$) qui nous obligent à créer au moins une nouvelle branche. Nous ajoutons deux nouvelles catégories :

α	α_1	α_2
$\ulcorner\neg\neg\phi\urcorner$	ϕ	ϕ
$\ulcorner\phi\wedge\psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\neg(\phi\vee\psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\neg(\phi\to\psi)\urcorner$	ϕ	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$

β	β_1	β_2
$\ulcorner\neg(\phi\wedge\psi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	$\ulcorner\neg\psi\urcorner$
$\ulcorner\phi\vee\psi\urcorner$	ϕ	ψ
$\ulcorner\phi\to\psi\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi\urcorner$	ψ

γ	$\gamma(a)$
$\ulcorner\forall x(\phi)\urcorner$	$\phi(x/a)$
$\ulcorner\neg\exists x(\phi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi(x/a)\urcorner$

δ	$\delta(a)$
$\ulcorner\exists x(\phi)\urcorner$	$\phi(x/a)$
$\ulcorner\neg\forall x(\phi)\urcorner$	$\ulcorner\neg\phi(x/a)\urcorner$

Nous modifiant la construction des tableaux en ajoutant les règles (C) et (D) à (A) et (B) :

Définition 69 (Tableaux)**.** *Un tableau est un arbre binaire dont les noeuds sont des formules bien-formées de la logique des prédicats construites à partir d'une formule comme suit : si χ est une formule dont le tableau $\mathcal{T}$ a déjà été construit et qie ζ en est un point extrême, nous élargissons $\mathcal{T}$ par l'une des méthodes suivantes :*

(A) Si une formule du type α a une occurrence sur le chemin B_ζ (le chemin de χ jusqu'à ζ dans $\mathcal{T}$), nous ajoutons soit α_1 soit α_2 comme successeur unique à ζ.
(B) Si une formule du type β a une occurrence sur le chemin B_ζ, nous ajoutons β_1 comme successeur gauche et β_2 comme successeur de droite à ζ.
(C) Si une formule du type γ a une occurrence sur le chemin B_ζ, nous ajoutons des formules $\ulcorner\gamma(a)\urcorner$ comme successeurs pour toutes les constantes "a" apparaissant sur le chemin.
(D) Si une formule du type δ a une occurrence sur le chemin B_ζ, nous ajoutons des formules $\ulcorner\delta(a)\urcorner$ pour une nouvelle constante "a" qui n'apparaissait pas encore sur le chemin.

Nous constatons les quatre faits suivants :

F$_1$ α est vrai ssi α_1 est vrai et α_2 est vrai ;

F$_2$ β est vrai ssi soit β_1 est vrai soit β_2 est vrai ;

F$_3$ γ est vrai ssi $\ulcorner\gamma(a)\urcorner$ est vrai pour tout a dans l'univers ;

F$_4$ δ est vrai ssi $\ulcorner\delta(a)\urcorner$ est vrai pour au moins un a dans l'univers.

Nous notons aussi les quatre faits suivant concernant la satisfaisabilité d'un ensemble arbitraire E :

G$_1$ Si S est satisfaisable et que $\alpha\in S$, alors $S\cup\{\alpha_1,\alpha_2\}$ est satisfaisable.

G$_2$ Si S est satisfaisable et que $\beta\in S$, alors soit $S\cup\{\beta_1\}$, soit $S\cup\{\beta_2\}$ est satisfaisable.

G$_3$ Si S est satisfaisable et que $\gamma\in S$, alors $S\cup\{\gamma(a)\}$ est satisfaisable pour toute constante "a".

G$_4$ Si S est satisfaisable, que $\delta\in S$ et que "a" est une constante qui n'a aucune occurrence dans un élément de S, alors $S\cup\{\delta(a)\}$ est satisfaisable.

Pour prouver **G**$_4$ nous procédons comme suit : Si S est satisfaisable, il y a une structure et une assignation de valeurs par rapport auxquelles toutes les phrases dans S sont vraies. En particulier, il existe une interprétation I des signes non-logiques dans S et une assignation de valeurs à toutes les variables dans S qui rendent δ vrai. δ est d'un type existentiel – de **F**$_4$ il s'enseuit alors que δ est vrai ssi il existe un élément de l'univers de discours de lequel il est vrai. Nous appelons cet élément "a". Ayant ajouté cette nouvelle constante à notre langue, nous définissons une nouvelle interprétation des constantes comme suit :

$$I^*(\text{“}k\text{”}) := \begin{cases} a & k = a \\ I(\text{“}k\text{”}) & k \neq a \end{cases}$$

Sous cette nouvelle interprétation I^*, $\ulcorner\delta(a)\urcorner$ est vrai. $S\cup\{\ulcorner\delta(a)\urcorner\}$ est donc satisfaisable.

Nous pouvons maintenant prouver la correction de la méthode des arbres pour la logique des prédicats :

Théorème 70 (Correction de la méthode des arbres). *La méthode des arbres pour la logique des prédicats est correcte : toute formule prouvable est valide.*

Preuve Comme pour la logique propositionnelle, nous prouvons la correction par induction mathématique. $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_3$ et $\mathbf{G}_4$ nous assurent qu'une branche satisfaisable étendue par l'une des règles (A), (C) ou (D) reste satisfaisable.

CAVEAT POUR D

Si on étend une branche satisfaisable en deux branches par (B), au moins une des branches reste satisfaisable (par $\mathbf{G}_2$). Toute extension directe d'un tableau satisfaisable est donc satisfaisable. Il s'ensuit par induction mathématique que si l'origine d'un tableau est satisfaisable, le tableau entier l'est également. Par conversion, si un tableau n'est pas satisfaisable (ne contient que des branches fermées), l'origine ne l'est pas non plus. Sa négation est donc valide. □

Dans le cas de la logique propositionnelle, nous avons prouvé la complétude de la méthode des arbres en nous appuyant sur les faits suivants :

(i) pour chaque proposition, nous obtenons un arbre complet après un nombre fini d'étapes ;
(ii) les phrases se trouvant sur une branche complète et ouverte forment un ensemble de Hintikka ;
(iii) tout ensemble de Hintikka est satisfaisable, c'est à dire est un sous-ensemble d'un ensemble saturé.

Nous devons adapter notre définition des ensembles de Hintikka pour tenir compte du fait que la logique des prédicats permet des arbres infinis :

Définition 71. *Un ensemble de Hintikka $\mathcal{H}$ pour un univers de discours D est un ensemble de formules de la logique des prédicats satisfaisant les conditions suivantes :*

(a) $\mathcal{H}$ ne contient pas de formule atomique et sa négation.
(b) Si $\alpha \in \mathcal{H}$, alors $\alpha_1 \in \mathcal{H}$ et $\alpha_2 \in \mathcal{H}$.
(c) Si $\beta \in \mathcal{H}$, alors soit $\beta_1 \in \mathcal{H}$, soit $\beta_2 \in \mathcal{H}$.
(d) Si $\gamma \in \mathcal{H}$, alors $\gamma(a) \in \mathcal{H}$ pour tout $a \in D$.
(e) Si $\delta \in \mathcal{H}$, alors $\delta(a) \in \mathcal{H}$ pour au moins un $a \in D$.

Nous prouvons un lemme analogue :

Théorème 72 (Lemme). *Tout ensemble de Hintikka pour un univers D est satisfaisable dans D.*

Preuve

Soit $\mathcal{H}$ un ensemble de Hintikka pour l'univers D. Comme pour la logique propositionnelle, nous devons trouver une interprétation qui rende vraies toutes les phrases dans $\mathcal{H}$. Nous la définissons ainsi pour le cas spécial d'une formule atomique ϕ :

$$I(\phi) := \begin{cases} \mathbf{v} & \phi \in \mathcal{H} \\ \mathbf{f} & \ulcorner \neg\phi \urcorner \in \mathcal{H} \\ \text{un de } \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{f} & \phi \notin \mathcal{H} \wedge \ulcorner \neg\phi \urcorner \notin \mathcal{H} \end{cases}$$

Nous devons alors montrer que I rend vrai non seulement les phrases atomiques, mais toutes les phrases dans $\mathcal{H}$. Pour cela, nous devons adapter notre définition de "degré" à la logique des prédicats :

Définition 73 (Degrés). *Le degré d'une formule ϕ de la logique des prédicats est le nombre naturel déterminé par les règles suivantes :*

(1) Si ϕ est une phrase atomique, alors son degré est 0.
(2) Si ϕ est une phrase niée $\ulcorner\neg\psi\urcorner$ et que le degré de ψ est n, alors son degré est $n+1$.
(3) Si ϕ est une conjonction $\ulcorner\psi\wedge\chi\urcorner$, une disjonction $\ulcorner\psi\vee\chi\urcorner$, une implication $\ulcorner\psi\rightarrow\chi\urcorner$ ou une équivalence $\ulcorner\psi\leftrightarrow\chi\urcorner$ et si le degré de ψ est n et que le degré de χ est m, alors le degré de ϕ est $n+m+1$.
(4) Si ϕ est une phrase quantifiée $\ulcorner\forall x(\psi)\urcorner$ ou $\ulcorner\exists x(\psi)\urcorner$ et que le degré de ψ est n, alors son degré est $n+1$.

Nous prouvons alors par induction mathématique sur le degré des formules que I rend vraies toutes les formules :

base de l'induction : Il s'ensuit de sa définition que I rend vraies toutes les formules atomiques (de degré 0) dans $\mathcal{H}$.

pas de l'induction : Supposons que I rende vraie toute phrase ϕ dans $\mathcal{H}$ de degré inférieur à n. Si ϕ est d'un degré supérieur à 0, ϕ doit être une formule α, β, γ ou δ :

α **:** Si ϕ est du type α, alors α_1 et α_2 sont aussi dans $\mathcal{H}$. Mais ces formules sont d'un degré inférieur à n, donc elles sont rendues vraies par I. ϕ doit donc être vraie aussi.

β **:** Si ϕ est du type β, alors soit β_1, soit β_2 est un membre de $\mathcal{H}$. Quelle qu'elle soit, elle doit être rendue vraie par I (puisqu'elle est d'un degré inférieur à n). Donc ϕ est aussi rendue vraie par I.

γ **:** Si ϕ est du type γ, alors $\gamma(k)$, pour tout $k\in U$, est un membre de $\mathcal{H}$. Comme, pour tout $k\in U$, $\gamma(k)$ est d'un degré inférieur à n, il s'ensuit de l'hypothèse d'induction que ϕ est vrai.

δ **:** Si ϕ est du type δ, alors il y a un $k\in U$ tel que $\delta(k)$ est un membre de $\mathcal{H}$. $\delta(k)$ est d'un degré inférieur à n et vrai par l'hypothèse d'induction. ϕ est donc également vrai.

Nous avons donc défini une interprétation qui rend vraies toutes les phrases dans $\mathcal{H}$ et, plus généralement, toutes les phrases dans un ensemble de Hintikka.

□

En logique propositionnelle, chaque arbre était complet après un nombre fini d'applications de règles de construction d'arbre. La complication cruciale dans le cas de la logique des prédicats est qu'un arbre pour une phrase peut être infini. Par le lemme de König (cf. p. 140 dans la leçon 7), un tel arbre contiendra une branche infinie. Pouvons-nous assumer que les phrases sur une telle branche constituent un ensemble de Hintikka ?

Malheureusement, la réponse est négative, comme le montre l'exemple d'un arbre infini donné dans la leçon 11 (p. 205). Sur un tel arbre, il peut se trouver une formule conjonctive, par exemple, qui ne sera jamais traité puisque chaque instanciation d'une quantification universelle nous force à introduire une nouvelle constante qui doit également être instanciée par la suite. Nos règles de construction d'arbres nous forcent à 'retourner en arrière' un nombre infini de fois.

Cette complication peut être évitée en adoptant la modification suivante de notre notion de tableau :

Définition 74 (Tableaux déterministes)**.** *Un tableau déterministe pour ϕ est un tableau construit par le processus ayant comme étape n le suivant :*

$n=0$ *Nous plaçons ϕ à l'origine de l'arbre.*
$n\rightarrow n+1$ *Après avoir conclu la $n$ème étape de la construction du tableau, nous procédons ainsi :*
(i) Si le tableau est déjà fermé, nous nous arrêtons.
(ii) Si chaque point se trouvant sur une branche ouverte et qui n'est pas une formule atomique a déjà été utilisé, nous nous arrêtons.

(iii) *Autrement, nous construisons une extension directe du tableau en fonction du point ϕ de niveau minimal (et autant que possible à gauche) qui n'a pas encore été utilisé et qui se trouve sur au moins une branche ouverte :*
   (A) *Si ϕ est une formule du type α, nous ajoutons α_1 et α_2 à toutes les branches ouvertes passant par ϕ et marquons ϕ comme utilisé.*
   (B) *Si ϕ est une formule du type β, nous ajoutons β_1 comme successeur de gauche et β_2 comme successeur de droite à toutes les branches ouvertes passant par ϕ et nous marquons ϕ comme utilisé.*
   (C) *Si ϕ est une formule du type γ, nous ajoutons à toute branche ouverte passant par ϕ une formule $\gamma(a)$ (où "a" est la première constante n'apparaissant pas encore sur la branche) et également la même formule ϕ et nous marquons l'ancienne occurrence de ϕ comme utilisée.*
   (D) *Si ϕ est une formule du type δ, nous ajoutons à toute branche ouverte passant par ϕ la nouvelle formule $\delta(a)$ (où "a" est la première constante n'apparaissant pas encore sur la branche) et nous marquons ϕ comme utilisé.*

Les tableaux déterministes se distinguent d'autres tableaux par trois aspects :

1. Ils sont beaucoup plus longs, puisque nous répétons chaque quantification universelle (et négation d'une quantification existentielle) après son instanciation.
2. Dans leur construction, nous ne devons jamais retourner en arrière : aucune occurrence d'une quantification universelle ne sera instancié plus d'une fois.
3. Les formules sur une branche ouverte d'un tableau déterministe, soit qui est infini soit ne contient que de phrases utilisées, forment un ensemble de Hintikka.

(3) s'ensuit de notre définition parce qu'une branche ouverte et finie soit ne contient pas de formule du type γ, soit ne contient une quantification universelle (ou une négation d'une quantification existentielle) 'vide', c'est-à-dire de la forme $\ulcorner \forall x(\phi) \urcorner$ où ϕ ne contient pas d'occurrence de "x". Si le tableau est infini, notre méthode de construction nous assure que toutes les autres formules que celles du type γ ont été utilisées.

Nous pouvons maintenant prouver la complétude de la méthode des arbres :

Théorème 75 (Complétude de la méthode des arbres)**.** *La méthode des arbres pour la logique des prédicats est complète : toute formule valide est prouvable.*

Preuve Supposons que ϕ est une formule valide et $\mathcal{T}$ son tableau déterministe (qui a $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ comme origine). Si $\mathcal{T}$ contenait une branche ouverte, les formules sur cette branche formeraient un ensemble de Hintikka qui, par le lemme, serait satisfaisable. Comme $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ serait un élément de cette branche, $\ulcorner \neg\phi \urcorner$ serait également satisfaisable, donc ϕ ne serait pas valide. □

Le lemme de König, que nous avons prouvé dans la leçon 7 (cf. p. 140), dit qu'un arbre infini doit contenir une branche infinie. Un tableau qui ne conteint que des branches finies doit être fini. Le théorème de complétude nous assure par conséquent que tout tableau systématique pour la négation d'une formule valide doit se fermer après un nombre fini d'étapes.

13.3 La correction et la complétude de la méthode de déduction naturelle pour la logique des prédicats

13.4 La correction et la complétude du calcul axiomatique de la logique des prédicats

13.5 La théorie des modèles

13.6 Le théorème de Löwenheim-Skolem

Revenons sur la modification que nous avons faite de la méthode des arbres en modifiant les règles pour le quantificateur existentiel et la négation du quantificateur universel en ne les instanciant qu'avec la constante nouvelle, censée représenter un individu arbitraire. Est-elle vraiment innocente ?

La réponse est oui, pour la raison suivante : Si une formule ϕ est vraie ou fausse dans une structure avec un univers de discours de n individus, elle sera également vraie ou fausse dans beaucoup de modèles contenant des univers de discours plus larges. Supposons que nous sommes arrivés, par la nouvelle méthode, à un modèle qui rend vrai "Rab", pour une nouvelle constante "b", et que nous aurions obtenu, par l'ancienne méthode, deux modèles, rendant vrais "Raa" et "Rab" respectivement. Supposant que nous n'avons pas utilisé d'autres constantes, l'un de ces modèles ne contient qu'un seul individu, a, bien que les autres en contiennent aussi un autre, b. Cependant, cet autre individu ne peut pas être distingué de a dans le modèle : d'après tout ce que nous savons de a et de b, il pourrait s'agir du même individu. Nous remarquons ainsi que pour tout modèle, nous pouvons en créer d'autres, en y ajoutant des individus indistinguables de ceux qui se trouvent dans le domaine du discours du premier.

Nous pouvons faire quelques observations sur la satisfaisabilité et la consistance de formules ou d'ensembles de formules de notre langage $\mathcal{L}^+$. Soit Σ un ensemble de formules de cette langue.

1. Que Σ soit ou pas satisfaisable dans une structure $\mathcal{A}$, ne dépend que de la cardinalité de $|\mathcal{A}|$, c'est-à-dire du nombre d'éléments contenus dans l'univers de discours de $\mathcal{A}$.
2. Si Σ est satisfaisable dans $\mathcal{A}$, alors Σ est également satisfaisable dans toute structure qui garde l'interprétation des signes de relations, des signes de fonctions et des constantes mais contient un univers de discours plus large.
3. Il y a des formules satisfaisables dans une structure infinie qui ne sont pas satisfaisables dans une structure finie.

A la réflexion, ces observations ne sont pas étonnantes. Beaucoup plus étonnant, et le sujet d'un méta-théorème important, est une converse partielle à notre première observation, converse qui nous permet de réduire nos modèles au lieu de les agrandir.

Löwenheim a prouvé en 1915 que si une formule ϕ est satisfaisable, alors elle est satisfaisable dans un domaine de discours dénombrable, c'est-à-dire un domaine de discours contenant le même nombre d'éléments qu'il y a de nombres naturels. Nous obtenons ce résultat comme corollaire de la satisfaisabilité de tout ensemble de formules sur une branche ouverte d'un tableau déterministe :

Théorème 76 (Löwenheim). *Si une formule ϕ est satisfaisable alors elle est satisfaisable dans une structure avec un domaine de discours dénombrable.*

Preuve Par le théorème de complétude, le tableau systématique de ϕ ne peut pas être fermé. Il doit

donc contenir une branche ouverte. Les formules se trouvant sur cette branche sont simultanément satisfaisables parce qu'elles forment un ensemble de Hintikka. L'interprétation qui satisfait la branche ouverte ne parle que d'un nombre dénombrable d'individus ; par la construction du tableau systématique, tous les individus dans son domaine de discours seront nommés par des constantes, dont il n'y a qu'un nombre dénombrable. L'interprétation satisfaisant la branche ouverte doit aussi satisfaire son origine, qui est ϕ. □

Skolem a étendu ce résultat, prouvant que si un ensemble dénombrable de phrases est satisfaisable simultanément, il est simultanément satisfaisable dans un domaine de discours dénombrable.

La preuve repose sur une extension de la méthode de tableaux déterministes à des ensembles de formules : nous disons d'un tableau qu'il est "Σ-complet" pour un ensemble de formules Σ si les formules sur chacune de ces branches déterminent un ensemble de Hintikka et s'il contient également toutes les formules dans Σ. Pour n'importe quel ensemble de phrases Σ, nous construisons un tableau qui est Σ-complet en utilisant la procédure systématique pour la construction d'un tableau déterministe, commençant par la première formule dans Σ (par rapport à n'importe quelle énumération) et ajoutant la $n$ème formule dans Σ à la $n$ème étape de la construction à chaque branche ouverte. Pris ensemble, ceci nous donne le théorème suivant :

Théorème 77 (Löwenheim-Skolem)**.** *Si un ensemble dénombrable de formules Σ est simultanément satisfaisable alors Σ est satisfaisable dans un modèle dont le domaine est dénombrable.*

Preuve Supposons que Σ est un ensemble dénombrable de formules. Nous savons qu'il existe un tableau $\mathcal{T}$ qui est S-complet. Si $\mathcal{T}$ était fermé, il ne contiendrait qu'un nombre fini de formules (par le lemme de König). Puisqu'il contient toutes les formules de Σ, Σ devrait également être fini et, par le théorème de complétude, ne serait pas satisfaisable. Donc $\mathcal{T}$ ne peut pas être fermé et contient une branche ouverte. Par la construction des tableaux Σ-complets, les formules sur cette branche ouverte composent un ensemble de Hintikka contenant toutes les formules dans Σ. Par le lemme, cet ensemble est satisfaisable dans un univers de discours dénombrable. □

Comme corollaire, nous pouvons prouver la compactitude de la logique des prédicats :

Théorème 78 (Compactitude)**.** *La logique des prédicats est compacte : si un ensemble de formules Σ est insatisfaisable alors il existe un sous-ensemble fini $\Sigma' \subset \Sigma$ qui est également insatisfaisable.*

Preuve Si Σ est insatisfaisable, il y a un tableau fermé qui est Σ-complet. Un tel tableau doit être fini, donc ne peut contenir qu'un nombre fini d'éléments de Σ. □

Comme dans le cas de la compactitude de la logique propositionnelle, ce théorème nous assure que toute formule qui est une conséquence sémantique de quelques prémisses, s'ensuit déjà d'un nombre fini de ses prémisses.

Les raisonnements de Löwenheim et Skolem, bien que pertinent pour des questions logiques, n'utilisent pas de formalisme logique ni des axiomes d'un calcul précis. Ils portent sur des structures considérées comme des entités mathématiques, c'est-à-dire des ensembles satisfaisant quelques conditions. Le champ de recherche auquel appartiennent des raisonnements de ce type s'appelle la *'théorie des modèles'*. La théorie des modèles étudie, en toute généralité, la nature et l'existence des modèles pour des systèmes modèles, et les question de la consistance et de la satisfaisabilité qui y sont liées.

13.7 La théorie des ensembles

Points à retenir

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.

Chapitre 14

La logique modale

14.1 La logique modale

Voici quelques inférences valides en logique modale :

(1)

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Quelqu'un de sage est nécessairement heureux.}\\ \text{Dieu est nécessairement sage}\end{array}}{\text{Dieu est nécessairement heureux.}}$$

(2)

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Il n'est pas possible qu'une chose soit entièrement rouge et verte en même temps.}\\ \text{Nécessairement, quelque chose de rouge n'est pas bleu.}\end{array}}{\text{Dieu est nécessairement heureux.}}$$

La logique modale étudie les notions de possibilité, d'impossibilité, de nécessité, de contingence et de compatibilité. Une phrase est possible si elle peut être vraie et impossible dans le cas inverse. Elle est nécessaire si sa négation est impossible, contingente si elle n'est ni nécessaire ni impossible. Deux phrases sont compatibles s'il est possible qu'elles soient toutes deux vraies.

Définition 79. *L'alphabet du langage $\mathcal{L}^\Box$ de la logique modale propositionnelle consiste en les signes suivants :*

1. *des phrases atomiques "p_0", "p_1", "p_2" ... (une infinité dénombrable) ;*
2. *un opérateur "$\Box \ldots$" ("nécessairement") ;*
3. *les connecteurs "$\neg \ldots$", "$\ldots \wedge \cdots$", "$\ldots \vee \cdots$", "$\ldots \rightarrow \cdots$" et "$\ldots \leftrightarrow \cdots$";*
4. *des symboles auxiliaires : parenthèses, virgules ;*

Définition 80. *Une formule propositionnelle de $\mathcal{L}^\Box$ est toute expression obtenue par la procédure suivante :*

1. *Toute phrase atomique "p_i" ($i \in \mathbb{N}$) est une formule propositionnelle.*
2. *Si ϕ est une formule propositionnelle, alors $\ulcorner(\Box\phi)\urcorner$ et $\ulcorner(\neg\phi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*
3. *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner$, $\ulcorner(\phi \vee \psi)\urcorner$ et $\ulcorner(\phi \rightarrow \psi)\urcorner$ sont des formules propositionnelles.*

Nous introduisons l'opérateur "$\Diamond \ldots$" comme abréviation pour "$\neg\Box\neg \ldots$".

14.2 Sémantique de la logique modale propositionnelle

Le système le plus simple (et le système le plus faible dit "normal") de logique modale propositionnelle est le système **K**. Il consiste en une axiomatisation de la logique propositionnelle (comme l'est par exemple le calcul HC introduit en leçon 4) et un seul schéma d'axiomes modal :

(K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

avec (MP) et une nouvelle règle d'inférence appelée "règle de nécessitation" (Nec) :

$$\frac{\vdash \phi}{\vdash \ulcorner \Box \phi \urcorner} \text{Nec}$$

qui nous permet de passer de n'importe quel théorème "ϕ" à sa nécessitation $\ulcorner \Box \phi \urcorner$.

Il est important de distinguer cette règle d'inférence, qui n'est applicable qu'à des *théorèmes* d'une phrase de la forme "$p \to \Box p$". Si une telle phrase était dérivable dans un système modal, ce système modal serait trivialisé :

Dans le nouveau calcul **K**, nous construisons des preuves de la même manière que dans HC.

Voici par exemple une preuve de "$\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$" :

(1)	$\mathbf{K} \vdash (p \wedge q) \to p$	$\mathbf{H_8}$
(2)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \to p)$	Nec de (1)
(3)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \to p) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box p)$	**K**
(4)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \to \Box p$	(MP) de (2) et (3)
(5)	$\mathbf{K} \vdash (p \wedge q) \to q$	$\mathbf{H_9}$
(6)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \to q)$	Nec de (5)
(7)	$\mathbf{K} \vdash \Box((p \wedge q) \to q) \to (\Box(p \wedge q) \to \Box q)$	**K**
(8)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \to \Box q$	(MP) de (6) et (7)
(9)	$\mathbf{K} \vdash (\Box(p \wedge q) \to \Box p) \to ((\Box(p \wedge q) \to \Box q) \to (\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)))$	$\mathbf{H_{10}}$
(10)	$\mathbf{K} \vdash (\Box(p \wedge q) \to \Box q) \to (\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q))$	(MP) de (9) et (4)
(11)	$\mathbf{K} \vdash \Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q)$	(MP) de (10) et (8)

D'autres théorèmes de **K** sont par exemple :

(i) "$(\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q)$"
(ii) "$(\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)$"
(iii) "$(\Diamond p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee q)$"
(iv) "$\Diamond(p \wedge q) \to (\Diamond p \wedge \Diamond q)$"

Par contre, les suivants ne sont pas des théorèmes de **K** :

(i') "$\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$"
(ii') "$(\Diamond p \wedge \Diamond q) \to \Diamond(p \wedge q)$"
(iii') "$\Box p \to p$"

Comparons le théorème (ii) avec le non-théorème (i'), nous notons une similarité entre l'opérateur de nécessité "$\Box$" et le quantificateur universel : $(\Box p \wedge \Box q) \leftrightarrow \Box(p \wedge q)$ et $(\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)$ sont des théorèmes, au même titre que le sont $(\forall x \phi \wedge \forall x \psi) \leftrightarrow \forall x(\phi \wedge \psi)$ et $(\forall x \phi \vee \forall x \psi) \to \forall x(\phi \vee \psi)$ de la logique des prédicats, mais $\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$ (et $\forall x(\phi \vee \psi) \to (\forall x \phi \vee \forall x \psi)$) ne le sont pas.

Pour l'opérateur de possibilité "$\Diamond$" (et quantificateur existentiel), les relations sont inversées : ils dis-

tribuent sur la disjonction, mais dans une seule direction sur la conjonction.

Cette analogie nous donne la clef pour la sémantique de la logique modale, qui a été introduite par Saul Kripke (Kripke 1959 1963ab 1965).

Comme pour la logique des prédicats, nous développons la sémantique de la logique modale propositionnelle en deux étapes : la première notion détermine 'l'univers modal' de différents 'mondes possibles', la deuxième fournit une interprétation des phrases simples (relative à un monde possible).

Définition 81. *Un cadre est une paire $\langle W, R\rangle$ d'un ensemble non-vide W, dont les membres sont appelés "mondes possibles" et une relation binaire R dite "d'accessibilité" entre ces mondes possibles.*

Définition 82. *Un modèle est un triple $\langle W, R, I\rangle$ consistant en un cadre $\langle W, R\rangle$ et en une fonction $I : \mathsf{Fml}(\mathcal{L}) \times W \to \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\}$ (appelée "interprétation") qui assigne à toute phrase et tout monde possible une valeur de vérité satisfaisant les conditions suivantes :*

I1 *Si ϕ est une phrase atomique "p" et $w \in W$, soit $I(\phi, w) := \mathbf{v}$, soit $I(\phi, w) := \mathbf{f}$*

I2 $$I(\neg\phi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = \mathbf{f} \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) = \mathbf{v} \end{cases}$$

I3 $$I(\phi \wedge \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = \mathbf{v} \text{ et } I(\psi, w) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) = \mathbf{f} \text{ ou } I(\psi, w) = \mathbf{f} \end{cases}$$

I4 $$I(\phi \vee \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = \mathbf{v} \text{ ou } I(\psi, w) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) = \mathbf{f} \text{ et } I(\psi, w) = \mathbf{f} \end{cases}$$

I5 $$I(\phi \to \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = \mathbf{f} \text{ ou } I(\psi, w) = \mathbf{v} \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) = \mathbf{v} \text{ et } I(\psi, w) = \mathbf{f} \end{cases}$$

I6 $$I(\phi \leftrightarrow \psi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & I(\phi, w) = I(\psi, w) \\ \mathbf{f} & I(\phi, w) \neq I(\psi, w) \end{cases}$$

I7 $$I(\Box\phi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & \forall v(Rwv \to I(\phi, v) = \mathbf{v}) \\ \mathbf{f} & \exists v(Rwv \wedge I(\phi, v) = \mathbf{f}) \end{cases}$$

I1 relativise l'attribution des valeurs de vérités à un monde possible spécifique : dans différents mondes possibles, les phrases simples recevront différentes valeurs de vérités. En ce sens, les mondes possibles correspondent aux différentes lignes dans une table de vérité.

I2 à **I6** assurent que l'interprétation des connecteurs propositionnelles est consistante avec leurs tables de vérité : nos mondes seront "logiquement possibles" dans le sens qu'il respectent la sémantique standard des connecteurs propositionnels.

I7 est la condition qui interprète l'opérateur de nécessité : une phrase est nécessaire dans un monde w si et seulement si elle est vraie dans tous les mondes qui se trouvent en relation R avec w. Etant donné l'interdéfinissabilité des opérateurs modaux ($\ulcorner\Box\phi\urcorner \Leftrightarrow \ulcorner\neg\Diamond\neg\phi\urcorner$), il est facile de voir que **I7** est équivalent à la condition suivante pour l'opérateur de possibilité :

I7′ $$I(\Diamond\phi, w) := \begin{cases} \mathbf{v} & \exists v(Rwv \wedge I(\phi, v) = \mathbf{v}) \\ \mathbf{f} & \forall v(Rwv \to I(\phi, v) = \mathbf{f}) \end{cases}$$

Nous adoptons une définition relationnelle de validité :

Définition 83. *Une formule propositionnelle ϕ de $\mathcal{L}^{\Box}$ est valide sur un cadre $\langle W, R\rangle$ si et seulement si pour tout modèle $\langle W, R, I\rangle$ et pour tout monde possible $w \in W$ du cadre, alors $I(\phi, w) = \mathbf{v}$.*

Nous avons un premier théorème de correction :

Théorème 84 (Correction de **K**)**.** *Tout théorème de **K** est valide sur tous les cadres.*

Preuve □

Nous avons remarqué (cf. (iii') ci-dessus) que "$\Box p \to p$" n'est pas un théorème de **K**. Si nous l'ajoutons comme axiome

(T) $\Box p \to p$

à **K**, nous obtenons un système plus fort, appelé **T**. Voici quelques théorèmes de **T** :

(i) "$p \to \Diamond p$"
(ii) "$\Diamond(p \to \Box p)$"

Pour certaines interprétations de "$\Box$", l'axiome (**T**) est trop fort : bien qu'adéquat pour l'interprétation dite "aléthique" de "$\Box$" comme "Nécessairement ...", il exclut une interprétation comme "il est obligatoire que ...". Pour cette interprétation dite "déontique", un système plus faible est plus adéquat, ayant comme seul axiome supplémentaire à (**K**) le suivant : Lu "déontiquement", (**??**) dit que ce qui est obligatoire est permis : s'il est obligatoire de faire quelque chose, il n'est pas interdit de ne pas le faire.

Pour les preuves de correction des deux systèmes **T** et **D**, nous devons considérer de plus près la relation R dans notre définition d'un cadre. Dans le cas de **K**, aucune restriction sur R n'a été adoptée : n'importe quelle interprétation de R sur W nous donne un cadre sur lequel tout théorème de **K** est valide.

L'axiome (**T**), par contre, peut être lu comme restriction aux relations d'accessibilité : il force cette relation à être réflexive : si w est en relation avec n'importe quel autre monde v, alors forcément w est en relation avec lui-même.

Théorème 85 (Correction de **T**). *Si* $\langle W, R\rangle$ *est tel que* $\forall w \forall v\ (Rwv \to Rww)$, *alors tout théorème de* **T** *est valide sur* $\langle W, R\rangle$.

Preuve □

Pour la correction de **D**, nous remarquons que (**??**) ne peut être vrai dans un monde que si ce monde est en relation R avec au moins un monde. Autrement dit, (**??**) sera faux dans un monde si ce monde est une impasse par rapport à R. Nous appelons un cadre "sériel" si sa relation d'accessibilité n'a pas d'impasses. Prouvons la correction de **D** par rapport aux cadres sériels :

Théorème 86 (Correction de **D**). *Si* $\langle W, R\rangle$ *est tel que* $\forall w \exists v (Rwv)$, *alors tout théorème de* **D** *est valide sur* $\langle W, R\rangle$.

Preuve □

Notre définition du langage $\mathcal{L}^{\Box}$ permet des modalités itérées comme dans "$\Box\Box p$", "$\Box\Diamond p$" et "$\Box(p \to \Diamond q)$". Quelques-unes de ces formules propositionnelles sont des théorèmes des logiques modales déjà introduites :

(i) "$(\Diamond\Box p \lor \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(\Box p \lor q)$" est un théorème de **K**
(ii) "$\Box\Box p \to \Box p$" est un théorème de **T**
(iii) "$\Box\Box p \to \Diamond\Box p$" est un théorème de **D**

D'autres, par contre, ne le sont pas :

(i') "$\Box p \to \Box\Box p$" n'est pas un théorème de **T** (ni, par conséquent, de **D** ni de **K**)
(ii') "$\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$" n'est pas un théorème de **T** (ni, par conséquent, de **D** ni de **K**)

Si nous ajoutons (i') à **T**, nous obtenons la logique **S4**, caractérisée par le schéma d'axiomes suivant :

(4) $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

En voici quelques théorèmes :

(i) "$\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$"
(ii) "$\Box\Box p \leftrightarrow \Box p$"
(iii) "$\Diamond\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond p$"
(iv) "$\Box\Diamond\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$"
(v) "$\Box\Diamond\Box\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond p$"
(vi) "$\Diamond\Box\Diamond\Box p \leftrightarrow \Diamond\Box p$"

Ces théorèmes nous montrent qu'en **S4**, toute phrase modale est équivalente à l'une des formes suivantes :

(i) une phrase sans opérateur modale
(ii) une phrase de la forme "$\Box \ldots$" où "$\ldots$" ne contient pas d'opérateur modale
(iii) une phrase de la forme "$\Diamond \ldots$" où "$\ldots$" ne contient pas d'opérateur modale
(iv) une phrase de la forme "$\Box\Diamond \ldots$" où "$\ldots$" ne contient pas d'opérateur modale
(v) une phrase de la forme "$\Diamond\Box \ldots$" où "$\ldots$" ne contient pas d'opérateur modale
(vi) une phrase de la forme "$\Box\Diamond\Box \ldots$" où "$\ldots$" ne contient pas d'opérateur modale
(vii) une phrase de la forme "$\Diamond\Box\Diamond \ldots$" où "$\ldots$" ne contient pas d'opérateur modale

Pour la preuve de correction, nous notons d'abord qu'un cadre sur lequel tous les théorèmes de **S4** sont valides doit être sériel : puisque **S4** contient (**??**), un cadre avec une impasse servirait comme contre-exemple à un théorème. En plus, **S4** contient également **T** – la relation d'accessibilité doit donc aussi être réflexive ; elle serait en conséquence automatiquement sérielle. Pour valider tous les théorèmes de **S4**, la relation d'accessibilité doit non seulement être réflexive, mais aussi transitive :

Théorème 87 (Correction de **S4**). *Si* $\langle W, R\rangle$ *est tel que* $\forall w\forall v(Rwv \rightarrow Rww)$ *et* $\forall w\forall v\forall u((Rwv \wedge Rvu) \rightarrow Rwu)$, *alors tout théorème de* **S4** *est valide sur* $\langle W, R\rangle$.

Preuve □

Bien que "$\Box p \rightarrow \Box\Box p$" soit un théorème de **S4**, "$\neg\Box p \rightarrow \Box\neg\Box p$" ne l'est pas. En ajoutant

(5) $\neg\Box p \rightarrow \Box\neg\Box p$

à **T**, nous obtenons un système plus fort que **S4**, appelé **S5**. Dans **S5**, les opérateurs modaux distribuent plus librement sur la disjonction et la conjonction :

(i) "$(\Box p \vee \Box q) \leftrightarrow \Box(p \vee \Box q)$"
(ii) "$(\Box p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \Box(p \vee \Diamond q)$"
(iii) "$(\Diamond p \wedge \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee \Diamond q)$"
(iv) "$(\Diamond p \wedge \Box q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee \Box q)$"

Grâce à ces quatre théorèmes de 'distribution', toute modalité itérée en **S5** se réduit à une modalité simple : dans toute paire de modalités, nous pouvons effacer la première :

(v) "$\Box\Box p \leftrightarrow \Box p$"
(v) "$\Box\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$"
(v) "$\Diamond\Box p \leftrightarrow \Box p$"
(v) "$\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$"

Comme (4) est un théorème de **S5**, **S4** est contenue dans **S5**. La relation d'accessibilité d'un cadre sur lequel (5) est valide doit donc être réflexive et transitive. En outre, elle doit être symétrique, donc ce qu'on appelle une 'relation d'équivalence' :

Théorème 88 (Correction de **S5**). *Si* $\langle W, R\rangle$ *est tel que* $\forall w \forall v(Rwv \rightarrow Rww)$, $\forall w \forall v \forall u((Rwv \wedge Rvu) \rightarrow Rwu)$, *et* $\forall w \forall v(Rwv \rightarrow Rvw)$ *alors tout théorème de* **S5** *est valide sur* $\langle W, R\rangle$.

Preuve □

En somme, nous avons les correspondances suivantes :

système	axiomes	cadres
K	(K)	tous
D	(K)+(??)	sériels
T	(K)+(T)	réflexifs
S4	(K)+(T)+(4)	réflexifs et transitifs
S5	(K)+(T)+(5)	réflexifs, transitives et symétriques

14.3 La logique modale des prédicats

14.4 Propriétés métalogique de la logique modale

14.5 La logique epistémique

14.6 La logique temporelle

14.7 La logique déontique

Points à retenir

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.

Chapitre 15

Les limites du formalisme

15.1 Tarski : l'indéfinissabilité de la vérité

Nous avons vu, à la page 52 que le concept de vérité obéit à un principe de disquotation : Dire d'une phrase qu'elle est vraie est la dire. Alfred Tarski l'a formulé en sa célèbre "Convention T" :

(CT) "p" est vrai si et seulement si p

À la gauche de cette équivalence matérielle, on trouve une phrase du métalangage, à sa droite une phrase du langage-objet.

15.2 Russell : les paradoxes sémantiques

15.3 L'incomplétude des systèmes formels : les théorèmes de Gödel

Grelling, "hétérologique" : "x est court" est satisfait par soi-même - (Grelling et Nelson 1908) ; déjà mentionné à 31

via Löwenheim

Théorème : (incomplétude de Gödel) Tout système formel consistant, et susceptible de formaliser en son sein l'arithmétique des entiers, est incomplet.

En particulier, il existe des énoncés sur les entiers dont on ne sait pas démontrer, à partir des seuls axiomes de la logique construisant les entiers, s'ils sont vrais ou s'ils sont faux.

Voici un exemple simplifié de ce que signifie le théorème de Gödel, autrement dit l'insuffisance des procédés mécaniques de la logique dans le raisonnement mathématique. Supposons qu'on ait pu construire une machine qui, étant donnée une formule, répond vrai si elle est capable de prouver que la formule est vraie, faux si elle est capable de prouver que la formule est fausse, et rien du tout sinon. Soumettons lui la phrase : "La machine ne répond pas vrai à cette phrase"

* La machine ne peut pas répondre vrai, car si elle répond vrai, la phrase est fausse, et la machine ne donne que des réponses justes. * La machine ne peut pas répondre faux, car si elle répond faux, la

phrase est vraie, et la machine ne donne que des réponses justes.

Conclusion : la machine ne dit rien. Et nous, alors, nous pouvons affirmer que donc la phrase est vraie ! Ce que la machine ne peut pas faire. On ne peut donc pas résumer les découvertes mathématiques à des procédés purement mécaniques, il faut faire appel à l'intuition !

Berry's paradoxe : "le nombre le plus petit qu'on peut nommer en dix-huit syllabes"

15.4 L'arithmétique

15.5 Premier théorème de Gödel

15.6 Deuxième théorème de Gödel

15.7 La logique de prouvabilité

Le système de la logique de prouvabilité est appelé **GL** (après Gödel et Löb) et consiste en **K** avec le schéma d'axiomes suivant :

(**GL**) $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$

En voici quelques propriétés :

(i) "$\Box p \to \Box\Box p$" est un théorème de **GL**.
(ii) "$\Box p \to p$" n'est pas un théorème de **GL**
(iii) "$\Box(\Box p \to p) \leftrightarrow \Box p$" est un théorème de **GL**.
(iv) "$((\Box p \to p) \wedge \Box(\Box p \to p)) \to p$" est un théorème de **GL**.
(v) "$\Box\Diamond p \leftrightarrow \Box(q \wedge \neg q)$" est un théorème de **GL**.

Si nous abrégions par "Bew p" l'assertion que "p" peut être prouvé dans une formalisation de l'arithmétique de Peano PA, nous pouvons prouver en métamathématiques les assertions suivantes :

(i) Si nous avons PA $\vdash p$, nous pouvons prouver PA $\vdash$ Bew p.
(ii) PA $\vdash$ Bew $(\ulcorner p \to q \urcorner) \to$ (Bew $(\ulcorner p \urcorner) \to$ Bew $(\ulcorner q \urcorner)$)

"Bew ...", interprété comme opérateur modal, est donc au moins aussi fort que le système **K**.

Dans sa preuve de l'incomplétude de l'arithmétique, Gödel montrait le 'lemme diagonal' suivant :

(iii) Si $F(x)$ est un prédicat du langage de PA avec aucune autre variable libre que x, il existe une phrase p de ce langage tel que PA $\vdash p \leftrightarrow F(\ulcorner p \urcorner)$.

Il s'ensuit le premier théorème d'incomplétude :

Théorème 89 (Incomplétude de l'arithmétique)**.** *Si* PA *est consistant, elle est incomplète : il existe une phrase qui peut être formulée dans son langage mais qui est indécidable (ne peut ni être prouvé ni être déprouvé).*

Preuve "$\neg$Bew (x)" est un prédicat avec une seule variable libre, donc il existe une phrase tel que PA $\vdash p \leftrightarrow \neg$Bew $(\ulcorner p \urcorner)$. Si cette phrase était prouvable PA $\vdash p$, alors nous aurions par MP que PA $\vdash \neg$Bew $(\ulcorner p \urcorner)$, ce qui contredit PA $\vdash$ Bew $(\ulcorner p \urcorner)$ que nous obtenons de (i). Si PA ne prouve pas de contradiction, "p" n'est pas prouvable et alors "Bew $(\ulcorner p \urcorner)$" est faux. Si "$\neg p$" était prouvable, alors

"$\mathsf{Bew}(\ulcorner p \urcorner)$" le serait aussi (par la direction de droite à gauche du lemme diagonal) : donc une fausseté pourrait être prouvé. Donc ni $\mathsf{PA} \vdash p$ ni $\mathsf{PA} \vdash \neg p$. □

M.H. Löb a prouvé en 1954 :

(iv) Si $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Bew}(\ulcorner p \urcorner) \rightarrow p$, alors $\mathsf{PA} \vdash p$.

On obtient le deuxième théorème d'incomplétude comme conséquence immédiate :

Théorème 90 (Deuxième théorème d'incomplétude)**.** *Si* PA *est consistant, alors* $\mathsf{PA} \nvdash \neg\mathsf{Bew}(\ulcorner p \wedge \neg p \urcorner)$.

Preuve Si PA prouvait sa propre consistance, $\mathsf{PA} \vdash \neg\mathsf{Bew}(\ulcorner p \wedge \neg p \urcorner)$, alors $\mathsf{PA} \vdash \mathsf{Bew}(\ulcorner p \wedge \neg p \urcorner) \rightarrow (p \wedge \neg p)$, d'où s'ensuit par le théorème de Löb que $\mathsf{PA} \vdash p \wedge \neg p$, ce qui le rendait inconsistant. □

Points à retenir

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.

Chapitre 16

Exercices

16.1 Formalisation, validité

1. (2 points) Formalisez le discours suivant :

   > Si les Etats-Unis n'attaquent pas l'Iran et que le prix de l'essence augmente, la Syrie attaque Israël. Si la Syrie n'attaque pas Israël, le Liban le fera. Si les Etats-Unis n'attaquent pas l'Iran, le prix de l'essence augmente ou la Syrie attaque Israël. Si la Syrie attaque Israël, alors les Etats-Unis attaquent l'Iran.

2. (1 point) Au cours d'une discussion, Sam me dit que mon argument est faux. En me disant cela, Sam se trompe. Pourquoi ?
3. (1 point) Sam sait que si Maria aime Paul, alors elle sera déçue. Joséphine, la soeur de Maria, connaît les sentiments de Maria pour Paul. Joséphine aime Paul, et pour cette raison elle lui ment à chaque fois qu'il lui demande quels sont les sentiments de Maria à son égard. Paul a posé la question à Joséphine. Cette dernière lui a répondu que Maria ne l'aime pas. Est-ce que Maria sera déçue ?
4. (4 points) Lesquels des arguments suivants sont valides ?
   (a) Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage ; je serai heureux et sage ; alors j'étudie la logique.
   (b) Napoléon était allemand ; les allemands sont européens ; donc Napoléon était européen.
   (c) Napoléon était allemand ; les allemands sont asiatiques ; donc Napoléon était asiatique.
   (d) Napoléon était français ; tous les français sont européens ; donc Hitler était Autrichien.
   (e) Si Napoléon avait était chinois, alors il aurait été asiatique ; Napoléon n'était pas asiatique ; donc il n'était pas chinois.
   (f) Le réalisme naı¨f nous amène à la physique et la physique, si elle est vraie, montre que le réalisme naı¨f est faux. Donc le réalisme naı¨f, s'il est vrai, est faux ; alors il est faux (Russell, *Inquiry into Meaning and Truth*).
   (g) S'il pleut, on annulera le pique-nique. S'il ne pleut pas, Marie insistera pour aller à la plage, alors le pique-nique sera annulé. Ou bien il pleuvra ou bien il ne pleuvra pas. Donc le pique-nique sera annulé.
   (h) "Dieu existe." – "Pourquoi ?" – "La Bible le dit." – "Mais pourquoi penses-tu que tout ce qui est dans la Bible est vrai ?" – "Parce que la bible est la parole de Dieu." – "Et comment sais-tu cela ?" – "C'est ce qui est dit dans la bible."
5. (3 points) En respectant la convention qui veut que l'on forme le nom d'une expression en plaçant ce mot entre guillemets (et selon la fiction qu'il n'y a pas d'autre usage des guillemets), lesquelles

des phrases suivantes expriment des phrases vraies ?

(a) L'*Iliade* a originalement été écrite en français.
(b) "L'*Iliade*" est un poème épique.
(c) Ou bien l'expression "philosophie" commence par des guillemets ou bien ""philosophie"" ne le fait pas.
(d) 2+2=4 est une vérité mathématique.
(e) "Berne" et "la capitale de la Suisse" mentionnent la même ville.
(f) "le 42ème président des Etats-Unis" est "le mari de Hillary Clinton".
(g) La phrase qui précède ne parle pas de Bill Clinton.

6. (3 points) Mettez des guillemets de telle sorte que le résultat soit sensé :
   (a) Même si x est la 24ème lettre de l'alphabet, quelques savants ont dit que x est l'inconnu.
   (b) Bien que Aristote soit un nom d'Aristote et que Aristote soit un nom d'Aristote, Aristote est un nom de personne.
   (c) Philipp est mon nom et bien que je sache ce qu'est la philosophie, je n'ai jamais compris ce que les gens veulent dire par philosophie.
   (d) Italo Svevo est un pseudonyme de Ettore Schmitz.
   (e) Dans la langue française,
   n'est-il pas amusant de constater que
   mot est bien un mot
   que nom est un mot et un nom
   que adjectif est un mot, un nom et un adjectif
   tandis qu'adverbe n'est pas un adverbe
7. (1 point) Utilisez la distinction entre la sémantique et la pragmatique pour expliquer la différence entre les deux assertions "Il pleut, et il ne pleut pas." et "Il pleut, mais je ne le crois pas.".
8. (2 points) Décrivez deux différences fondamentales entre des langues naturelles et des langues formelles.
9. (3 points) Est-ce que les arguments suivants sont valides ? Si oui, sont-ils *logiquement* valides ?
   (a) Tom est célibataire ou anarchiste. Il n'est pas anarchiste. Donc il est célibataire.
   (b) Tom est célibataire ou végétarien. Il n'est pas végétarien. Donc il n'est pas marié.
   (c) Tom est célibataire et banquier. Il n'est pas célibataire. Donc il n'est pas communiste.

16.2 Les connecteurs propositionnels

1. (2 points) Une erreur s'est glissée dans chacune des tables de vérité suivantes. Laquelle ?
   (a) Première table :

p	q	$\neg p$	$q \rightarrow \neg p$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

   (b) Deuxième table :

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \vee r$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	V
F	F	V	V	F	V

2. (3 points) Faites des tables de vérité pour les phrases suivantes :
   (a) "$\neg(\neg p \wedge \neg q)$"
   (b) "$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$"
3. (4 points) Supposons que "p" abrège "Laura aime Marc", "q" abrège "Guillaume adore Chantal" et "r" y "Brigitte flippe pour Jean-Pascal", Jean dit "$\neg(p \wedge \neg q)$ et Janine dit "$p \wedge \neg(q \wedge \neg r)$". Si Jean et Janine ont les deux raison, qui a des sentiments positifs envers qui ?
4. (1 point)Si ces deux phrases sont vraies :
   – Si Jean-Paul est à la maison, il est avec Jean-Pascal.
   – Si Jean-Paul est à la maison, il n'est pas avec Jean-Pascal.

   Alors où est Jean-Paul ?
5. (4 points) Montrez que les phrases suivantes ont les mêmes tables de vérité :
   (a) "$\neg p$" et "$\neg\neg\neg p$"
   (b) "$p \rightarrow q$" et "$\neg p \vee q$"
   (c) "$\neg(p \wedge q)$" et "$\neg p \vee \neg q$"
   (d) "$\neg(p \vee q)$" et "$\neg p \wedge \neg q$"
6. (2 points) Déterminez si "$((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$" est une tautologie.
7. (1 point) Est-ce que la phrase suivante est vraie :

   "Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage" est le nom d'une phrase.

8. (3 points) Considérez le discours politique suivant :

   > Si les Etats-Unis n'attaquent pas l'Iran et que le prix de l'essence augmente, la Syrie attaque Israël. Si la Syrie n'attaque pas Israël, le Liban le fera. Si les Etats-Unis n'attaquent pas l'Iran, le prix de l'essence augmente ou la Syrie attaque Israël. Si la Syrie attaque Israël, alors les Etats-Unis attaquent l'Iran.

   Existe-t-il un discours plus court qui aurait la même table de vérité ? Si oui, lequel ? Quel serait le discours opposé (contradictoire) ?

16.3 Relations logiques et inférences logiques

1. (5 points) Si possible, mettez les guillemets ou demi-crochets nécessaires pour que les phrases suivantes deviennent vraies (vous pouvez ignorer l'accord des pronoms) :
   (a) Paris est à l'ouest de Berne, mais Berne n'est pas à l'est de Paris.
   (b) Le dernier mot de la solution optimale à la question (1a) est Paris.
   (c) Le nom du dernier mot de la solution optimale à la question (1a) est Paris.
   (d) Pour toute phrase ϕ, le dernier mot du dernier mot de ϕ contient plus d'une syllabe contient plus d'une syllabe.
   (e) La femme de Sarkozy appelle Sarkozy Sarkozy.
   (f) Il n'est pas le cas que la femme de Sarkozy appelle Sarkozy par le nom de Sarkozy.

(g) Le dernier mot de (1g) est vulgaire.
(h) Le dernier mot de (1g) est vulgaire.
(i) La première lettre de l'alphabet grec est α est satisfaite par un objet β seulement si β est identique à α.
(j) Pour toute phrase ϕ, ϕ implique $\neg\phi$ implique ϕ implique ϕ et $\neg\phi$.

2. (1 point) Mettez les guillemets nécessaires pour que le 'limerick' suivant devienne vrai :

According to W. Quine
Whose views on quotation are fine,
Boston names Boston,
And Boston names Boston,
But 9 doesn't designate 9.

3. (5 points) Appelons une ligne du problème 1 *"incorrigible"* s'il n'y a aucune manière de mettre des guillemets et des crochets sans que le résultat devienne faux ou du non-sens. Il semble que
   (i) (1g) est incorrigible.
   (ii) (1h) n'est pas incorrigible

   mais aussi que

   (iii) (1g) est identique à (1h)

   Mais au moins un de (i), (ii) et (iii) doit être faux. Autrement nous aurions une violation du principe que si x est identique à y, alors tout ce qui est vrai de x doit aussi être vrai de y. Lequel est faux ? Et pourquoi ?
4. (6 points) Vérifiez la validité des schémas d'inférence suivants, en montrant que les implications matérielles correspondantes sont des tautologies :

(a) $\dfrac{p \to q \quad q \to r}{p \to r}$ transitivité

(b) $\dfrac{p \to r \quad q \to r}{(p \vee q) \to r}$ augmentation$_1$ $\dfrac{p \to r}{(p \wedge q) \to r}$ augmentation$_2$

(c) $\dfrac{p \to \neg p}{\neg p}$ reductio$_1$ $\dfrac{p \to q \quad p \to \neg q}{\neg p}$ reductio$_2$

(d) $\dfrac{p \wedge q}{p}$ simplification

(e) $\dfrac{\neg p}{p \to q}$ ex falso quodlibet

(f) $\dfrac{q}{p \to q}$ verum sequitur ad quodlibet

(g) $\dfrac{p \to q \quad p}{q}$ modus ponendo ponens

(h) $\dfrac{p \to q \quad \neg q}{\neg p}$ modus tollendo tollens

(i) $\dfrac{p \vee q \quad \neg q}{p}$ modus tollendo ponens

(j) $\dfrac{p|q \quad p}{\neg q}$ modus ponendo tollens

p	q	$p\|q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

5. (3 points) Qu'est-ce qu'une tautologie ? Une contradiction ? Indiquez quels rapports simples il y a entre tautologies, contradictions et la négation.

16.4 La méthode axiomatique

1. (3 points) Insérez les concepts suivants dans une colonne du tableau : "formule bien formée", "tautologie", "validité" (la conclusion ne peut pas être fausse si les prémisses sont vraies), "règle d'inférence", "vérité", "actes de parole" (question, promesse, ordre etc.), "la différence entre "et" et "mais"" (le fait que le deuxième, mais pas le premier, indique un contraste), "vouloir dire" (comme dans "qu'a-t-il voulu dire en secouant la tête ?), "axiome", "preuve", "conséquence (sémantique)", "contexte".

syntaxe	sémantique	pragmatique

2. (2 points) Aristote, dans la *Métaphysique* Λ 9 dit :

> Soit l'intelligence divine pense, soit elle ne pense rien. Or si elle ne pense rien, elle est dans un état semblable au sommeil, mais c'est là chose contraire à sa dignité. Par ailleurs, si elle pense, alors soit elle se pense elle-même, soit elle pense quelque autre chose. Mais il est absurde qu'autre chose soit objet de sa pensée. Donc elle pense, et elle se pense elle-même.

Formalisez les quatre premières phrases à l'aide de quatre phrases simples, de manière à ce que la dernière phrase s'ensuive des quatre prémisses. Vous avez le droit d'utiliser les inférences dont vous avez démontrées la validité en réponse à la quatrième question de la troisième série d'exercices.

3. (2 points) Si "ϕ" est un nom pour la phrase "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage" et si ψ est la phrase "J'étudie la logique", quelle est la phrase désignée par $\ulcorner \phi \vee \neg\psi \urcorner$? Quelle est la phrase désignée par ""Je serai heureux et sage" est une conséquence logique de ϕ et de ψ" ?
4. (1 point) Montrez que l'ensemble de formules propositionnelles { "$\neg p \wedge \neg q$", "$p \wedge \neg q$", "$p \rightarrow q$", "$p \vee q$" } forme un carré d'opposition.
5. (2 points) Lesquelles des assertions suivantes sont vraies ?
   (a) Aucune inférence valide n'a de conclusion fausse.
   (b) Toute inférence ayant une conclusion vraie est valide.
   (c) Toute inférence valide contient au moins une prémisse.
   (d) Aucune inférence valide n'a que des prémisses vraies et une conclusion fausse.
   (e) Il y a des inférences valides qui n'ont que des prémisses vraies et une conclusion fausse.
   (f) Toute inférence ayant des prémisses contradictoires est valide.
6. (2 points) Considérez le connecteur binaire "$\downarrow$" défini comme suit :

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

On voit donc que "$p \downarrow q$" est équivalent à "$\neg\phi \wedge \neg\psi$". Montrez de quelle manière il est possible

d'ajouter ce connecteur à $\mathcal{L}$ et comment, dans ce nouveau langage, on peut définir "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$" et "$\leftrightarrow$" en termes de "$\downarrow$" (utilisez les lois de Morgan !).

7. (8 point) Montrez que les phrases suivantes sont des théorèmes de HC :
   (a) "$(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$"
   (b) "$p \rightarrow (q \rightarrow p)$"
   (c) "$(p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$"
   (d) "$p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee r))$"

16.5 La méthode des arbres

1. (2 points) Rappelons-nous des définitions formelles de la tautologie et de la contradiction et définissons une phrase satisfaisable comme suit :
   Définition 91. *Une formule propositionnelle ϕ est satisfaisable si et seulement si elle est vraie sous au moins une interprétation.*
   (a) Montrez (de manière informelle) qu'une formule propositionnelle ϕ est une tautologie si et seulement si $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est pas satisfaisable.
   (b) Montrez (de manière informelle) qu'une formule propositionnelle ϕ est satisfaisable si et seulement si $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est pas une tautologie.
2. (2 points) Formulez deux règles de transformation d'arbres pour la barre de Sheffer et justifiez intuitivement leur validité.
3. (2 points) Montrez de quelle manière définir "$\wedge$", "$\rightarrow$" et "$\leftrightarrow$" en termes de "$\vee$" et de "$\neg$".
4. (4 points) A l'aide de la méthode des arbres, vérifiez si les phrases suivantes peuvent être prouvées :
   (a) "$p \rightarrow \neg\neg p$"
   (b) "$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$"
   (c) "$(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$"
   (d) "$(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$"
5. (6 points) Soit "A" le nom d'une inférence :
   (a) Si toutes les prémisses et la conclusion sont vraies, peut-on conclure que A est valide ou que A est non valide ?
   (b) Si toutes ses prémisses sont vraies mais la conclusion fausse, peut-on conclure que A est valide ou que A est non valide ?
   (c) Si au moins une de ses prémisses est fausse et sa conclusion vraie, peut-on conclure que A est valide ou que A est non valide ?
   (d) Si au moins une de ses prémisses est fausse et la conclusion est fausse, peut-on conclure que A est valide ou que A est non valide ?
   (e) Si ses prémisses sont consistantes avec sa conclusion, A peut-elle être non valide ?
   (f) Si ses prémisses sont inconsistantes et sa conclusion fausse, A-elle peut être non valide ?
   (g) Si sa seule prémisse est une vérité logique et sa conclusion vraie, est-ce que A peut être non valide ?
   (h) Si ses prémisses sont consistantes entre elles, mais sa conclusion fausse, A peut-elle être valide ?
   (i) Si sa conclusion est inconsistante avec ses prémisses, A peut-elle être valide ?
   (j) Si sa conclusion est inconsistante avec ses prémisses, mais que les prémisses sont consistantes entre elles, est-ce que A peut être valide ?
   (k) Si la négation de sa conclusion est consistante avec l'une de ses prémisses, A peut-elle être valide ?

(l) Si la négation de sa conclusion est inconsistante avec la négation de une de ses prémisses, A peut-elle être valide ?
(m) Si la négation de sa conclusion est inconsistante avec la négation de une de ses prémisses, et que A ne serait pas valide sans cette prémisse, A peut-elle être valide ?

6. (4 points) A l'aide de la méthode des arbres, déterminez les valeurs de vérité des phrases suivantes :
   (a) "$p \rightarrow (q \rightarrow r)\ ,\ \neg q \rightarrow \neg p\ ,\ p\ \models r$"
   (b) "$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge q\ ,\ (q \vee ((r \rightarrow p) \wedge r)) \rightarrow \neg p\ \models q \rightarrow \neg p$"
   (c) "$p \wedge (q \leftrightarrow r)\ ,\ \neg p \vee (q \rightarrow \neg r)\ \models p \rightarrow \neg r$"
   (d) "$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge q\ ,\ (\neg q \vee ((r \leftrightarrow p) \wedge r)) \rightarrow \neg p\ \models r \rightarrow \neg p$"

16.6 La déduction naturelle

1. (16 points) Démontrez les séquents suivants en utilisant les règles d'inférence de la déduction naturelle :
   (a) "$p \rightarrow (p \rightarrow q)\ ,\ p\ \vdash\ q$"
   (b) "$\neg\neg q \rightarrow p\ ,\ \neg p\ \vdash\ \neg q$"
   (c) "$\neg p \rightarrow q\ \vdash\ \neg q \rightarrow p$"
   (d) "$p \rightarrow (q \rightarrow r)\ \vdash\ (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$"
   (e) "$p\ \vdash\ (\neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg q)$"
   (f) "$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)\ \vdash\ p \rightarrow (q \wedge r)$"
   (g) "$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)\ \vdash\ (p \vee q) \rightarrow r$"
   (h) "$\neg p \rightarrow p\ \vdash\ p$"
   (i) "$p \vee q\ \vdash\ q \vee p$"
   (j) "$p \rightarrow q\ ,\ \neg p \rightarrow q\ \vdash\ q$"
   (k) "$p \wedge q\ ,\ q \rightarrow r\ \vdash\ r \vee s$"
   (l) "$\neg\neg p\ ,\ p \rightarrow q\ \vdash\ q$"
   (m) "$\neg(p \rightarrow q)\ \vdash\ p \rightarrow \neg q$"
   (n) "$q \rightarrow r\ \vdash\ (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$"
   (o) "$\vdash\ p \vee \neg p$"
   (p) "$p \vee q\ \vdash\ (p \rightarrow q) \rightarrow q$"
2. (4 points) A l'aide de la méthode des arbres, déterminez si les phrases suivantes peuvent être prouvées :
   (a) "$(p \wedge q \wedge ((q \wedge p) \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow r)$"
   (b) "$p \rightarrow (q \rightarrow p)$"
   (c) "$((p \vee r) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$"
   (d) "$((q \leftrightarrow \neg r) \wedge (p \leftrightarrow \neg q)) \rightarrow (r \leftrightarrow p)$"

16.7 La logique propositionnelle

1. (6 points) Formalisez les arguments suivants et prouvez, par la méthode de la déduction naturelle, qu'ils sont valides (ce qui est difficile dans le cas du troisième) :
   (a) "Étant donné que l'embryon est une personne, il a droit à la vie. Si l'embryon a droit à la vie, alors il est faux que quelqu'un a le droit de lui enlever la vie. Cependant, si l'avortement est moral, quelqu'un a le droit de lui enlever la vie. Par conséquent, si l'embryon est une personne, l'avortement est immoral."

(b) "Si l'existence de Dieu était probable, alors la phrase qu'Il existe serait une phrase empirique. Dans ce cas, il serait possible de l'ajouter à d'autres phrases empiriques pour en déduire des conclusions qui ne sont pas déductibles de ces autres phrases empiriques seules. Mais cela n'est en fait pas possible. Alors il n'est pas le cas que l'existence de Dieu est probable." (A.J. Ayer, "Language, Truth, and Logic")

(c) "Si je crois en Dieu, alors s'il existe, je gagne, et s'il n'existe pas, alors je ne perds pas. Si, à l'inverse, je ne crois pas en Dieu, alors, s'Il existe, je perds, et s'Il n'existe pas, alors je ne gagne pas. Il s'ensuit que si je crois, alors je gagnerai ou je ne perdrai pas, tandis que si je ne crois pas, alors je perdrai ou je ne gagnera pas." (En faisant un pari sur l'existence de Dieu ('le pari de Pascal'; notez que "perdre" n'est pas synonyme de "ne pas gagner".)

2. (4 points) Vérifiez au moyen de tables de vérité si les formules suivantes sont des tautologies :
   (a) "$p \rightarrow \neg\neg p$"
   (b) "$(p \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$"
   (c) "$\neg(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$"
   (d) "$(p \rightarrow \neg p) \leftrightarrow \neg p$"
3. (4 points) Formulez les lois de distributivité et utilisez des tables de vérité pour montrer qu'elles sont correctes.
4. (2 points) Si ψ est une tautologie, alors $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ en est une également. Démontrez que la converse est fausse, c'est-à-dire qu'il n'est pas vrai que : si $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ est une tautologie, alors ψ est également une tautologie.
5. (4 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les phrases suivantes :
   (a) "$p\ ,\ p \rightarrow q\ ,\ p \rightarrow r\ \vdash\ q \wedge r$"
   (b) "$\neg p \wedge q\ \vdash\ p \rightarrow r$"
   (c) "$p \vee p\ \vdash\ p$"
   (d) "$\vdash\ (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$"

16.8 Premier examen probatoire

1. (3 points) Descartes, dans la Troisième *Méditation*, raisonne à peu près ainsi :

   > Encore que l'idée de la substance soit en moi, si l'idée d'une substance infinie ne m'a pas été donnée par une substance infinie, je ne peux avoir l'idée d'une substance infinie. Par conséquent, il faut nécessairement conclure que Dieu existe.

   Cet argument est un enthymème (il est incomplet et a besoin de prémisses supplémentaires pour être valide). Au vu des pages qui précèdent, Descartes considère comme accordées les deux prémisses suivantes :
   - Je peux avoir l'idée d'une substance infinie.
   - Si l'idée d'une substance infinie m'a été donnée par une substance infinie, alors Dieu existe.

   Montrez que la conclusion s'ensuit avec ces deux prémisses supplémentaires. Vous avez le droit d'utiliser les inférences dont vous avez démontré la validité comme réponse à la quatrième question de la troisième série d'exercices.
2. (2 points) Montrez que l'ensemble de formules propositionnelles { "$\neg p \wedge q$", "$p \wedge \neg q$", "$p \rightarrow q$", "$q \rightarrow p$" } forme un carré d'opposition.
3. (3 points) En respectant la convention qui veut que l'on forme le nom d'une expression en plaçant ce mot entre guillemets (et selon la fiction qu'il n'y a pas d'autre usage des guillemets), lesquelles des phrases suivantes expriment des phrases vraies ?
   (a) Socrate s'appelle Socrate.
   (b) Les grecs avaient plusieurs noms pour "Socrate".

(c) L'expression ""philosophie"" commence par des guillemets.
(d) Pour parler de Paris, il faut mentionner "Paris".
(e) Berne n'est pas la "capitale de la Suisse".
(f) La phrase qui précède ne mentionne pas la capitale de la Suisse.

4. (3 points) Quelle est la négation (en français) des phrases suivantes ?
(a) Seuls les fous adorent Aristote.
(b) Il n'y a aucun endroit en Suisse plus magnifique que Paris.
(c) Je n'ai rien dit.
(d) Pour passer l'examen, il est nécessaire de faire les exercices.
(e) Il viendra seulement s'il est invité.
(f) Elle est gentille et intelligente.
5. (3 points) Déterminez si les phrases suivantes peuvent être vraies ensemble. Si elles ne peuvent pas être vraies ensemble, indiquez si la raison est d'ordre empirique, sémantique ou logique.
(a) "Il a mangé." et "Il n'y a rien qui est tel qu'il l'a mangé."
(b) "Il est nécessaire que tous les modes soient des attributs." et "La sagesse est un mode mais pas un attribut."
(c) "Si Dieu existe, il est omnipotent." et "Si Dieu n'est pas omnipotent, alors il n'existe pas."
(d) "Le train est arrivé à l'heure." et "Le train avait du retard."
(e) "Marie n'adore que Guillaume.","Toutes les personnes adorées par Marie habitent Paris." et "Guillaume habite Paris."
(f) "Il ne réussira pas l'examen sauf s'il fait les exercices." et "Pour réussir à l'examen, il ne faut que s'inscrire."
6. (2 points) Déterminez lesquelles des paires de phrases suivantes sont telles que le premier membre a la même table de vérité que le second :
(a) "$(p \wedge \neg q) \wedge r$" et "$p \wedge (\neg q \wedge r)$"
(b) "$\neg(p \vee q)$" et "$\neg p \vee \neg q$"
(c) "$\neg p \wedge q$" et "$\neg q \wedge p$"
(d) "$\neg p \wedge q$" et "$q \wedge \neg p$"
7. (4 points) Soit "ϕ" est un nom de la phrase "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage" et soit "ψ" un nom de la phrase "J'étudie la logique". Mentionnez quatre différentes conséquences logiques de $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$.

16.9 Deuxième examen probatoire

1. (6 points) A l'aide de la méthode des arbres, déterminez les valeurs de vérité des phrases suivantes :
(a) "$(p \rightarrow q) \rightarrow r\ ,\ \neg q \rightarrow \neg p\ \models r$"
(b) "$(p \vee \neg q) \wedge q\ ,\ (p \vee ((r \rightarrow p) \wedge r)) \rightarrow r\ \models q \rightarrow r$"
(c) "$(p \rightarrow \neg r) \wedge q\ ,\ q \rightarrow ((p \wedge r) \vee ((r \rightarrow \neg p) \rightarrow r))\ \models r$"
(d) "$p \rightarrow q\ ,\ p \rightarrow \neg q\ \models \neg p$"
(e) "$p \wedge (r \vee q)\ ,\ \neg q \rightarrow \neg p\ \models p \wedge r$"
(f) "$p \rightarrow (q \rightarrow r)\ ,\ \neg r\ \models \neg(p \wedge q)$"
2. (14 points) Démontrez les séquents suivants, utilisant les règles d'inférence de la déduction naturelle :
(a) "$p \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow q)\ , \neg q\ \vdash\ \neg p$"
(b) "$(p \vee \neg q) \rightarrow p\ ,\ \neg p\ \vdash\ \neg p \wedge q$"
(c) "$p \rightarrow (q \rightarrow r)\ \vdash\ (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$"

(d) "$p \to (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r$"
(e) "$p \vdash (\neg(q \to r) \to \neg p) \to (\neg r \to \neg q)$"
(f) "$p \to \neg p \vdash \neg p$"
(g) "$p \wedge q \vdash p \vee q$"
(h) "$p \wedge (q \leftrightarrow s)$, $(q \leftrightarrow s) \to r \vdash r \vee t$"
(i) "$\neg(\neg p \wedge \neg q)$, $\neg p \vdash q$"
(j) "$\neg(q \to p) \vdash q \to \neg p$"
(k) "$\vdash p \to p$"
(l) "$\vdash \neg(p \wedge \neg p)$"
(m) "$\neg p \leftrightarrow \neg q \vdash p \leftrightarrow q$"
(n) "$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r) \vdash p \leftrightarrow r$"

16.10 Syllogistique, formalisation

1. (2 points) Classifiez les phrases suivantes selon la distinction "**SaP**" / "**SiP** / "**SeP**" / "**SoP**" :
   (a) "Tous les anges sont immortels."
   (b) "Aucun ange n'est mortel."
   (c) "L'homme est un être raisonnable."
   (d) "Quelques oeuvres d'art ne sont pas jolies."
   (e) "Quelques oeuvres d'art sont laides."
   (f) "Personne parmi les hommes n'est sans vice."
2. (1 point) Faites un diagramme de Venn pour la phrase suivante. Est-elle compatible avec "Aucun F n'est G" ?

   Tous les F sont G et tous les G sont F.

3. (2 points) Soient les cartes suivantes :

   E K 4 7

   On sait que chaque carte comporte une lettre de l'alphabet d'un côté et un chiffre de l'autre. Supposez que l'on fasse l'affirmation suivante :

   S'il y a une voyelle d'un côté de ces quatre cartes, il y a un nombre pair de l'autre côté.

   Combien de cartes faut-il retourner *au minimum* pour vérifier cette affirmation ? Lesquelles ?
4. (1 point) Est-ce que les phrases suivantes peuvent être vraies ensembles ; si oui, comment ? (utilisez le prédicat "personne(x)" et la relation "x aime y")
   (a) Toute personne aime quelqu'un.
   (b) Personne n'est aimé par tout le monde.
5. (2 points) Formalisez les deux phrases suivantes dans le calcul des prédicats (avec "oiseau(x)", "corbeau(x)", "personne(x)", "blanc(x)", "noir(x)", "vertueux(x)", "heureux(x)") et dites s'il s'agit ou non de tautologies (de la logique des prédicats) :
   (a) S'il y a des oiseaux blancs et pas de corbeaux noirs, alors certains oiseaux ne sont pas des corbeaux.
   (b) S'il est vrai que, si tous les gens sont vertueux, alors tous les gens sont heureux, alors tous les gens vertueux sont heureux.
6. (1 point) Formalisez les deux énoncés suivants dans le calcul des prédicats. Ces deux énoncés

sont-ils sémantiquement équivalents ?
(a) Tous les hommes ont une cervelle de moineau.
(b) Seuls les hommes ont une cervelle de moineau.

7. (3 points) Soient les abréviations suivantes :

"a"	pour le nom propre	"Aristote"
"s"	pour le nom propre	"Socrate"
"$Ph(\ldots)$"	pour le prédicat unaire	"... est un philosophe"
"$Po(\ldots)$"	pour le prédicat unaire	"... est un politicien"
"$S(\ldots)$"	pour le prédicat unaire	"... est sérieux"
"$A(\ldots,\cdots)$"	pour le prédicat binaire	"... admire $\cdots$"
"$R(\ldots,\cdots)$"	pour le prédicat binaire	"... respecte $\cdots$"

Ainsi, on peut écrire "$S(s)$" pour "Socrate est sérieux", "$A(s,a)$" pour "Socrate admire Aristote", "$\exists x(Ph(x))$" pour "il y a un philosophe" etc.
Au moyen de ces abréviations, donnez une formalisation dans le langage du calcul des prédicats de chacune des phrases suivantes (lorsqu'une phrase est ambiguë, donnez les deux formalisations possibles) :
(a) "Les philosophes sont sérieux."
(b) "Les philosophes ne sont pas tous sérieux."
(c) "Quelques philosophes sont politiciens."
(d) "Tout politicien s'admire."
(e) "Tout philosophe respecte Aristote."
(f) "Certains philosophes respectent Aristote et Socrate."
(g) "Tous les philosophes admirent un politicien."
(h) "Les philosophes respectent les politiciens sérieux."
(i) "Aristote est admiré."

8. (2 points) Formulez, dans le langage naturel, des phrases contradictoires aux phrases suivantes (indiquez les ambiguïtés là où il y en a) :
(a) Tout ce qui brille n'est pas d'or.
(b) Cette salle est à moitié vide.
(c) Tous les chemins mènent à Rome.
(d) Certains Québécois ont au moins deux voitures.
(e) Les chiens ont quatre pattes.
(f) Le chien est un animal.
(g) Le pingouin est mon animal préféré.

9. (1 point) Faites un diagramme de Venn pour la phrase suivante :

Une chose est flexible si et seulement si elle est soit granulée soit lourde.

10. (5 points) Formalisez les arguments donnés dans le langage de la logique des prédicats et vérifiez s'ils sont valides avec des diagrammes de Venn :
(a) Tous les témoins qui sont des actionnaires sont des employés. Tous les témoins sont soit des employés, soit des actionnaires. Donc, tous les témoins sont des employés.
(b) Toute personne qui connaît Jeanne et Marie admire Jeanne. Quelques personnes qui connaissent Jeanne ne l'admirent pas. Donc, il existe quelqu'un qui connaît Jeanne mais pas Marie.
(c) Aucun pingouin européen n'est noir ; tous les pingouins noirs sont européen. Donc, aucun pingouin n'est noir.
(d) Seuls les maîtres de conférence parlant anglais sont éligibles ; certaines personnes parlent anglais mais ne sont pas des maîtres de conférence ; donc certaines personnes qui ne sont

pas éligibles parlent anglais.

(e) Tout est soit une substance, soit un attribut ; les modes ne sont pas de substances. Donc, les modes sont des attributs.

16.11 Formalisation, validité

1. (10 points) Formalisez (supposez que le domaine de quantification est la totalité des êtres humains) :
   (a) Suzie est F.
   (b) Sam est F.
   (c) Quelques D sont F.
   (d) Tout D est F.
   (e) Seuls les D sont F.
   (f) Aucun H n'est F.
   (g) Quelques H ne sont pas F.
   (h) Sam n'est pas F.
   (i) Suzie a tué Sam.
   (j) Quelqu'un a tué Sam.
   (k) Sam a tué quelqu'un.
   (l) Quelqu'un a tué quelqu'un.
   (m) Quelqu'un s'est tué.
   (n) Personne ne s'est tué.
   (o) Quelqu'un a tué tout le monde.
   (p) Quelqu'un a été tué par tout le monde.
   (q) Il y a un S entre Sam et Suzie.
   (r) Chaque douanier hait un coureur. [n'importe lequel]
   (s) Quelques coureurs aiment chaque douanier.
   (t) Il y a un coureur haı¨ par tous les douaniers fous.
   (u) Quelques C n'ont la relation P avec aucun FD.
   (v) Quelques C ont la relation P seulement avec des D qui ne sont pas F.
2. (2 points) Donnez des phrases en français dont les formules suivantes sont des formalisations :
   (a) "$\forall x(Dx \rightarrow \forall y((Cy \wedge Fy) \rightarrow Hxy))$"
   (b) "$\exists x((Dx \wedge Fx) \rightarrow Pax)$"
3. (4 points) Vérifiez (de manière intuitive) si l'argument suivant, dont les prémisses sont (1) à (10) et dont la conclusion est (11), est valide. A chaque étape, n'utilisez que deux phrases à la fois et en déduisez une troisième. Supposez que l'univers de discours ne contient que des animaux.
   (1) Tous les animaux dans la maison sont des chats.
   (2) Tout animal est susceptible d'être mon ami s'il adore la lune.
   (3) Si je déteste un animal, je l'évite.
   (4) Aucun animal n'est carnivore, sauf s'il chasse la nuit.
   (5) Aucun chat ne parvient pas à tuer des souris.
   (6) Aucun animal ne s'habitue à moi, sauf ceux qui sont dans la maison.
   (7) Les kangourous ne sont pas susceptibles d'être mes amis.
   (8) Seuls les carnivores tuent des souris.
   (9) Je déteste les animaux qui ne s'habituent pas à moi.
   (10) Les animaux qui chassent la nuit adorent toujours la lune.
   (11) Donc, j'évite les kangourous.

4. (2 points) Formalisez les phrases suivantes dans le langage de la logique des prédicats :
   (a) Si tous les commandeurs doivent être renversés, alors aucun commandeur ne doit pas être renversé.
   (b) Tout oiseau qui n'est ni nuisible ni dangereux n'est pas un rapace.
   (c) Quelques champignons sont à la fois répandus et vénéneux.
   (d) Quelques champignons sont répandus et quelques champignons sont vénéneux.
5. (2 points) Formulez en langage ordinaire les négations des phrases (c) et (d) de la troisième question. (c) et (d) ne sont pas logiquement équivalentes dans la mesure où l'un des deux implique l'autre, mais la converse (que la deuxième implique la première) n'est pas vraie. Dans quel sens va l'implication ?

16.12 Syntaxe et sémantique

1. (6 points) Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats avec $\mathbf{I} = \{0\}$, $\mathbf{J} = \{0, 1, 2\}$, $\mathbf{K} = \{0, 1\}$, $\lambda(0) = 2$, $\mu(0) = 1$, $\mu(1) = \mu(2) = 2$. Nous remplaçons les signes non-logiques par les suivants :

$$\begin{array}{rcl} \ldots R_0 \cdots & \rightsquigarrow & \ldots \leq \cdots \\ f_0(\ldots) & \rightsquigarrow & - \ldots \\ f_1(\ldots, \cdots) & \rightsquigarrow & \ldots + \cdots \\ f_2(\ldots, \cdots) & \rightsquigarrow & \ldots \times \cdots \\ c_0 & \rightsquigarrow & 0 \\ c_1 & \rightsquigarrow & 1 \end{array}$$

   (a) Les expressions suivantes sont-elles des termes de $\mathcal{L}^+$?
      (i) "0"
      (ii) "$x_1 + 1$"
      (iii) "$+x_1$"
      (iv) "$x_1 \times$"
      (v) "$x_1 \times (0 + 1)$"
      (vi) "2"
   (b) Les expressions suivantes sont-elles des formules atomiques de $\mathcal{L}^+$?
      (i′) "$x_1 + 1$"
      (ii′) "$0 + 0 \neq 1$"
      (iii′) "$(x_1 \leq 1) \neq 1$"
      (iv′) "$\forall x_1(x_1 \leq (0 + 1))$"
      (v′) "$0 + 1 \neq 0 \times 1$"
      (vi′) "$x_1 \leq 1$"
   (c) Les expressions suivantes sont-elles des formules de $\mathcal{L}^+$?
      (i″) "0"
      (ii″) "$x_1 + 1 \leq x_1$"
      (iii″) "$\forall x_1(x_1 \times (0 + 1))$"
      (iv″) "$1 + (x_1 \times (0 + 1))$"
      (v″) "$(1 + 1) \wedge (0 \leq 1)$"
      (vi″) "$\forall x_1(x_1 \leq (0 + 1))$"
   (d) Dans lesquelles des formules suivantes $\mathcal{L}^+$ la variable "x_1" a-t-elle une occurrence libre ?
      (i‴) "$x_1 + 1 \leq 1$"
      (ii‴) "$\forall x_1 \neg(x_1 \neq (0 + 1))$"
      (iii‴) "$\exists x_2(1 + (x_2 \times (0 + 1) \leq x_1))$"

(iv‴) "$\forall x_1(0 \leq x_1) \wedge ((0 \leq 1) \vee 1 \neq x_1)$"
(v‴) "$\forall x_1((0 \leq x_1) \rightarrow (1 \neq x_1))$"
(vi‴) "$\forall x_2 \exists x_1 \neg(x_2 \leq x_1)$"

2. (3 points) A l'aide de la définition de validité, justifiez la vérité des phrases suivantes :
   (a) "$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Gx \rightarrow \neg Hx) \models \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$"
   (b) "$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \models \neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$"
   (c) "$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(\neg Gx) \models \exists x(\neg Fx)$"
3. (3 points) Parmi les énoncés suivants, trouvez ceux qui sont équivalents et ceux qui sont la négation l'un de l'autre. Formalisez chacun des énoncés en langage de la logique des prédicats :
   (a) Les amours heureuses sont imaginaires.
   (b) Les amours imaginaires sont heureuses.
   (c) Les amours malheureuses ne sont pas imaginaires.
   (d) Il n'y a pas d'amours heureuses qui ne soient imaginaires.
   (e) Il n'y a d'imaginaire que les amours heureuses.
   (f) Toutes les amours imaginaires sont heureuses.
4. (8 points)

16.13 La méthode des arbres

1. (4 points) A l'aide de la méthode des arbres, trouvez des modèles pour les phrases suivantes :
   (a) "$\exists x \forall y\ (Rxy) \wedge \exists x \exists y\ (\neg Rxy)$"
   (b) "$\forall x\ (\neg Sxx) \wedge \exists x \exists y \exists z\ (Sxy \wedge Syx \wedge \neg Sxz)$"
   (c) "$\forall x \exists y\ (Rxy) \wedge \forall x\ (\neg Rxx) \wedge \neg\forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$"
   (d) "$\forall x \exists y\ Rxy \wedge \forall x\ \neg Rxx \wedge \exists x \exists y (Rxy \wedge \neg Ryx)$"
2. (4 points) Déterminez si les phrases suivantes sont valides à l'aide de la méthode des arbres :
   (a) "$\exists x \forall y\ (Rxy) \rightarrow \forall y \exists x\ (Rxy)$"
   (b) "$\forall x\ (Fx) \rightarrow \exists x\ (Fx)$"
   (c) "$\neg\exists y\ (Py)\ \rightarrow \forall y\ (Fy \rightarrow \exists x Fx)$"
   (d) "$\forall x\ (Fx \rightarrow (Gx \wedge Hx)) \rightarrow \forall x\ ((Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx)$"
3. (8 points) A l'aide de la méthode des arbres, vérifiez la validité des phrases suivantes. Décrivez des structures dans lesquelles les converses de (b) et de (d) sont fausses.
   (a) "$\forall x\ (Fx \wedge Gx) \leftrightarrow (\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx))$"
   (b) "$(\forall x Fx \vee \forall x Gx) \rightarrow \forall x(Fx \vee Gx)$"
   (c) "$\exists x\ (Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx))$"
   (d) "$\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx))$"
4. (4 points) Soient les abréviations suivantes :

"p" pour	"$\forall x \forall y\ (Rxy \rightarrow Ryx)$"	("la relation R est symétrique")
"q" pour	"$\forall x \forall y \forall z\ ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$"	("la relation R est transitive")
"r" pour	"$\forall x \forall y\ (Rxy \rightarrow Rxx)$"	("la relation R est réflexive")
"s" pour	"$\forall x \exists y (Rxy)$"	("la relation R est 'ouverte'")
"t" pour	"$\forall x \forall y\ (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$"	("la relation R est antisymétrique")

   (a) Prouvez, par la méthode des arbres, la phrase suivante :

   (1) $(p \wedge q) \rightarrow r$

   (b) Montrez qu'il n'est pas possible de trouver un modèle pour la phrase suivante par la méthode

des arbres :

(2) $\neg((q \wedge s \wedge t) \rightarrow \exists x \forall y(\neg Ryx))$

(c) Donnez un exemple d'une structure dans laquelle (2) est vraie.

16.14 La déduction naturelle

1. (14 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents suivants :
   (a) "$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$, $\forall x(Hx \rightarrow Gx)$ $\vdash$ $\forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$"
   (b) "$\forall x(Gx \rightarrow \neg Fx)$, $\forall x(Hx \rightarrow Gx)$ $\vdash$ $\forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$"
   (c) "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ $\vdash$ $\forall x(Fx) \rightarrow \forall x(Gx)$"
   (d) "$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$, $\exists x(Fx \wedge Gx)$ $\vdash$ $\exists x(Fx \wedge \neg Hx)$"
   (e) "$\forall x(Hx \rightarrow Gx)$, $\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ $\vdash$ $\exists x(Fx \wedge \neg Hx)$"
   (f) "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ $\vdash$ $\exists x(Fx) \rightarrow \exists x(Gx)$"
   (g) "$\forall x(Fx \wedge Gx)$ $\vdash$ $\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$"
   (h) "$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$ $\vdash$ $\exists x(Fx \vee Gx)$"
   (i) "$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$ $\vdash$ $Fa \rightarrow \exists x(Fx)$"
   (j) "$\exists x(Fx) \rightarrow Fa$ $\vdash$ $\forall x(Fx \rightarrow Fa)$"
   (k) "$\exists x \forall y(Rxy) \vdash \forall y \exists x(Rxy)$"
   (l) "$\exists x \exists y(Rxy)$ $\vdash$ $\exists y \exists x(Rxy)$"
   (m) "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ $\vdash$ $\forall x(\exists y(Fy \wedge Rxy) \rightarrow \exists y(Gy \wedge Rxy))$"
   (n) "$\exists x(Fx \wedge Gx)$, $\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow \neg Rxy))$ $\vdash$ $\exists x(Fx \wedge \neg \forall y(Fy \rightarrow Rxy))$"
2. (6 points) Dites si les applications suivantes des règles de déduction naturelle pour les quantificateurs sont correctes. Si elles ne le sont pas, dites pourquoi.
   (a)

1	$\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash$ $\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	prémisse
2	$\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash$ $\exists z(Faa \wedge Gaz)$	de (1) par (SU)

   (b)

1	$\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash$ $\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	prémisse
2	$\forall x \exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash$ $\exists z(Faz \wedge Gbz)$	de (1) par (SU)

   (c)

1	Fba	$\vdash$ Fba	prémisse
2	Fba	$\vdash$ $\exists y(Fby)$	de (1) par (GE)

   (d)

1	$\exists x(Fxa)$	$\vdash$ $\exists x(Fxa)$	prémisse
2	$\exists x(Fxa)$	$\vdash$ $\exists y \exists x(Fxx)$	de (1) par (GE)

(e)

1	$Fab \to \forall x(Gax)$	$\vdash\ Fab \to \forall x(Gax)$	prémisse
2	$Fab \to \forall x(Gax)$	$\vdash\ \forall y(Fay \to \forall x(Gax))$	de (1) par (GU)

(f)

1	$\exists x(Fxa \wedge Gbx)$	$\vdash\ \exists x(Fxa \wedge Gbx)$	prémisse
2	$\exists x(Fxa \wedge Gbx)$	$\vdash\ Fba \wedge Gbb$	de (1) par (SE)

16.15 La logique des prédicats

1. (3 points) A l'aide de la méthode des arbres, prouvez les phrases suivantes :
   (a) "$\forall x(Fx) \to \forall y(Fy)$"
   (b) "$(\forall x(Fx \to Gx) \wedge \exists x(Fx \wedge Hx)) \to \exists x(Gx \wedge Hx)$"
   (c) "$\exists x \forall y \exists z\ (Sxyz) \to \forall y \exists x \exists z\ (Sxyz)$"
2. (4 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents suivants :
   (a) "$\forall x(Fx \to Gx)\ ,\ \forall x(Hx \to \neg Gx)\ \vdash\ \forall x(Fx \to \neg Hx)$"
   (b) "$\forall x((Fx \vee Gx) \to Hx)\ ,\ \forall x \neg(Hx)\ \vdash\ \forall x \neg(Fx)$"
   (c) "$\exists x(Fx \wedge Gx)\ \vdash\ \exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)$"
   (d) "$\forall x(Fx \to Fa)\ \vdash\ \exists x(Fx) \to Fa$"

16.16 La logique modale

1. (20 points)

16.17 La logique des prédicats

1. (20 points)

16.18 Troisième examen probatoire

1. (3 points) Formulez les lois de Morgan pour la logique propositionnelle et utilisez des tables de vérité pour montrer qu'elles sont correctes.
2. (2 points) Déterminez lesquelles des paires de phrases suivantes sont telles que le premier membre a la même table de vérité que le second :
   (a) "$(p \wedge \neg q) \wedge r$" et "$p \wedge (\neg q \wedge r)$"
   (b) "$\neg(p \vee q)$" et "$\neg p \vee \neg q$"
3. (2 points) Considérez les deux phrases suivantes :
   1 Chaque douanier fou hait un coureur.
   2 Il y a un coureur qui est haï¨ par tous les douaniers fous.

(a) Est-ce que l'une de ces phrases est structurellement ambigüe ? Si oui, laquelle et entre quelles deux formes logiques est-elle ambigüe ?
(b) Est-ce que l'une de ces phrases implique sémantiquement l'autre et si oui, dans quel sens va l'implication ?

4. (3 points) Formalisez les phrases données dans un langage de la logique des prédicats et formulez, en français, des phrases contradictoires aux phrases données (a) à (c) :
   (a) Quelques champignons sont répandus et quelques champignons sont vénéneux.
   (b) Tous les chemins mènent à Rome.
   (c) Seuls les fous adorent Aristote.
5. (5 points) A l'aide de la méthode des arbres, prouvez les phrases suivantes :
   (a) "$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$"
   (b) "$((p \rightarrow (p \wedge q)) \wedge p) \rightarrow q$"
   (c) "$\forall x(Fx \rightarrow Ga) \rightarrow (\exists x(Fx) \rightarrow Ga)$"
   (d) "$Ga \rightarrow (\forall x(Fx) \rightarrow \exists x(Fx))$"
6. (5 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents suivants :
   (a) "$p, p \rightarrow q\ ,\ p \rightarrow r\ \vdash\ q \wedge r$"
   (b) "$p \vee q\ ,\ p \rightarrow r\ ,\ q \rightarrow r\ \vdash\ r \vee s$"
   (c) "$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)\ \vdash\ \forall x(Fx \vee Gx)$"
   (d) "$\forall x(Gx \rightarrow Hx)\ ,\ \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge Hx)$"

16.19 Quatrième examen probatoire

1. (2 points) Montrez au moyen de tables de vérité que les formules suivantes sont des tautologies :
   (a) "$p \rightarrow p$"
   (b) "$((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$"
   (c) "$\neg(\neg p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$"
   (d) "$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
2. (4 points) A l'aide de la méthode des arbres, vérifiez si les phrases suivantes peuvent être prouvées :
   (a) "$(\neg q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$"
   (b) "$\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$"
   (c) "$(p \vee q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$"
   (d) "$((p \leftrightarrow q) \wedge (q \wedge r) \wedge (q \rightarrow s)) \rightarrow (s \rightarrow p)$"
3. (4 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents suivants :
   (a) "$p \rightarrow q\ ,\ p \rightarrow r\ \vdash\ p \rightarrow (q \wedge r)$"
   (b) "$p \rightarrow q\ ,\ r \rightarrow s\ \vdash\ (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)$"
   (c) "$\vdash\ p \rightarrow (q \vee \neg q)$"
   (d) "$p \wedge \neg p\ \vdash\ p$"
4. (2 points) Expliquez
   (a) ce qu'est un terme singulier
   (b) ce qu'est une phrase ouverte
   (c) quelle est la distinction entre usage et mention
   (d) ce qu'est un système formel axiomatique
   (e) ce qu'est l'analyse Russellienne d'une description définie
5. (2 points) Expliquez, en vos propres mots, les distinctions (i) entre variables et constantes individuelles et (ii) entre noms propres, indexicaux et descriptions définies.
6. (3 points) A l'aide de la méthode des arbres, prouvez les phrases suivantes :

(a) "$\forall x\ (Fx \to Gx) \to (\forall x\ (Fx) \to \forall x\ (Gx))$"
(b) "$\forall x\ (Fx \to Gx) \to (\exists x\ (Fx) \to \exists x\ (Gx))$"
(c) "$(\forall x\ (Fx \to Hx) \wedge \forall x(Gx \to Hx) \wedge \forall x\ (Fx \vee Gx)) \to \forall x\ (Hx)$"

7. (3 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents suivants :
(a) "$\exists x \forall y \exists z (Sxyz)\ \vdash\ \forall y \exists x \exists z (Sxyz)$"
(b) "$\forall x(Fx), \forall x(Gx)\ \vdash\ \forall x(Fx \wedge Gx)$"
(c) "$\exists x(Fx \vee Gx)\ \vdash\ \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$"

16.20 Cinquième examen probatoire

1. (2 points) Faites des tables de vérité pour les phrases suivantes :
(a) "$((\neg p \to q) \wedge \neg q \wedge (p \to (p \vee s)) \wedge \neg s) \to (p \wedge q)$"
(b) "$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$"
2. (3 points) La police arrête trois suspects : Maria, Sam et Jonathan. Ils font les témoignages suivantes :
   - Maria : "Jonathan est innocent, mais Sam ne l'est pas."
   - Sam : "Si Maria n'est pas innocente, alors Jonathan ne l'est pas non plus."
   - Jonathan : "Je suis innocent, mais au moins l'un des deux autres ne l'est pas."

Abrégeant "Maria est innocente" par "p", "Sam est innocent" par "q" et "Jonathan est innocent" par "r",
(a) exprimez les trois témoignages comme formules de la logique propositionnelle et faites-en les tables de vérité
(b) utilisez ces tables pour déterminer
   (i) si les trois témoignages sont consistants ;
   (ii) si l'un des trois témoignages s'ensuit d'un autre (et si oui, lequel s'ensuit duquel) ;
   (iii) qui a menti si tous sont innocents ;
   (iv) qui est innocent et qui est coupable si les trois témoignages sont vrais ;
   (v) qui est innocent et qui est coupable si le ou les innocent(s) a/ont dit la vérité et que le ou les coupable(s) a/ont menti.
3. (3 points) Formalisez les phrases et formulez, en français, des phrases contradictoires :
(a) "Quelques champignons sont répandus et quelques champignons sont vénéneux."
(b) "Aucun pingouin n'est fou."
(c) "Il viendra seulement s'il est invité."
(d) "Elle n'est ni gentille ni intelligente."
(e) "Il y a un philosophe qui est adoré par tous les douaniers fous."
(f) "Le roi de France est chauve."
4. (6 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents suivants :
(a) "$\vdash\ p \vee \neg p$"
(b) "$p \vee q\ ,\ p \to r\ ,\ q \to r\ \vdash\ r \vee s$"
(c) "$(p \to r) \wedge (q \to r)\ \vdash\ (p \vee q) \to r$"
(d) "$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)\ \vdash\ \forall x(Fx \vee Gx)$"
(e) "$\forall x(Gx \to Hx)\ ,\ \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge Hx)$"
(f) "$\forall x(Fx \to Gx)\ ,\ \forall x(Hx \to \neg Gx)\ \vdash\ \forall x(Fx \to \neg Hx)$"
5. (4 points) A l'aide de la méthode des arbres, prouvez les phrases suivantes :
(a) "$(p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$"
(b) "$((p \wedge (q \leftrightarrow r)) \wedge (\neg p \vee (q \to \neg r))) \to (p \to \neg r)$"
(c) "$\exists x \forall y\ (Rxy) \to \forall y \exists x\ (Rxy)$"

(d) "$(\forall x \forall y(Rxy \to Ryx) \wedge \forall x \forall y \forall z((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)) \to \forall x \forall y(Rxy \to Rxx)$"

6. (2 points) Montrez que les phrases suivantes ne sont pas des théorèmes de la logique des prédicats :
   (a) "$\forall x(Fx \vee Gx) \to (\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx))$"
   (b) "$\forall x \exists y(Rxy) \to \exists y \forall x(Rxy)$"

Chapitre 17

Solutions aux exercices

17.1 Formalisation, validité

1. **Question** (2 points) Formalisez :

   > Si les Etats-Unis n'attaquent pas l'Iran et que le prix de l'essence augmente, la Syrie attaque Israël. Si la Syrie n'attaque pas Israël, le Liban le fera. Si les Etats-Unis n'attaquent pas l'Iran, le prix de l'essence augmente ou la Syrie attaque Israël. Si la Syrie attaque Israël, alors les Etats-Unis attaquent l'Iran.

   Solution Voici l'une des formalisations possibles (un demi-point par phrase) :

Si les Etats-Unis n'attaquent pas l'Iran et que le prix de l'essence augmente, la Syrie attaque Israël.	$\rightsquigarrow$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow r$
Si la Syrie n'attaque pas Israël, le Liban le fera.	$\rightsquigarrow$	$\neg r \rightarrow s$
Si les Etats-Unis n'attaquent pas l'Iran, le prix de l'essence augmente ou la Syrie attaque l'Israel.	$\rightsquigarrow$	$\neg p \rightarrow (q \vee r)$
Si la Syrie attaque Israël, alors les Etats-Unis attaquent l'Iran.	$\rightsquigarrow$	$r \rightarrow p$

   Il y a différentes solutions. Par exemple on peut également formaliser "les Etats-Unis n'attaquent pas l'Iran" comme "p", sans tenir compte de la négation. Le discours devient alors :

Si les Etats-Unis n'attaquent pas l'Iran et que le prix de l'essence augmente, la Syrie attaque Israël.	$\rightsquigarrow$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
Si la Syrie n'attaque pas Israël, le Liban le fera.	$\rightsquigarrow$	$\neg r \rightarrow s$
Si les Etats-Unis n'attaquent pas l'Iran, le prix de l'essence augmente ou la Syrie attaque l'Israel.	$\rightsquigarrow$	$p \rightarrow (q \vee r)$
Si la Syrie attaque Israël, alors les Etats-Unis attaquent l'Iran.	$\rightsquigarrow$	$r \rightarrow \neg p$

2. **Question** (1 point) Au cours d'une discussion avec Sam, il me dit que mon argument est faux. En me disant cela, Sam se trompe. Pourquoi ?

   Solution Un argument ne peut pas être dit vrai ou faux, même s'il contient des prémisses et une conclusion qui peuvent être dites vraies ou fausses. L'évaluation d'un argument ne se fait pas par rapport à sa vérité : il est bon, convaincant, pertinent etc., mais pas vrai ou faux. En logique, un argument peut être dit "valide" ou "non valide" : il est valide si la vérité des prémisses garantie la vérité de la conclusion, c'est-à-dire s'il est impossible que ses prémisses soient vraies et la conclusion fausse.

3. **Question** (1 point) Sam sait que si Maria aime Paul, alors elle sera déçue. Joséphine, la soeur de

Maria, connaît les sentiments de Maria pour Paul. Joséphine aime Paul, et pour cette raison elle lui ment à chaque fois qu'il lui demande quels sont les sentiments de Maria à son égard. Paul a posé la question à Joséphine. Cette dernière lui a répondu que Maria ne l'aime pas. Est-ce que Maria sera déçue ?
Solution Maria sera déçue si elle aime Paul. Joséphine a dit que Maria ne l'aime pas mais elle a menti. Alors Maria aime Paul. Donc elle sera déçue.

4. **Question** (4 points) Lesquels des arguments suivants sont valides ?
Solution
   (a) "Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage ; je serai heureux et sage ; alors j'étudie la logique."– Il s'agit d'un exemple type du raisonnement fallacieux que l'on appelle l''affirmation du conséquent' : on ne peut pas conclure du fait qu'une condition nécessaire pour x soit réalisée que x l'est aussi. Donc : **non-valide**.
   (b) "Napoléon était allemand ; les allemands sont européens ; donc Napoléon était européen." – **Valide**, même si la première prémisse n'est pas vraie : si elle était vraie, la conclusion le serait aussi.
   (c) "Napoléon était allemand ; les allemands sont asiatiques ; donc Napoléon était asiatique."– **Valide**, même si les deux prémisse sont fausses : si elles étaient vraies, la conclusion le serait aussi.
   (d) "Napoléon était français ; tous les français sont européens ; donc Hitler était Autrichien."– Les prémisses peuvent être vraies même si la conclusion ne l'était pas : donc **non-valide**, même si les trois phrases sont toutes vraies.
   (e) " Si Napoléon avait était chinois, alors il aurait été asiatique ; Napoléon n'était pas asiatique ; donc il n'était pas chinois."– Il s'agit d'une forme de raisonnement que l'on appelle 'conversion' : de "si p, alors q", on peut conclure "si $\neg q$, alors $\neg p$" ; si le conséquent est faux, l'antécédent ne peut pas être vrai, sinon toute l'implication serait fausse ; donc **valide**.
   (f) "Le réalisme naı¨f nous amène à la physique et la physique, si elle est vraie, nous montre que le réalisme naı¨f est faux. Donc le réalisme naı¨f, s'il est vrai, est faux ; alors il est faux" – Il s'agit d'un raisonnement par réduction à l'absurde (*reductio ad absurdum*) (au moins si "amène" est interprété comme "implique") de la forme "si p, alors $\neg p$; donc $\neg p$" ; une phrase qui implique sa propre fausseté doit être fausse : si elle est vraie, elle est fausse ; si elle est fausse, elle est aussi fausse ; elle est ou bien vraie ou fausse ; alors elle est fausse : **valide**.
   (g) "S'il pleut, on annulera le pique-nique. S'il ne pleut pas, Marie insistera pour aller à la plage, alors le pique-nique sera annulé. Ou bien il pleuvra ou bien il ne pleuvra pas. Donc le pique-nique sera annulé. " – Il s'agit d'un 'dilemme constructif' : il y a deux possibilités ; si, dans les deux, une phrase particulière est vraie, alors elle est vraie : **valide**.
   (h) " "Dieu existe."– "Pourquoi ?" – "La Bible le dit."– "Mais pourquoi penses-tu que tout ce qui est dans la Bible est vrai ?" – "Parce que la bible est la parole de Dieu."– "Et comment sais-tu cela ?" – "C'est ce qui est dit dans la bible."" Ce raisonnement est circulaire : le locuteur, on donnant une raison pour "p" qui présuppose déjà que "p" n'arrive pas à exclure la possibilité que "$\neg p$" ; donc **non-valide**.
5. **Question** (3 points) En respectant la convention qui veut que l'on forme le nom d'une expression en plaçant ce mot entre guillemets (et selon la fiction qu'il n'y a pas d'autre usage des guillemets), lesquelles des phrases suivantes expriment des phrases vraies ?
Solution
   (a) "L'*Iliade* a originalement été écrite en français." est **fausse**, parce que l'*Iliade* a été écrite en grec ancien.
   (b) " "L'*Iliade*" est un poème épique." est **fausse**, parce que le *mot* "l'*Iliade*" n'est pas un poème épique.
   (c) " "Ou bien l'expression "philosophie" commence par des guillemets ou bien ""philosophie""

ne le fait pas." est **fausse**, parce que "philosophie" commence par un "p" et non pas des guillemets et parce que ""philosophie"" en fait commence par des guillemets.

(d) "2+2=4 est une vérité mathématique." n'est **pas vraie**, parce que ce n'est pas une phrase grammaticalement correcte : elle a la même forme logique que "il pleut est l'amie de Sam" : une phrase, suivie d'un prédicat (qui a besoin d'un nom pour former une phrase).

(e) " "Berne" et "la capitale de la Suisse" mentionnent la même ville." est **vraie**, puisque Berne est la capitale de la Suisse.

(f) " "le 42ème président des Etats-Unis" est "le mari de Hillary Clinton"." est **fausse**, puisque les deux expressions ne sont pas identiques.

(g) "La phrase qui précède ne parle pas de Bill Clinton." est **vraie**, bien que le mari de Hillary (et aussi le 42ème président des Etats-Unis) est Bill Clinton. Ce n'est que de son nom est non pas de la personne que nous parlons dans la phrase (e).

6. **Question** (3 points) Mettez des guillemets de telle sorte que le résultat soit sensé :
Solution

(a) Même si "x" est la 24ème lettre de l'alphabet, quelques savants ont dit que x est l'inconnue. – Ils n'ignoraient pas la lettre, mais c'est la lettre qui fait partie de l'alphabet.

(b) Bien que ""Aristote"" soit un nom d'"Aristote" et que "Aristote" soit un nom d'Aristote, Aristote est un nom de personne. – Le troisième mot de la phrase est un nom du huitième et le onzième est un nom d'Aristote, mais Aristote est un philosophe et non pas un mot. Une autre solution un peu moins intéressante transforme la phrase en la suivante : "Bien que "Aristote" soit un nom d'Aristote et que "Aristote" soit un nom d'Aristote, Aristote est le nom de personne."

(c) "Philipp" est mon nom et bien que je sache ce qu'est la philosophie, je n'ai jamais compris ce que les gens veulent dire par "philosophie." – Mon nom est un mot ; je sais ce que le mot "philosophie" signifie (la philosophie), mais parfais je ne sais pas dans quel sense le mot est utilisé par d'autres.

(d) "Italo Svevo" est un pseudonyme de Ettore Schmitz. – celui qui a le pseudonyme est un homme ; le pseudonyme lui-même est un mot.

(e) Dans la langue française,
n'est-il pas amusant de constater que
"mot" est bien un mot
que "nom" est un mot et un nom
que "adjectif" est un mot, un nom et un adjectif
tandis qu'"adverbe" n'est pas un adverbe

7. **Question** (1 point) Utilisez la distinction entre la sémantique et la pragmatique pour expliquer la différence entre "Il pleut, et il ne pleut pas." et "Il pleut, mais je ne le crois pas.".
Solution

(a) "Il pleut et il ne pleut pas" est une contradiction de la forme "$p \wedge \neg p$" – les deux conjoints ne peuvent pas être vrais ensembles, la phrase conjonctive est fausse quelle que soit la valeur de vérité de "il pleut" – elle est donc fausse pour des raisons de **sémantique**. Pour des raisons sémantiques, c'est-à-dire qu'en vertu des significations de "$\wedge$" et de "$\neg$", cette phrase ne peut pas être vraie. Une autre question qui ne concerne pas la sémantique est celle de savoir comment interpréter le statut des contradictions. Dans le *Tractatus*, Wittgenstein défendait une position selon laquelle les tautologies et les contradictions ne nous disent rien (puisque leur vérité ou fausseté n'exclut aucune possibilité), mais elles nous montrent quelque chose. Mais il s'agit ici d'une thèse philosophique qui n'est pas une conséquence directe de leur statut sémantique. On ne peut donc pas dire que des phrases de la forme "$p \wedge \neg p$" n'ont pas de sens (au moins sans dire beaucoup plus) – au contraire, il s'agit d'une contradiction, expression qui a un sens bien défini (elle est fausse selon toutes les

possibilités d'attribuer une valeur de vérité à ses constituants).

(b) "Il pleut, mais je ne le crois pas" n'a pas la forme "$p \wedge \neg p$", mais la forme "$p \wedge$ je ne crois pas que p" – une assertion de cette phrase est étrange et, d'après certains, viole le principe selon lequel il faut croire ce qu'on affirme – mais elle est insolite pour des raisons de **pragmatique** et non pas des raisons de sémantique. La conjonction peut être vraie, par exemple dans des cas où je n'ai formé aucune opinion sur le temps qu'il fait (parce que je dors, par exemple).

8. **Question** (2 points) Décrivez deux différences fondamentales entre des langues naturelles et des langues formelles.
Solution Voici quelques différences :
(a) Dans une langue naturelle, les règles qui servent à former des expressions complexes à partir d'expressions plus simples sont sensitives à la signification de ces expressions ; dans une langue formelle, leur applicabilité ne dépend que de critères syntaxiques.
(b) Les langues naturelles sont des langues parlées et les langues formelles ne le sont pas.
(c) La maîtrise d'une langue naturelle requiert des connaissances de son aspect pragmatique ; la pragmatique ne joue pas de rôle pour une langue formelle.
(d) Les langues formelles sont construites de manière explicite, en énumérant leur vocabulaire primitif et les règles récursives qui permettent de produire des expressions complexes ; les expressions d'une langue naturelle, au contraire, ont leur forme logique de manière implicite – il faut les 'régimenter' pour la rendre explicite.
(e) Dans les langues naturelles, il y a des cas d'ambiguı¨tés syntaxiques, ce qui est exclu dans les langues formelles.
(f) Des phénomènes d'indexicalité sont possibles dans de nombreuses langues formelles, ce qui est normalement exclus dans les langues formelles.

Il n'est pas juste de dire que le principe de compositionnalité ne s'applique qu'aux langues formelles – il s'applique aussi aux langues formelles, même sous une forme particulièrement stricte (le principe de vérifonctionnalité).

9. **Question** (3 points) Est-ce que les arguments suivants sont valides ? Si oui, sont-ils *logiquement* valides ?
Solution
(a) "Tom est célibataire ou anarchiste. Il n'est pas anarchiste. Donc il est célibataire." – **Logiquement valide** et de la forme "p ou q ; $\neg q$; donc p" (1 point).
(b) "Tom est célibataire ou végétarien. Il n'est pas végétarien. Donc il n'est pas marié." – **Matériellement valide** ; il s'ensuit par une inférence logiquement valide que Tom est célibataire. Qu'il n'est pas marié s'ensuit en vertu de la signification du prédicat "... est célibataire" (en vertu du fait que toute personne qui est célibataire est non-mariée) (1 point).
(c) "Tom est célibataire et banquier. Il n'est pas célibataire. Donc il n'est pas communiste." – Un argument qui peut être convaincant, mais qui n'est **pas valide**. Il ne s'ensuit seulement que Tom est banquier. Il est donc peu probable, mais toujours possible, qu'il est aussi communiste (1 point).

17.2 Les connecteurs propositionnels

1. **Question** (2 points) Une erreur s'est glissée dans chacune des tables de vérité suivantes. Laquelle ?
Solution
(a) (1 point)

p	q	$\neg p$	$q \to \neg p$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	**V**

(b) (1 point)

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \vee r$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	**F**
F	F	V	V	F	V

2. **Question** (3 points) Faites des tables de vérité pour les phrases suivantes :
   (a) "$\neg(\neg p \wedge \neg q)$"
   (b) "$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$"

   Solution

   (a) (1 point)

   i. Première méthode :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F

   ii. Deuxième méthode :

$\neg$	$(\neg$	p	$\wedge$	$\neg$	$q)$
V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F
V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	F

   iii. On voit donc que "$\neg(\neg p \wedge \neg q)$" a la même table de vérité que "$p \vee q$".

   (b) (1 point)

   i. Première méthode :

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

   ii. Deuxième méthode :

$(p$	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$r))$	$\leftrightarrow$	$((p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$(p$	$\wedge$	$r))$
V	V	V	V	V	**V**	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	F	**V**	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	**V**	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	**V**	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	**V**	F	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	**V**	F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	V	V	**V**	F	F	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	**V**	F	F	F	F	F	F	F

iii. Du fait qu'il n'y a que des "V" dans la colonne du connecteur principal, on voit que "$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$" est une tautologie (1 point).

3. **Question** (4 points) Supposons que "p" abrège "Laura aime Marc", "q" abrège "Guillaume adore Chantal" et "r" y "Brigitte flippe pour Jean-Pascal", Jean dit "$\neg(p \wedge \neg q)$ et Janine dit "$p \wedge \neg(q \wedge \neg r)$". Si Jean et Janine ont les deux raison, qui a des sentiments positifs envers qui ?

Solution

(a) Construisons les tables comme suit (1 point par table) :

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

p	q	r	$\neg r$	$q \wedge \neg r$	$\neg(q \wedge \neg r)$	$p \wedge \neg(q \wedge \neg r)$
V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	V	F

(b) (2 points, 1 pour le raisonnement, 1 pour la réponse) :

i. Première méthode : Si Jean a raison, alors il n'est pas le cas que "p" est vraie et "q" est fausse (la deuxième ligne du premier tableau reçoit la valeur "faux"). Si Janine a raison, alors il n'est pas le cas que "p" et "q" sont vraies et "r" est fausse (deuxième ligne du deuxième tableau), ni il est le cas que "p" est fausse (lignes 5 à 8 du deuxième tableau). Alors "p" est vraie. Mais alors "q" ne peut pas être fausse (autrement Jean aurait tort). Alors "q" doit être vraie. Alors "r" doit aussi être vraie (à cause de ce que dit Janine). Alors Laura aime Marc, Guillaume adore Chantal et Brigitte apprécie Jean-Paul.

ii. Deuxième méthode : Faites un tableau qui combine les deux :

p	q	r	$p \wedge \neg(q \wedge \neg r)$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \wedge \neg(q \wedge \neg r)) \wedge (\neg(p \wedge \neg q))$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F

On voit que toutes les lignes à part la première reçoivent la valeur "faux". Si Jean et Janine ont les deux raison, alors "p", "q" et "r" sont toutes vraies. Alors Laura aime Marc, Guillaume adore Chantal et Brigitte apprécie Jean-Paul.

4. **Question** (1 point) Si ces deux phrases sont vraies :
   - Si Jean-Paul est à la maison, il est avec Jean-Pascal.
   - Si Jean-Paul est à la maison, il n'est pas avec Jean-Pascal.

   Alors où est Jean-Paul ?

   Solution
   - D'une manière informelle : Si Jean-Paul était à la maison, il serait avec Jean-Pascal et il ne serait pas avec Jean-Pascal. Il n'est pas possible d'être avec Jean-Pascal tout en n'étant pas avec Jean-Pascal. Alors Jean-Paul n'est pas à la maison.
   - Par une règle d'inférence : le schéma de *réduction à l'absurde* nous permet de conclure "$\neg p$" de "$p \rightarrow q$" et de "$p \rightarrow \neg q$". Alors Jean-Paul n'est pas à la maison.
   - Par une table de vérité :

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

   On voit que dans les deux cas où les deux ont raison (troisième et quatrième ligne), "p" est faux. Alors Jean-Paul n'est pas à la maison.

5. **Question** (4 points) Montrez que les formules propositionnelles suivantes ont les mêmes tables de vérité :
   (a) "$\neg p$" et "$\neg\neg\neg p$"
   (b) "$p \rightarrow q$" et "$\neg p \vee q$"
   (c) "$\neg(p \wedge q)$" et "$\neg p \vee \neg q$"
   (d) "$\neg(p \vee q)$" et "$\neg p \wedge \neg q$"

   Solution

(a) (1 point) :

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg\neg p$
V	F	V	F
F	V	F	V

(b) (1 point) :

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

(c) (1 point) :

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

(d) (1 point) :

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

6. **Question** (2 points) Déterminez si "$((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$" est une tautologie.
   Solution On voit que c'est une tautologie comme suit (un point par côté) :

$((p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$r)$	$\leftrightarrow$	$((p$	$\vee$	$r)$	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$r))$
V	V	V	V	V	**V**	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	F	**V**	V	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	**V**	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	**V**	V	V	F	F	F	F	F
F	F	V	V	V	**V**	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	**V**	F	F	F	F	V	V	F
F	F	F	V	V	**V**	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	**V**	F	F	F	F	F	F	F

7. **Question** (1 point) Est-ce que la phrase suivante est vraie :

   "Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage" est le nom d'une phrase.

   Solution : Elle est fausse. "Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage" est une phrase, mais n'est pas le nom d'une phrase. "' "Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage"", par contre, est le nom d'une phrase, mais n'est pas une phrase.
8. **Question** (3 points) Discours politique.
   Solution
   (a) Pour la formalisation, on a (cf. 255 première question des exercices 1) (1 point) :

Si les Etats-Unis ... et le prix ..., la Syrie ...	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{A} := (\neg p \wedge q) \rightarrow r$
Si la Syrie ..., le Liban ...	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{B} := \neg r \rightarrow s$
Si les Etats-Unis ..., le prix ... et la Syrie ...	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{C} := \neg p \rightarrow (q \vee r)$
Si les Syrie..., alors les Etats-Unis...	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{D} := r \rightarrow p$

   (b) Les tables de vérités sont les suivantes (1 point) :
      i. Pour les trois premières prémisses, on a :

p	q	r	s	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	**A**	$\neg r$	**B**	$\neg p$	$q \vee r$	**C**
V	V	V	V	F	F	V	F	V	F	V	V
V	V	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	F	V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F

      ii. Pris ensemble, ceci nous donne :

p	q	r	s	**A**	**B**	**C**	**D**	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V	V	F
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	V	V	F
F	V	F	F	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F	F	V	F

(c) (1 point)

- La solution élégante : On voit donc que le discours est faux si seulement si une des lignes 4, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 ou 16 est le cas. Ce sont donc les cas qu'il faut exclure. Pour exclure les lignes 9 à 16, il suffit de postuler la vérité de "p". Pour exclure les lignes 4 et 8, il suffit de postuler la vérité de "$r \vee s$". Pris ensemble, on a donc "$p \wedge (r \vee s)$" : "les Etats-Unis attaquent l'Iran et ou bien la Syrie ou bien le Liban attaque l'Israël".
- La solution brute : Le discours est vrai si seulement si une des lignes 1, 2, 3, 5, 6 ou 7 est le cas. Le discours donc dit que une de ces lignes est le cas. Il faut alors juste en faire la disjonction de toutes ces possibilités :

(1) $$(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s)$$

- On voit ainsi que les deux solutions sont équivalentes : Dans la longue disjonction (1), on voit que le premier et le deuxième, le troisième et le sixième et le quatrième et le cinquième disjoints ne diffèrent en ce qu'ils contiennent une seule phrase une fois positivement et une fois négativement ("s" et "q" respectivement). On peut donc les laisser tomber :

(2) $$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

On fait la même chose avec le premier et le troisième disjoint dans (2) :

(3) $$(p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r \wedge s)$$

On applique la loi de distributivité (cf. leçon 3) :

(4) $$(p \vee (p \wedge \neg r \wedge s)) \wedge (r \vee (p \wedge \neg r \wedge s))$$

On voit que le premier conjoint est vrai si et seulement si "p" est vraie et que le deuxième peut être simplifié :

(5) $$p \wedge (r \vee (p \wedge s))$$

Dans le deuxième conjoint, nous n'avons plus besoin de requérir que p, puisque la vérité de "p" est déjà assurée avec le premier conjoint :

(6) $p \wedge (r \vee s)$

(d) Une solution directe : on transforme les quatre phrases initiales à l'aide de l'équivalence logique $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner \Rightarrow \ulcorner \neg\phi \vee \psi \urcorner$ en disjonctions :

(i)	$(\neg p \wedge q) \rightarrow r$	$\neg(\neg p \wedge q) \vee r$
(ii)	$\neg r \rightarrow s$	$\neg\neg r \vee s$
(iii)	$\neg p \rightarrow (q \vee r)$	$\neg\neg p \vee (q \vee r)$
(iv)	$r \rightarrow p$	$\neg r \vee p)$

On utilisant un des lois de Morgan, on simplifie (i) encore davantage, obtenons $p \vee \neg q \vee r$. On observe alors que (i), (iii) et (iv) contiennent tous "p" comme disjoint. Donc : si "p" est vrai, alors elles le sont également. Pour (ii), on a besoin de $r \vee s$. On essaie alors avec "$p \wedge (r \vee s)$" et on remarque que cette phrase à la même table de vérité que le discours entier.

(e) Pour le "discours opposé (contradictoire)", beaucoup ont transformé "$p \rightarrow q$" en "$\neg p \rightarrow \neg q$". Ces deux phrases, pourtant, ne sont pas contradictoires :

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	F	F	V

On voit que si "p" et "q" sont ou bien les deux vraies ou bien les deux fausses, les deux implications matérielles sont vraies.

La négation (= opposition contradictoire) de "les Etats-Unis attaquent l'Iran et ou bien la Syrie ou bien le Liban attaque l'Israël" ("$p \wedge (r \vee s)$") est "$\neg(p \wedge (r \vee s))$", ce qui se simplifie, par les lois de Morgan en "$\neg p \vee (\neg r \wedge \neg s)$" ("ou bien les Etats-Unis n'attaquent pas l'Iran ou bien ni la Syrie ni le Liban attaquent l'Israël") et, par la définition de l'implication, en "$p \rightarrow (\neg r \wedge \neg s)$" : "si les Etats-Unis attaquent l'Iran, ni la Syrie ni le Liban n'attaque l'Israël".

17.3 Relations logiques et inférences logiques

1. **Question** (5 points) Si possible, mettez les guillemets ou demi-crochets nécessaires pour que les phrases suivantes deviennent vraies (vous pouvez ignorer l'accord des pronoms).
   Solution
   (a) Il y a différentes solutions :
      (i) Paris est à l'ouest de Berne, mais "Berne" n'est pas à l'est de "Paris".
      (ii) Paris est à l'ouest de Berne, mais "Berne" n'est pas à l'est de Paris.
      (iii) Paris est à l'ouest de Berne, mais Berne n'est pas à l'est de "Paris".
   (b) En fonction de (a), il y a aussi différentes solutions :
      (i) Le dernier mot de la solution optimale à la question (1a) est ""Paris"".
      (ii) Le dernier mot de la solution optimale à la question (1a) est "Paris".
   (c) De même, il y a différentes solutions (une paire de guillemets plus qu'en (b) :
      (i) Le nom du dernier mot de la solution optimale à la question (1a) est """Paris""".
      (ii) Le nom du dernier mot de la solution optimale à la question (1a) est ""Paris"".
   (d) Il y a différentes solutions :
      (i) Pour toute phrase ϕ, le dernier mot de "le dernier mot de ϕ contient plus d'une syllabe"

contient plus d'une syllabe.

(ii) "Pour toute phrase ϕ, le dernier mot du dernier mot de ϕ contient plus d'une syllabe" contient plus d'une syllabe.

(iii) "Pour toute phrase ϕ, le dernier mot de "le dernier mot de ϕ contient plus d'une syllabe"" contient plus d'une syllabe.

(e) Voici deux solutions :

(i) La femme de Sarkozy appelle Sarkozy "Sarkozy".

(ii) La femme de Sarkozy appelle "Sarkozy" ""Sarkozy"".

(f) Le nombre de solutions est également illimité :

(i) Il n'est pas le cas que la femme de Sarkozy appelle Sarkozy par le nom de "Sarkozy".

(ii) Il n'est pas le cas que la femme de Sarkozy appelle Sarkozy par le nom de ""Sarkozy"".

(g) Cette phrase est incorrigible, *voir ci-dessous.*

(h) Le dernier mot de (1g) est "vulgaire". [cette phrase n'est donc pas incorrigible]

(i) Pour satisfaire la prédicat en question (= être la première lettre de l'alphabet grec), une chose doit être une *lettre*, à savoir la lettre "α" :

(i) "La première lettre de l'alphabet grec est α" est satisfaite par un objet β seulement si β est identique à "α".

(j) La tautologie en question est : $\ulcorner(\phi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow (\phi \rightarrow (\phi \wedge \neg\phi))\urcorner$. On a donc

(i) Pour toute phrase ϕ, $\ulcorner\phi$ implique $\neg\phi\urcorner$ implique $\ulcorner\phi$ implique ϕ et $\neg\phi\urcorner$

En général, l'itération des demi-crochets de Quine n'a aucun effet : "$\ulcorner\phi \rightarrow \ulcorner(\phi \wedge \psi)\urcorner\urcorner$" est un nom de la même formule que "$\ulcorner\phi \rightarrow (\phi \wedge \psi)\urcorner$" : si la première expression désigne "$p \rightarrow (p \wedge q)$", la deuxième le fait également.

2. **Question** (1 point) Mettez les guillemets nécessaires pour que le 'limerick' donné.
Solution Voici une solution :

According to W. Quine
Whose views on quotation are fine,
"Boston" names Boston,
And ""Boston"" names "Boston",
But 9 doesn't designate 9.

En voici une autre :

According to W. Quine
Whose views on quotation are fine,
"Boston" names Boston,
And "Boston" names Boston,
But "9" doesn't designate "9".

J'ai aussi compté comme correctes les solutions qui avaient

But "9" doesn't designate 9.

Ceci n'est pas dû à l'usage des guillemets, mais aux opinions que Quine a défendues en philosophie des mathématiques : d'après le jeune Quine, les noms de nombres ne désignent pas, parce qu'il n'a pas de nombres (plus tard, il a changé d'avis).

3. **Question** (5 points) Appelons une ligne du problème 1 *"incorrigible"* s'il n'y a aucune manière de mettre des guillemets et des crochets sans que le résultat devienne faux ou du non-sens. Il semble que

(i) (1g) est incorrigible.

(ii) (1h) n'est pas incorrigible

mais aussi que

(iii) (1g) est identique à (1h)

Mais au moins un de (i), (ii) et (iii) doit être faux. Autrement nous aurions une violation du principe que si x est identique à y, alors tout ce qui est vrai de x doit aussi être vrai de y. Lequel est faux ? Et pourquoi ?

Solution Il est clair que (i) et (ii) sont vrais. (1g) est incorrigible. Toutes les phrase suivantes sont fausses :

(1g) Le dernier mot de (1g) est "vulgaire".
(2g) "Le dernier mot de (1g)" est vulgaire.
(3g) "Le dernier mot de (1g)" est "vulgaire".

La première est fausse parce que si elle était vraie, le dernier mot de (1g) serait ""vulgaire"", contrairement à ce qu'elle dit. La deuxième est fausse parce que l'expression en question n'est pas vulgaire. La troisième est fausse, parce que le dernier mot de "Le dernier mot de (1g)" est "(1g)" et n'est pas "vulgaire".

Le principe en question est incontestable : il s'agit de l'indiscernabilité des choses identiques, la direction moins controversée de la fameuse 'loi de Leibniz' qui dit que deux choses sont identiques si et seulement si elles partagent toutes leurs propriétés.[1]

La question difficile est de comment justifier le rejet de (iii). Voici quelques options (toutes controversées) :

(a) L'incorrigibilité est une propriété de phrases-token et non pas de phrases-type. Les *token* (1g) et (1h) ne sont pas identiques.
(b) Deux phrases ne peuvent pas être identiques si elles appartiennent à différents niveaux de langage : (1g) appartient au langage objet, (1h) au métalangage ; donc les deux phrases ne sont pas identiques.
(c) Les propriétés sémantiques des deux phrases sont différentes, parce que l'auto-référentialité est une propriété sémantique. Les phrases "Socrate aime Socrate" et "Socrate aime lui-même" diffèrent sémantiquement.
(d) "... est vulgaire" crée un contexte intensionnel, comme le fait "... est ainsi appelé à cause de sa taille".

4. **Question** (6 points) Vérifiez la validité des schémas d'inférence suivantes, en montrant que les implications matérielles correspondantes sont des tautologies (un point pour deux tautologies) :
Solution

(a) Transitivité : les inférences du type $\dfrac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}$ sont valides si et seulement si

$$\models ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Nous démontrons ceci ainsi :

[1]Cette affirmation peut paraître paradoxale (comment *deux* choses peuvent être identiques ?), mais en fait elle ne l'est pas : l'usage de variables permet de la clarifier. Dire que deux choses sont identiques si et seulement si elles sont indiscernable revient à dire que, pour tout x et tout y, $x = y$ si et seulement si x et y ont les mêmes propriétés :

$$\forall x, y \, \forall F \, (x = y \leftrightarrow (Fx \leftrightarrow Fy))$$

La direction de gauche à droite est appelée *indiscernabilité des identiques*, celle de droite à gauche *identité des indiscernibles*.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \land (q \to r)$	$p \to r$	$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

(b) – Augmentation$_1$: les inférences du type $\dfrac{\begin{array}{c} p \to r \\ q \to r \end{array}}{(p \lor q) \to r}$ sont valides si et seulement si

$$\models ((p \to r) \land (q \to r)) \to ((p \lor q) \to r)$$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	q	r	$p \to r$	$q \to r$	$(p \to r) \land (q \to r)$	$p \lor q$	$(p \lor q) \to r$	$((p \to r) \land (q \to r)) \to ((p \lor q) \to r)$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V	V

– Augmentation$_2$: les inférences du type $\dfrac{p \to r}{(p \land q) \to r}$ sont valides si et seulement si

$$\models (p \to r) \to ((p \land q) \to r)$$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	q	r	$p \to r$	$p \land q$	$(p \land q) \to r$	$(p \to r) \to ((p \land q) \to r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

(c) – Reductio$_1$: les inférences du type $\dfrac{p \to \neg p}{\neg p}$ sont valides si et seulement si

$$\models (p \to \neg p) \to \neg p$$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	$\neg p$	$p \to \neg p$	$(p \to \neg p) \to \neg p$
V	F	F	V
F	V	V	V

– Reductio$_2$: les inférences du type $\dfrac{\begin{array}{c} p \to q \\ p \to \neg q \end{array}}{\neg p}$ sont valides si et seulement si

$$\models ((p \to q) \land (p \to \neg q)) \to \neg p$$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$p \to \neg q$	$(p \to q) \land (p \to \neg q)$	$\neg p$	$((p \to q) \land (p \to \neg q)) \to \neg p$
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V

(d) Simplification : les inférences du type $\dfrac{p \land q}{p}$ sont valides si et seulement si

$$\models (p \land q) \to p$$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	q	$p \land q$	$(p \land q) \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

(e) Ex Falso Quodlibet : les inférences du type $\dfrac{\neg p}{p \to q}$ sont valides si et seulement si

$$\models \neg p \to (p \to q)$$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \to (p \to q)$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

(f) Verum Sequitur ad Quodlibet : les inférences du type $\dfrac{q}{p \to q}$ sont valides si et seulement si

$$\models q \to (p \to q)$$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	q	$p \to q$	$q \to (p \to q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V

(g) Modus ponendo ponens : les inférences du type $\dfrac{\begin{array}{c} p \to q \\ p \end{array}}{q}$ sont valides si et seulement si

$$\models ((p \to q) \wedge p) \to q$$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

(h) Modus tollendo tollens : les inférences du type $\dfrac{\begin{array}{c} p \to q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$ sont valides si et seulement si

$$\models ((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

(i) Modus tollendo ponens (= syllogisme disjonctif) : les inférences du type $\dfrac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg q \end{array}}{p}$ sont valides si et seulement si

$$\models ((p \vee q) \wedge \neg q) \to p$$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$(p \vee q) \wedge \neg q$	$((p \vee q) \wedge \neg q) \to p$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V

(j) Modus ponendo tollens : les inférences du type $\dfrac{\begin{array}{c} p \mid q \\ p \end{array}}{\neg q}$ sont valides si et seulement si

$$\models ((p \mid q) \wedge p) \to \neg q$$

Nous démontrons ceci ainsi :

p	q	$p \mid q$	$(p \mid q) \wedge p$	$\neg q$	$((p \mid q) \wedge p) \rightarrow \neg q$
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V

5. **Question** (3 points) Qu'est-ce qu'une tautologie ? Une contradiction ? Indiquez quels rapports simples il y a entre tautologies, contradictions et la négation.
   Solution
   (a) (1 point) Une tautologie est une phrase qui est logiquement vraie, c'est-à-dire qui est vraie peu importent les valeurs de vérité attribuées à ses constituantes propositionnelles.
   (b) Alternativement : Une tautologie est une phrase qui est une conséquence logique de n'importe quelle proposition.
   (c) (1 point) Une contradiction est une phrase qui est logiquement fausse, c'est-à-dire qui est fausse peu importent les valeurs de vérité attribuées à ses constituantes propositionnelles.
   (d) Alternativement : Une contradiction est une phrase qui a n'importe quelle phrase comme conséquence logique.
   (e) (1 point) La négation d'une tautologie est une contradiction. La négation d'une contradiction est une tautologie.

17.4 La méthode axiomatique

1. **Question** (3 points) Insérez les concepts suivants dans une colonne du tableau : "formule bien formée", "tautologie", "validité" (la conclusion ne peut pas être fausse si les prémisses sont vraies), "règle d'inférence", "vérité", "actes de parole" (question, promesse, ordre etc.), "la différence entre "et" et "mais"", "vouloir dire" (comme dans "qu'a-t-il voulu dire en secouant la tête ?), "axiome", "preuve", "conséquence (sémantique)", "contexte".
   Solution

syntaxe	sémantique	pragmatique
"formule bien formée"	"tautologie"	"actes de parole"
"règle d'inférence"	"validité"	""et"/"mais""
"axiome"	"vérité"	"vouloir dire"
"preuve"	"conséquence (sémantique)"	"contexte"

   "Vouloir dire" est un cas limite, puisqu'on peut l'utiliser aussi pour dire 'signifier' – ce qui en ferait une notion sémantique. Le même problème se pose pour "la différence entre "et" et "mais"" : à part des différences pragmatiques, il y a aussi des différences syntaxiques : le premier mot contient deux lettres, le deuxième quatre.
2. **Question** (2 points) Aristote, dans la *Métaphysique* Λ 9 dit :

   > Soit l'intelligence divine pense, soit elle ne pense rien. Or si elle ne pense rien, elle est dans un état semblable au sommeil, mais c'est là chose contraire à sa dignité. Par ailleurs, si elle pense, alors soit elle se pense elle-même, soit elle pense quelque autre chose. Mais il est absurde qu'autre chose soit objet de sa pensée. Donc elle pense, et elle se pense elle-même.

   Formalisez les quatre premières phrases à l'aide de quatre phrases simples, de manière à ce que la dernière phrase s'ensuive des quatre prémisses. Vous avez le droit d'utiliser les inférences dont vous avez démontrées la validité en réponse à la quatrième question de la troisième série d'exercices.

Solution

(a) Formalisons l'argument ainsi (1 point) :

Soit l'intelligence divine pense, soit elle ne pense rien.	$p \vee \neg p$
Or si elle ne pense rien, elle est dans un état semblable au sommeil,	$\neg p \rightarrow q$
mais c'est là chose contraire à sa dignité.	$\neg q$
Par ailleurs, si elle pense, alors ou elle se pense elle-même, ou elle pense quelque autre chose.	$p \rightarrow (r \vee s)$
Mais il est absurde qu'autre chose soit objet de sa pensée.	$\neg s$
Donc elle pense, et elle se pense elle-même.	$p \wedge r$

(b) On a donc l'argument suivant :

(A1)	$p \vee \neg p$
(A2)	$\neg p \rightarrow q$
(A3)	$\neg q$
(A4)	$p \rightarrow (r \vee s)$
(A5)	$\neg s$
(A6)	$p \wedge r$

(c) (1 point)

i. Par des règles d'inférence (déduction naturelle, à discuter plus tard) :

1	$\vdash p \vee \neg p$	tautologie
2	$\vdash \neg p \rightarrow q$	prémisse
3	$\vdash \neg q$	prémisse
4	$\vdash \neg\neg p$	MT (modus tollens) de (2) et (3)
5	$\vdash p$	DN (élimination de la double négation) de (4)
6	$\vdash p \rightarrow (r \vee s)$	prémisse
7	$\vdash \neg s$	prémisse
8	$\vdash r \vee s$	MP (modus ponens) de (6) et (5)
9	$\vdash r$	SD (syllogisme disjonctif) de (7) et (8)
10	$\vdash p \wedge r$	$\wedge$**I** (introduction de la conjonction) de (5) et (9)

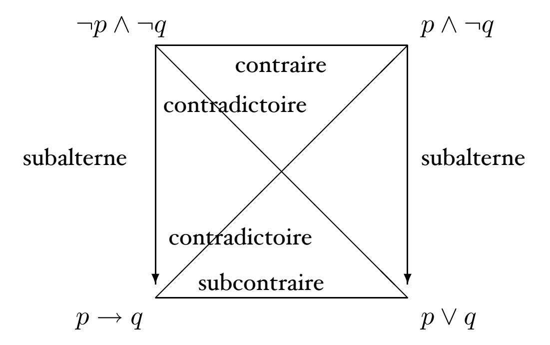
ii. À l'aide d'une table de vérité :

p	q	r	s	$r \vee s$	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$p \rightarrow (r \vee s)$	$\neg q$	$\neg s$	$\mathbf{A} := (\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q \wedge (p \rightarrow (r \vee s)) \wedge \neg s$	$p \wedge r$	$\mathbf{A} \rightarrow (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V	V
V	V	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V	F	F	F	F	V
V	V	F	F	F	F	V	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	F	F	V

iii. Par un simple raisonnement : Si, dans la ligne (A1), "$\neg p$" était vraie, alors "q" serait vraie aussi (A2). Mais on sait que "q" n'est pas vraie (A3). Alors "$\neg p$" n'est pas vraie, alors "p" est vraie (A1). Donc "$r \vee s$" est vraie (A4), c'est-à-dire au moins une des phrases "r" et "s" est vraie. Mais "s" n'est pas vraie (A5). Donc "r" doit être vraie. Donc, en somme, "p" et "r" doivent être vraies (A6).

3. **Question** (2 points) Si "ϕ" est un nom pour la phrase "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage" et si ψ est la phrase "J'étudie la logique", quelle est la phrase désignée par $\ulcorner \phi \vee \neg\psi \urcorner$? Quelle est la phrase désignée par ""Je serai heureux et sage" est une conséquence logique de ϕ et de ψ" ?
Solution $\ulcorner \phi \vee \neg\psi \urcorner$ désigne la phrase "Soit si j'étudie la logique, je serai heureux et sage, soit je n'étudie pas la logique" (1 point). ""Je serais heureux et sage" est une conséquence logique de ϕ et de ψ" désigne la phrase ""Je serais heureux et sage" est une conséquence logique de "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage" et de "J'étudie la logique."" (1 point)

4. **Question** (1 point) Montrez que l'ensemble de formules propositionnelles { "$\neg p \wedge \neg q$", "$p \wedge \neg q$", "$p \rightarrow q$", "$p \vee q$" } forme un carré d'opposition.
Solution Nous avons le carré suivant :



Les relations se vérifient ainsi :

(a) Contrariété : Si "p" et "q" sont tous deux faux, alors il n'est pas le cas que "p" est vrai et "q" faux ; et vice versa.
(b) Contradiction : Les phrases suivantes sont vraies : "$\neg p \wedge \neg q \leftrightarrow \neg(p \vee q)$" ; "$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$".
(c) Subalternation : Si "p" et "q" sont faux, alors "$p \rightarrow q$" est vrai. Si "p" est vrai et "q" est faux, alors "$p \vee q$" est vrai.
(d) Subcontrariété : Si "$p \rightarrow q$" est faux, alors "p" est vrai et "q" est faux ; alors "$p \vee q$" est vrai. Si "$p \vee q$" est faux, alors "p" et "q" sont faux ; alors "$p \rightarrow q$" est vrai.

Voici les tables de vérité correspondantes :

(a) Contrariété :

p	q	$\neg p$	$\neg p$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q$	$(\neg p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg p)$	$(\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg p))$
V	V	F	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	V

(b) Contradiction :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)$
V	V	F	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(q \rightarrow p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V

(c) Subalternation :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \rightarrow q$	$(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \vee q$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q)$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V

(d) Subcontrariété :

p	q	$p \rightarrow q$	$p \vee q$	$(p \rightarrow q) \vee (p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

5. **Question** (2 points) Lesquelles des six assertions sont vraies ?

Solution

(a) Il n'est **pas vrai** qu'aucune inférence valide n'a une conclusion fausse. Une inférence qui contient une prémisse fausse peut avoir une conclusion fausse et quand même être valide.

(b) Il n'est **pas vrai** que toute inférence avec une conclusion vraie est valide. Pour que la inférence soit valide, il faut que la vérité des prémisses garantisse la vérité de la conclusion.

(c) Il n'est **pas vrai** que toute inférence valide contient au moins une prémisse. Les vérités logiques (les tautologies) sont les conclusions des inférences sans prémisses.

(d) Il est **vrai** qu'aucune inférence valide n'a toutes ses prémisses vraies et une conclusion fausse. Ceci est le cas exclu par la définition de la validité.

(e) Il n'est **pas vrai** qu'il y a des inférences valides qui n'ont que des prémisses vraies et une conclusion fausse. Ceci est exclu par la vérité de (d) (et donc par la définition de la validité).

(f) Il est **vrai** que toute inférence avec des prémisses contradictoires est valide. Elle est valide à condition que si les prémisses sont vraies, alors la conclusion l'est aussi. Si les prémisses ne peuvent pas être vraies, alors il n'importe peu si la conclusion l'est.

6. **Question** (2 points) Considérez le connecteur binaire "$\downarrow$" définit ainsi :

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

On voit donc que "$p \downarrow q$" est équivalent à "$\neg\phi \wedge \neg\psi$". Montrez de quelle manière il est possible d'ajouter ce connecteur à $\mathcal{L}$ et comment, dans ce nouveau langage, on peut définir "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$" et "$\leftrightarrow$" en termes de "$\downarrow$" (utilisez les lois de Morgan !).

Solution Ajoutons $\downarrow$ à notre langue de la manière suivante.

Définition 92. *Nous construisons une langue $\mathcal{L}^{\#}$ en ajoutant à la définition de l'alphabet la clause*

– *"$\downarrow$" ("ni ... ni $\cdots$")*

et en ajoutant à la définition des formules bien formées la clause

– *Si ϕ et ψ sont des formules propositionnelles, alors $\ulcorner(\phi \downarrow \psi)\urcorner$ est une formule propositionnelle.*

Dans $\mathcal{L}^{\#}$, tous les autres connecteurs sont définissables à partir de "$\downarrow$" :

$$\begin{array}{rcl} \neg\phi & :\Longleftrightarrow & \phi \downarrow \phi \\ \phi \vee \psi & \Longleftrightarrow & (\phi \downarrow \psi) \downarrow (\phi \downarrow \psi) \\ \phi \wedge \psi & :\Longleftrightarrow & \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \\ \phi \to \psi & :\Longleftrightarrow & \neg\phi \vee \psi \\ \phi \leftrightarrow \psi & \Longleftrightarrow & (\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi) \end{array}$$

On pourrait donner les équivalents des trois dernières lignes en utilisent que "$\downarrow$" mais cela serait plus compliqué. Voici les solutions plus élégantes :

$$\begin{array}{rcl} \phi \wedge \psi & :\Longleftrightarrow & ((\phi \downarrow \phi) \downarrow (\psi \downarrow \psi)) \\ \phi \to \psi & :\Longleftrightarrow & \phi \downarrow (\psi \downarrow \psi) \\ \phi \leftrightarrow \psi & :\Longleftrightarrow & ((\phi \downarrow \phi) \downarrow \psi) \downarrow (\phi \downarrow (\psi \downarrow \psi)) \end{array}$$

7. **Question** (8] Montrez que les phrases données sont des théorèmes de HC.
Solution
(a) La première dérivation se fait ainsi (2 points) :

(1)	HC $\vdash (p \wedge q) \to q$	$\mathbf{H_9}$
(2)	HC $\vdash (p \wedge q) \to p$	$\mathbf{H_8}$
(3)	HC $\vdash ((p \wedge q) \to q) \to (((p \wedge q) \to p) \to ((p \wedge q) \to (q \wedge p)))$	$\mathbf{H_{10}}$
(4)	HC $\vdash ((p \wedge q) \to p) \to ((p \wedge q) \to (q \wedge p))$	(MP) de (1) et (3)
(5)	HC $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge p)$	(MP) de (2) et (4)

(b) La deuxième dérivation se fait ainsi (2 points) :

(1)	HC $\vdash ((p \wedge q) \to p) \to (p \to (q \to p))$	$\mathbf{H_3}$
(2)	HC $\vdash (p \wedge q) \to p$	$\mathbf{H_8}$
(3)	HC $\vdash p \to (q \to p)$	(MP) de (1) et (2)

(c) La troisième dérivation se fait ainsi (2 points) :

(1)	HC $\vdash p \to (\neg p \to q)$	$\mathbf{H_{12}}$
(2)	HC $\vdash ((q \wedge \neg p) \to q) \to (q \to (\neg p \to q))$	$\mathbf{H_3}$
(3)	HC $\vdash (q \wedge \neg p) \to q$	$\mathbf{H_8}$
(4)	HC $\vdash q \to (\neg p \to q)$	(MP) de (2) et (3)
(5)	HC $\vdash (p \to (\neg p \to q)) \to ((q \to (\neg p \to q)) \to ((p \vee q) \to (\neg p \to q)))$	$\mathbf{H_7}$
(6)	HC $\vdash (q \to (\neg p \to q)) \to ((p \vee q) \to (\neg p \to q))$	(MP) de (1) et (5)
(7)	HC $\vdash (p \vee q) \to (\neg p \to q)$	(MP) de (4) et (6)

Une autre possibilité est de réutiliser le résultat de (b) (cf. la leçon 4 sur les instances de substitutions) :

(1)	HC $\vdash p \to (\neg p \to q)$	$\mathbf{H_{12}}$
(2)	HC $\vdash q \to (\neg p \to q)$	instance de substitution de (b)
(3)	HC $\vdash (p \to (\neg p \to q)) \to ((q \to (\neg p \to q)) \to ((p \vee q) \to (\neg p \to q)))$	$\mathbf{H_7}$
(4)	HC $\vdash (q \to (\neg p \to q)) \to ((p \vee q) \to (\neg p \to q))$	(MP) de (1) et (3)
(5)	HC $\vdash (p \vee q) \to (\neg p \to q)$	(MP) de (2) et (4)

(d) La quatrième dérivation se fait ainsi (2 points) :

(1)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \rightarrow p$	$\mathbf{H_8}$
(2)	$\mathsf{HC} \vdash p \rightarrow (p \vee r)$	$\mathbf{H_5}$
(3)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge q) \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)))$	$\mathbf{H_2}$
(4)	$\mathsf{HC} \vdash (p \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow (p \vee r))$	(MP) de (1) et (3)
(5)	$\mathsf{HC} \vdash (p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$	(MP) de (2) et (4)
(6)	$\mathsf{HC} \vdash ((p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee r)))$	$\mathbf{H_3}$
(7)	$\mathsf{HC} \vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee r))$	(MP) de (5) et (6)

17.5 La méthode des arbres

1. **Question** (2 points) Rappelons-nous des définitions formelles de la tautologie et de la contradiction et définissons une phrase satisfaisable comme suit

   Définition 93. *Une formule propositionnelle ϕ est satisfaisable si et seulement si elle est vraie sous au moins une interprétation.*

   Solution

   (a) (1 point :) Voici comment on montre qu'une formule propositionnelle ϕ est une tautologie si et seulement si $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est pas satisfaisable :

   $\Longrightarrow$ Si ϕ est une tautologie, alors ϕ est vraie sous toutes les interprétations. Si ϕ est vraie sous une interprétation, alors $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est fausse sous cette interprétation. Alors : si ϕ est vraie sous toutes les interprétations, alors $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est fausse sous toutes les interprétations. Alors il n'y a pas d'interprétation telle que $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ soit vraie sous cette interprétation. Donc $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est pas satisfaisable.

   $\Longleftarrow$ Si $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est pas satisfaisable, alors il n'y a pas d'interprétation telle que $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ ne soit vraie sous cette interprétation. Alors $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ est fausse sous toutes les interprétations, alors ϕ est vraie sous toutes les interprétations. Alors ϕ est une tautologie.

   Formellement :

   $$\begin{array}{lll} \phi \text{ est une tautologie} & \Longleftrightarrow & \forall I(I(\phi) = \mathbf{v}) \\ & \Longleftrightarrow & \sim \exists I \sim (I(\phi) = \mathbf{v}) \\ & \Longleftrightarrow & \sim \exists I \sim (I(\ulcorner\neg\phi\urcorner) = \mathbf{f}) \\ & \Longleftrightarrow & \sim \exists I(I(\ulcorner\neg\phi\urcorner) = \mathbf{v}) \\ & \Longleftrightarrow & \sim (\phi \text{ est satisfaisable}) \end{array}$$

   (b) Pour montrer qu'une formule propositionnelle ϕ est satisfaisable si et seulement si $\ulcorner\neg\phi\urcorner$ n'est pas une tautologie, on procède de manière analogue à (b), ou on dit simplement :

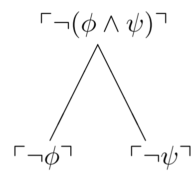
   $$\begin{array}{lll} \phi \text{ est satisfaisable} & \Longleftrightarrow & \exists I(I(\phi) = \mathbf{v}) \\ & \Longleftrightarrow & \sim \forall I \sim (I(\phi) = \mathbf{v}) \\ & \Longleftrightarrow & \sim \forall I(I(\phi) = \mathbf{f}) \\ & \Longleftrightarrow & \sim \forall I(I(\ulcorner\neg\phi\urcorner) = \mathbf{v}) \\ & \Longleftrightarrow & \sim (\ulcorner\neg\phi\urcorner \text{ est une tautologie}) \end{array}$$

2. **Question** (2 points) Formulez des règles de transformation d'arbres pour la barre de Sheffer et justifiez intuitivement leur validité.

   Solution Rappelons-nous que la table de vérité de la barre de Sheffer est la suivante :

p	q	$p\|q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Nous voyons donc que "$p|q$" est équivalent (sémantiquement) à "$\neg(p \wedge q)$". L'arbre de $\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner$ est le suivant :



Nous avons donc comme règles de transformation pour $\ulcorner\phi|\psi\urcorner$ et pour $\ulcorner\neg\phi|\psi\urcorner$:



3. **Question** (2 points) Montrez de quelle manière définir "$\wedge$", "$\rightarrow$" et "$\leftrightarrow$" en termes de "$\vee$" et de "$\neg$".

Solution

$$\begin{array}{rcl}
\phi \wedge \psi & :\Longleftrightarrow & \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \\
\phi \rightarrow \psi & :\Longleftrightarrow & \neg(\phi \wedge \neg\psi) \\
\text{ou :} & :\Longleftrightarrow & \neg\phi \vee \psi \\
\phi \leftrightarrow \psi & :\Longleftrightarrow & \neg(\phi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\phi \wedge \psi) \\
\text{ou :} & :\Longleftrightarrow & \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \vee \neg(\phi \vee \psi) \\
\text{ou :} & :\Longleftrightarrow & \neg(\neg(\neg\phi \vee \psi) \vee \neg(\phi \vee \neg\psi))
\end{array}$$

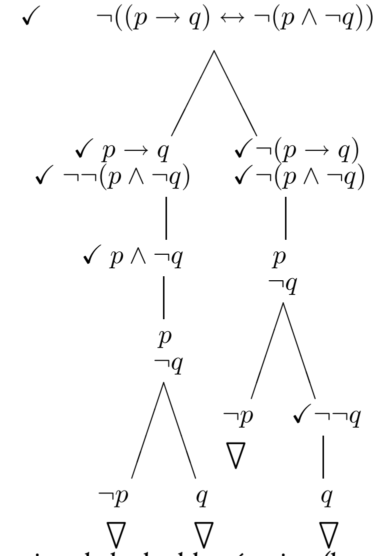
4. **Question** (4 points) A l'aide de la méthode des arbres, vérifiez si les phrases données peuvent être prouvées.

Solution Prouver une phrase par la méthode des arbres revient à faire un arbre de la négation qui n'a que de branches fermées.

(a) Un arbre pour "$p \rightarrow \neg\neg p$" (1 point) :

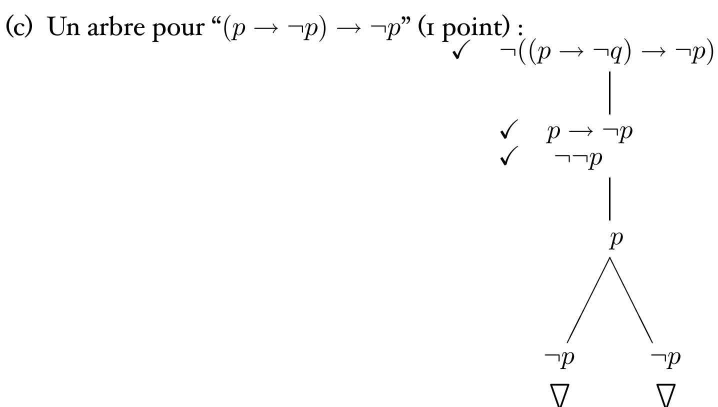
✓ $\neg(p \rightarrow \neg\neg p)$
|
p
✓ $\neg\neg\neg p$
|
$\neg p$
∇

(b) Un arbre pour "$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$" (1 point) :

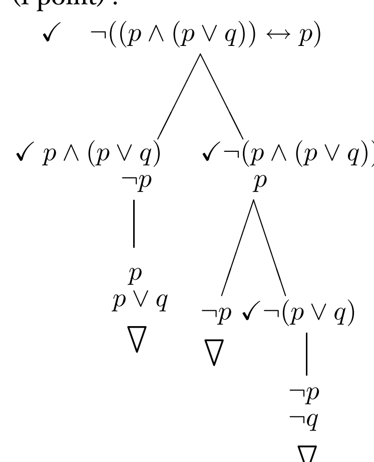


Strictement parlant, l'élimination de la double négation (la transformation de "$\neg\neg p$" en "p") n'est pas nécessaire.

(c) Un arbre pour "$(p \to \neg p) \to \neg p$" (1 point) :



(d) Un arbre pour "$(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$" (1 point) :



5. (6 points) Soit "A" le nom d'une inférence :
   (a) Si toutes ses prémisses sont vraies et sa conclusion l'est aussi, **on ne peut rien conclure**

sur la validité de A : quelques-unes sont valides, mais "Socrate est un homme ; donc Socrate est un philosophe", par exemple, ne l'est pas.

(b) Si toutes ses prémisses sont vraies mais sa conclusion fausse, **on peut conclure** que A est non valide : il n'est donc pas logiquement impossible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse.

(c) Si au moins une de ses prémisses est fausse et sa conclusion vraie, **on ne peut rien conclure** sur la validité de A : "Socrate est un romain ; tous les romains sont mortels ; donc Socrate est mortel" est valide, mais "Socrate est un romain ; tous les romains sont mortels ; donc Socrate est un philosophe" ne l'est pas.

(d) Si au moins une de ses prémisses est fausse et sa conclusion fausse, **on ne peut rien conclure** sur la validité de A : "Socrate est un romain ; tous les romains sont immortels ; donc Socrate est immortel" est valide, mais "Socrate est un romain ; tous les romains sont immortels ; donc Socrate n'est pas un philosophe" ne l'est pas.

(e) Si ses prémisses sont consistantes avec sa conclusion, A **peut** être non valide : "Socrate est un homme ; donc Socrate est philosophe", par exemple, n'est pas valide.

(f) Si ses prémisses sont inconsistantes et sa conclusion fausse, A **ne peut pas** être non valide, parce qu'il est logiquement impossible que ses prémisses soient vraies et sa conclusion fausse.

(g) Si la prémisse est une vérité logique et sa conclusion vraie, A **peut** être non valide : "Socrate dors ou il ne dors pas ; donc il est un philosophe", par exemple, n'est pas valide.

(h) Si ses prémisses sont consistantes entre elles, mais sa conclusion fausse, A **peut** être valide : "Socrate est un philosophe ; tous les philosophes sont romains ; donc Socrate est romain" par exemple, est valide et sa première prémisse est consistante avec sa deuxième prémisse.

(i) Si sa conclusion est inconsistante avec ses prémisses, A **peut** être valide, à savoir dans le cas où ses prémisses sont déjà inconsistantes entre elles : "Socrate est philosophe ; Socrate n'est pas philosophe ; donc Socrate n'est pas philosophe", par exemple, est valide.

(j) Si sa conclusion est inconsistante avec ses prémisses, mais ses prémisses consistantes entre elles, A **ne peut pas** être valide. Supposons le contraire : alors il serait possible que ses prémisses soient vraies (puisqu'elles sont consistantes entre elles) ; mais si l'inférence est valide, il s'ensuit alors que sa conclusion est vraie ; il est donc possible que ses prémisses *et* sa conclusion soient vraies ; mais alors elles ne sont pas inconsistantes.

(k) Si la négation de sa conclusion est consistante avec l'une de ses prémisses, A **peut** être valide : "Xanthippe est une femme ; toutes les femmes sont mortelles ; donc Xanthippe est mortelle" est valide, même si "Xanthippe n'est pas mortelle" est consistante avec "Xanthippe est une femme".

(l) Si la négation de sa conclusion est inconsistante avec la négation d'une de ses prémisses, A **peut** être valide : "Xanthippe dort et ne dort pas ; donc Xanthippe dort ou elle ne dort pas" est valide, même si la négation de sa conclusion est elle-même inconsistante, et donc inconsistante avec la négation de la prémisse. Un autre exemple est "Socrate n'est pas un philosophe mortel ; Socrate est un homme ; tous les hommes sont mortels ; donc Socrate est mortel" – l'inférence est valide, même si "Socrate n'est pas mortel" est inconsistant avec "Socrate est un philosophe mortel".

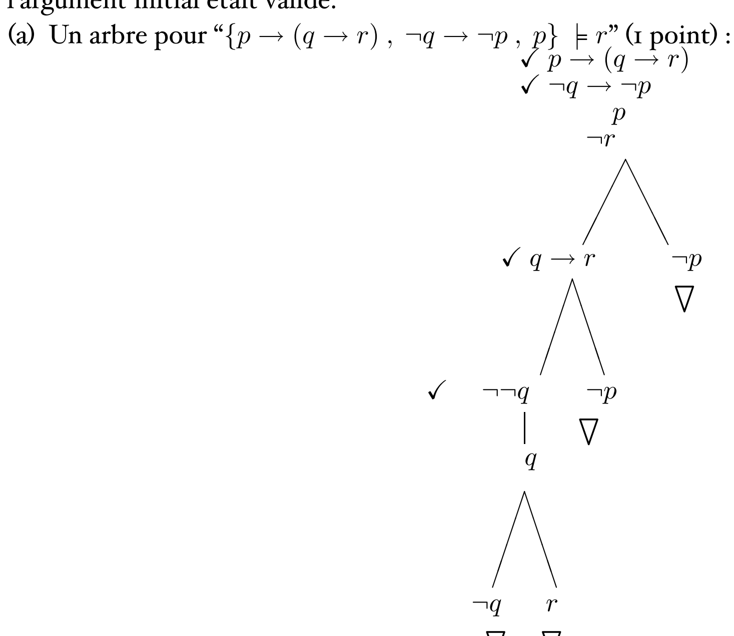
(m) Si la négation de sa conclusion est inconsistante avec la négation d'une de ses prémisses, et si A ne serait pas valide sans cette prémisse, A **ne peut pas** être valide. Supposons le contraire : (i) que l'argument "p ; q ; donc r" est valide, (ii) que "q ; donc r" est non valide et (iii) que "$\neg r$" est inconsistante avec "$\neg p$". Si (ii) est vrai, alors "q" est consistant avec "$\neg r$". Mais alors { "p", "q", "$\neg r$" } ou { "$\neg p$", "q", "$\neg r$" } doit être consistant. Mais si (iii) est vrai, alors { "$\neg p$", "$\neg r$" } est inconsistant, alors { "$\neg p$", "q", "$\neg r$" } l'est aussi. Donc { "p", "q", "$\neg r$" } doit être consistant. Mais ceci veut dire que l'argument "p ; q ; donc r" n'était pas valide ($\neg$(i)). On a dérivé une contradiction de (i), (ii) et (iii). Alors la supposition était fausse ; alors

A ne peut pas être valide.

6. **Question** (4 points) A l'aide de la méthode des arbres, déterminez les valeurs de vérité des phrases données.

   Solution Vérifier si les arguments donnés sont valides (si leurs conclusions sont des conséquences sémantiques de leurs prémisses) revient à déterminer si ses prémisses sont consistantes avec la négation de leur conclusion. Pour tester si "$\{p, q, r\} \models s$" est vrai, c'est-à-dire si "s" est une conséquence sémantique de "p", "q" et "r", il faut faire l'arbre pour la négation de l'implication correspondante "$\neg((p \wedge q \wedge r) \rightarrow s)$", c'est-à-dire l'arbre pour la conjonction "$p \wedge q \wedge r \wedge (\neg s)$". Si une des branches de cet arbre reste ouverte, il y a une possibilité logique que la conjonction des prémisses et de la négation de sa conclusion soit vraie et alors l'argument n'est pas valide. Si, au contraire, toutes les branches se ferment, alors il n'y a pas de telle possibilité logique et l'argument initial était valide.

   (a) Un arbre pour "$\{p \rightarrow (q \rightarrow r)\ ,\ \neg q \rightarrow \neg p\ ,\ p\} \models r$" (1 point) :



   On voit que toutes les branches se ferment : l'argument était valide, la phrase initiale était vraie.

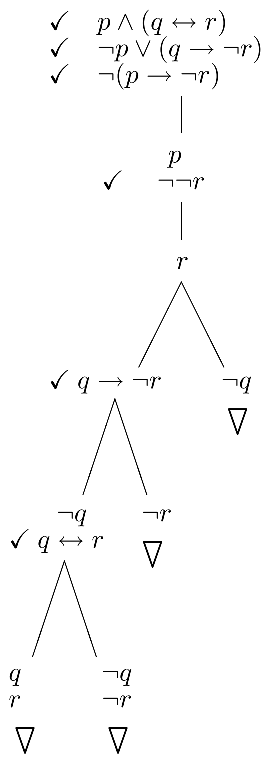
   (b) Un arbre pour "$\{(p \leftrightarrow \neg q) \wedge q\ ,\ (q \vee ((r \rightarrow p) \wedge r)) \rightarrow \neg p\}\ \models q \rightarrow \neg p$" (1 point) :

$$
\begin{array}{ll}
\checkmark & (p \leftrightarrow \neg q) \wedge q \\
 & (q \vee ((r \rightarrow p) \wedge r)) \rightarrow \neg p \\
\checkmark & \neg(q \rightarrow \neg p)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
| \\
q \\
\checkmark \;\; \neg\neg p \\
| \\
p \\
| \\
\checkmark \;\; p \leftrightarrow \neg q \\
q \\
\diagup \qquad \diagdown \\
\begin{array}{cc}
p & \neg p \\
\neg q & \neg\neg q \\
\nabla & \nabla
\end{array}
\end{array}
$$

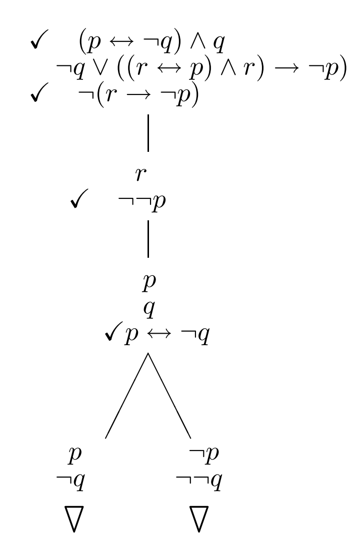
Toutes les branches se ferment – l'inférence est valide, et nous n'avons même pas utilisé la deuxième prémisse. Strictement parlant, l'élimination de la double négation (la transformation de ‘$\neg\neg p$” en “`p) n'est pas nécessaire.

(c) Un arbre pour “$\{p \wedge (q \leftrightarrow r)\ ,\ \neg p \vee (q \rightarrow \neg r)\} \models p \rightarrow \neg r$” (1 point) :



Toutes les branches se ferment ; l'inférence est valide.

(d) Un arbre pour “$\{(p \leftrightarrow \neg q) \wedge q\ ,\ (\neg q \vee ((r \leftrightarrow p) \wedge r)) \rightarrow \neg p\} \models r \rightarrow \neg p$” (1 point) :



Toutes les branches se ferment même sans utiliser la deuxième prémisse ; l'inférence est valide. Strictement parlant, l'élimination de la double négation (la transformation de '$\neg\neg p$" en "`p) n'est pas nécessaire.

17.6 La déduction naturelle

1. **Question** (16 points) Démontrez les séquents donnés en utilisant les règles d'inférence de la déduction naturelle.
Solution En principe, l'utilisation des 'règles dérivées' comme la conversion ($p \to q \vdash \neg q \to \neg p$) et le syllogisme disjonctif ($p \vee q, \neg p \vdash q$) n'est pas permise dans la preuve de ces séquents. En pratique, l'utilisation de la conversion correspond souvent à celle de MT à la place de MP, et celle du syllogisme disjonctif à un cas spécial de $\vee$**E** (cf. leçon 6).
(a)

1	$p \to (p \to q), p$	$\vdash$	$p \to (p \to q)$	prémisse
2	$p \to (p \to q), p$	$\vdash$	p	prémisse
3	$p \to (p \to q), p$	$\vdash$	$p \to q$	de (1) et (2) par (MP)
4	$p \to (p \to q), p$	$\vdash$	q	de (2) et (3) par (MP)

(b)

1	$\neg\neg q \to p, \neg p$	$\vdash$	$\neg\neg q \to p$	prémisse
2	$\neg\neg q \to p, \neg p$	$\vdash$	$\neg p$	prémisse
3	$\neg\neg q \to p, \neg p$	$\vdash$	$\neg\neg\neg q$	de (1) et (2) par (MT)
4	$\neg\neg q \to p, \neg p$	$\vdash$	$\neg q$	de (3) par (DN)

DN ne s'applique que si "$\neg$" est le connecteur principal : je ne peux donc pas passer de (1) à "$q \to p$" par DN.

(c)

1	$\neg p \to q$	$\vdash$	$\neg p \to q$	prémisse
2	$\neg p \to q, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition
3	$\neg p \to q, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg\neg p$	de (1) et (2) par (MT)
4	$\neg p \to q, \neg q$	$\vdash^*$	p	de (3) par (DN)
5	$\neg p \to q$	$\vdash$	$\neg q \to p$	de (2) et (4) par (PC)

(d)

1	$p \to (q \to r)$	$\vdash$	$p \to (q \to r)$	prémisse
2	$p \to (q \to r), p \to q$	$\vdash^*$	$p \to q$	supposition
3	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash^*$	$(q \to r)$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash^*$	q	de (2) et (3) par (MP)
6	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash^*$	r	de (4) et (5) par (MP)
7	$p \to (q \to r), p \to q$	$\vdash^*$	$p \to r$	de (4) et (6) par (PC)
8	$p \to (q \to r)$	$\vdash$	$(p \to q) \to (p \to r)$	de (2) et (7) par (PC)

(e)

1	p	$\vdash$	p	prémisse
2	$p, \neg(q \to r) \to \neg p$	$\vdash^*$	$\neg(q \to r) \to \neg p$	supposition
3	$p, \neg(q \to r) \to \neg p$	$\vdash^*$	$\neg\neg p$	de (1) par (DN)
4	$p, \neg(q \to r) \to \neg p$	$\vdash^*$	$\neg\neg(q \to r)$	de (2) et (3) par (MT)
5	$p, \neg(q \to r) \to \neg p$	$\vdash^*$	$q \to r$	de (4) par (DN)
6	$p, \neg(q \to r) \to \neg p, \neg r$	$\vdash^*$	$\neg r$	supposition
7	$p, \neg(q \to r) \to \neg p, \neg r$	$\vdash^*$	$\neg q$	de (5) et (6) par (MT)
8	$p, \neg(q \to r) \to \neg p$	$\vdash^*$	$\neg r \to \neg q$	de (6) et (7) par (PC)
9	p	$\vdash$	$(\neg(q \to r) \to \neg p) \to (\neg r \to \neg q)$	de (2) et (8) par (PC)

(f)

1	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	$\vdash$	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	prémisse
2	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	$\vdash$	$p \to q$	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	$\vdash$	$p \to r$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$(p \to q) \wedge (p \to r), p$	$\vdash^*$	p	supposition
5	$(p \to q) \wedge (p \to r), p$	$\vdash^*$	q	de (2) et (4) par (MP)
6	$(p \to q) \wedge (p \to r), p$	$\vdash^*$	r	de (3) et (4) par (MP)
7	$(p \to q) \wedge (p \to r), p$	$\vdash^*$	$q \wedge r$	de (5) et (6) par ($\wedge$**I**)
8	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	$\vdash$	$p \to (q \wedge r)$	de (4) et (7) par (PC)

(g)

1	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	$\vdash$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	prémisse
2	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	$\vdash$	$p \to r$	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	$\vdash$	$q \to r$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$(p \to r) \wedge (q \to r), p \vee q$	$\vdash^*$	$p \vee q$	supposition
5	$(p \to r) \wedge (q \to r), p \vee q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
6	$(p \to r) \wedge (q \to r), p \vee q, p$	$\vdash^*$	r	de (5) et (2) par (MP)
7	$(p \to r) \wedge (q \to r), p \vee q, p, q$	$\vdash^*$	q	supposition
8	$(p \to r) \wedge (q \to r), p \vee q, p, q$	$\vdash^*$	r	de (3) et (7) par (MP)
9	$(p \to r) \wedge (q \to r), p \vee q$	$\vdash^*$	r	de (4, 5, 6, 7, 8) par ($\vee$**E**)
10	$(p \to r) \wedge (q \to r)$	$\vdash$	$(p \vee q) \to r$	de (4) et (9) par (PC)

Pour pouvoir inférer (10) avec PC, je dois avoir supposé "$p \vee q$".

(h)

1	$\neg p \to p$	$\vdash$	$\neg p \to p$	prémisse
2	$\neg p \to p, \neg p$	$\vdash^*$	$\neg p$	supposition
3	$\neg p \to p, \neg p$	$\vdash^*$	p	de (1) et (2) par (MP)
4	$\neg p \to p$	$\vdash$	$\neg\neg p$	de (2), (2) et (3) par (RAA)
5	$\neg p \to p$	$\vdash$	p	de (4) par (DN)

(i)

1	$p \vee q$	$\vdash$	$p \vee q$	prémisse
2	$p \vee q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$p \vee q, p$	$\vdash^*$	$q \vee p$	de (2) par ($\vee$**I**)
4	$p \vee q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
5	$p \vee q, q$	$\vdash^*$	$q \vee p$	de (3) par ($\vee$**I**)
6	$p \vee q$	$\vdash$	$q \vee p$	de (1, 2, 3, 4, 5) par ($\vee$**E**)

(j)

1	$p \to q, \neg p \to q$	$\vdash$	$p \to q$	prémisse
2	$p \to q, \neg p \to q$	$\vdash$	$\neg p \to q$	prémisse
3	$p \to q, \neg p \to q, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition
4	$p \to q, \neg p \to q, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg p$	de (1) et (3) par (MT)
5	$p \to q, \neg p \to q, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg\neg p$	de (2) et (3) par (MT)
6	$p \to q, \neg p \to q, \neg q$	$\vdash^*$	p	de (5) par (DN)
7	$p \to q, \neg p \to q$	$\vdash$	$\neg\neg q$	de (3),(4) et (6) par (RAA)
8	$p \to q, \neg p \to q$	$\vdash$	q	de (7) par (DN)

(k)

1	$p \wedge q, q \to r$	$\vdash$	$p \wedge q$	prémisse
2	$p \wedge q, q \to r$	$\vdash$	$q \to r$	prémisse
3	$p \wedge q, q \to r$	$\vdash$	q	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$p \wedge q, q \to r$	$\vdash$	r	de (2) et (3) par (MP)
5	$p \wedge q, q \to r$	$\vdash$	$r \vee s$	de (4) par ($\vee$**I**)

(l)

1	$\neg\neg p, p \rightarrow q$	$\vdash$	$\neg\neg p$	prémisse
2	$\neg\neg p, p \rightarrow q$	$\vdash$	$p \rightarrow q$	prémisse
3	$\neg\neg p, p \rightarrow q$	$\vdash$	p	de (2) par (DN)
4	$\neg\neg p, p \rightarrow q$	$\vdash$	q	de (1) et (3) par (MP)

(m)

1	$\neg(p \rightarrow q)$	$\vdash$	$\neg(p \rightarrow q)$	prémisse
2	$\neg(p \rightarrow q), p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$\neg(p \rightarrow q), p, q$	$\vdash^*$	q	supposition
4	$\neg(p \rightarrow q), p, q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
5	$\neg(p \rightarrow q), p, q$	$\vdash^*$	$p \rightarrow q$	de (3) et (4) par (PC)
6	$\neg(p \rightarrow q), p$	$\vdash^*$	$\neg q$	de (2), (1) et (5) par (RAA)
7	$\neg(p \rightarrow q)$	$\vdash$	$p \rightarrow \neg q$	de (2) et (6) par (PC)

Certains on fait ici l'erreur de conclure, à partir de $\neg(p \rightarrow q)$ et de p que $\neg q$ par (MP). Cette application n'est par permise parce que "$\rightarrow$" n'est pas le connecteur principal de la première formule.

(n)

1	$q \rightarrow r$	$\vdash$	$q \rightarrow r$	prémisse
2	$q \rightarrow r, p \vee q$	$\vdash^*$	$p \vee q$	supposition
3	$q \rightarrow r, p \vee q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$q \rightarrow r, p \vee q, p$	$\vdash^*$	$p \vee r$	de (3) par ($\vee$**I**)
5	$q \rightarrow r, p \vee q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
6	$q \rightarrow r, p \vee q, q$	$\vdash^*$	r	de (1) et (5) par (MP)
7	$q \rightarrow r, p \vee q, q$	$\vdash^*$	$p \vee r$	de (6) par ($\vee$**I**)
8	$q \rightarrow r, p \vee q$	$\vdash^*$	$p \vee r$	de (2, 3, 4, 5, 7) par ($\vee$**E**)
9	$q \rightarrow r$	$\vdash$	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	de (2) et (8) par (PC)

Pour pouvoir inférer (9) avec PC, je dois avoir supposé "$p \vee q$".

(o)

1	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash$	$\neg(p \vee \neg p)$	supposition
2	$\neg(p \vee \neg p), p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$\neg(p \vee \neg p), p$	$\vdash^*$	$p \vee \neg p$	de (2) par ($\vee$**I**)
4	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash^*$	$\neg p$	de (1), (2) et (3) par (RAA)
5	$\neg(p \vee \neg p), \neg p$	$\vdash^*$	$\neg p$	supposition
6	$\neg(p \vee \neg p), \neg p$	$\vdash^*$	$p \vee \neg p$	de (5) par ($\vee$**I**)
7	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash^*$	$\neg\neg p$	de (1), (5) et (6) par (RAA)
8		$\vdash$	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	de (1), (4) et (7) par (RAA)
9		$\vdash$	$p \vee \neg p$	de (8) par (DN)

Dans cette preuve, j'ai besoin de trois applications de RAA puisqu'il me faut une contradiction de deux phrases qui ne sont sous aucune autre supposition que $\neg(p \vee \neg p)$ afin de conclure, sous aucune supposition, que $\neg\neg(p \vee \neg p)$. Si je le conclurais des lignes (2) et (4), par exemple, je garderais la supposition que p (de la ligne (2)). Il existe une autre preuve qui

ne nécessite que deux applications de RAA :

1	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash$	$\neg(p \vee \neg p)$	supposition
2	$\neg(p \vee \neg p), p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$\neg(p \vee \neg p), p$	$\vdash^*$	$p \vee \neg p$	de (2) par ($\vee$**I**)
4	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash^*$	$\neg p$	de (1), (2) et (3) par (RAA)
5	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash^*$	$p \vee \neg p$	de (4) par ($\vee$**I**)
6		$\vdash$	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	de (1), (1) et (5) par (RAA)
7		$\vdash$	$p \vee \neg p$	de (6) par (DN)

(p)

1	$p \vee q$	$\vdash$	$p \vee q$	prémisse
2	$p \vee q, p \to q$	$\vdash^*$	$p \to q$	supposition
3	$p \vee q, p \to q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$p \vee q, p \to q$	$\vdash^*$	q	de (2) et (3) par (MP)
5	$p \vee q, p \to q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
6	$p \vee q, p \to q$	$\vdash^*$	q	de (1, 3, 4, 5, 5) par ($\vee$**E**)
7	$p \vee q$	$\vdash$	$(p \to q) \to q$	de (2) et (6) par (PC)

2. **Question** (4 points) A l'aide de la méthode des arbres, déterminez si les phrases données peuvent être prouvées.

Solution

(a) "$(p \wedge q \wedge ((q \wedge p) \to r)) \to (q \to r)$" peut être prouvée par la méthode des arbres comme suit :

$$\checkmark \quad \neg((p \wedge q \wedge ((q \wedge p) \to r)) \to (q \to r))$$

$$\checkmark \quad p \wedge q \wedge ((p \wedge q) \to r)$$
$$\checkmark \quad \neg(q \to r)$$

$$p$$
$$q$$
$$\neg r$$
$$\checkmark \quad (p \wedge q) \to r$$

$$\checkmark \ \neg(p \wedge q) \qquad r \ \nabla$$

$$\neg p \ \nabla \qquad \neg q \ \nabla$$

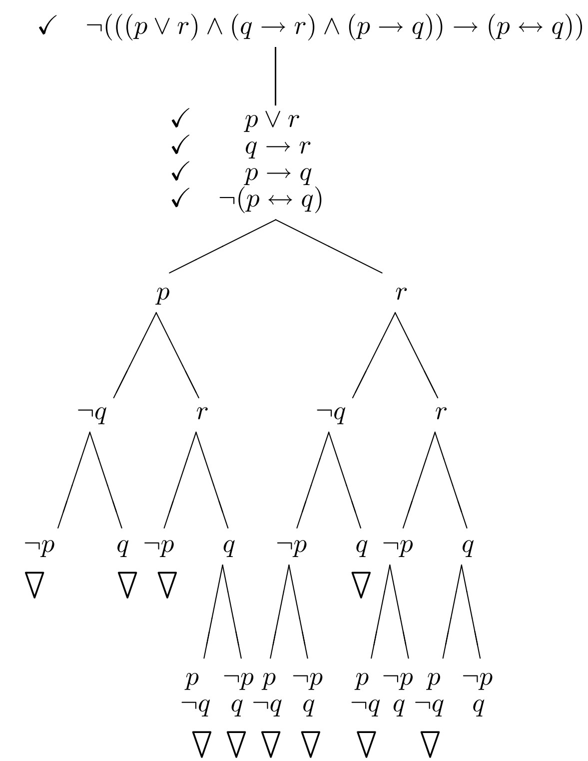
(b) "$p \to (q \to p)$" peut être prouvée par la méthode des arbres comme suit :

$$\checkmark \quad \neg(p \to (q \to p))$$

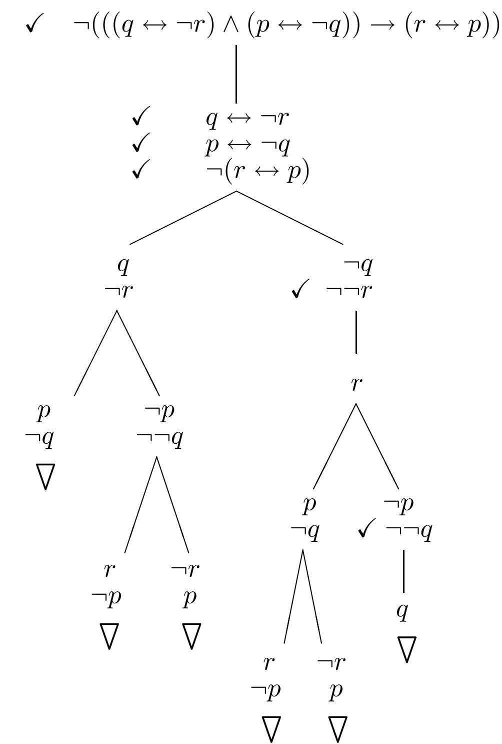
$$p$$
$$\checkmark \quad \neg(q \to p)$$

$$q$$
$$\neg p$$
$$\nabla$$

(c) “$((p \vee r) \wedge (q \to r) \wedge (p \to q)) \to (p \leftrightarrow q)$” ne peut pas être prouvée, puisque deux branches restent ouvertes :



(d) “$((q \leftrightarrow \neg r) \wedge (p \leftrightarrow \neg q)) \to (r \leftrightarrow p)$” peut être prouvée comme suit :



L'élimination de la double négation "$\neg\neg r$" n'était pas nécessaire.

17.7 La logique propositionnelle

1. **Question** (6 points) Formalisez les trois arguments donnés.
   Solution
   (a) La formalisation donne un point, la preuve de la validité en donne un autre.

Étant donné que l'embryon est une personne, il a droit à la vie.	$\rightsquigarrow$	$p \to q$
Si l'embryon a droit à la vie, alors il est faux que quelqu'un a le droit de le lui enlever.	$\rightsquigarrow$	$q \to \neg r$
Cependant, si l'avortement est moral, il y a quelqu'un qui a le droit de lui enlever la vie.	$\rightsquigarrow$	$s \to r$
Par conséquent, si l'embryon est une personne, l'avortement est immoral.	$\rightsquigarrow$	$p \to \neg s$

1	$p \to q, p \to \neg r, s \to r$	$\vdash$	$p \to q$	prémisse
2	$p \to q, p \to \neg r, s \to r$	$\vdash$	$p \to \neg r$	prémisse
3	$p \to q, p \to \neg r, s \to r$	$\vdash$	$s \to r$	prémisse
4	$p \to q, p \to \neg r, s \to r, p$	$\vdash^*$	p	supposition
5	$p \to q, p \to \neg r, s \to r, p$	$\vdash^*$	q	de (1) et (4) par MP
6	$p \to q, p \to \neg r, s \to r, p$	$\vdash^*$	$\neg r$	de (2) et (4) par MP
7	$p \to q, p \to \neg r, s \to r, p$	$\vdash^*$	$\neg s$	de (3) et (6) par MT
8	$p \to q, p \to \neg r, s \to r$	$\vdash$	$p \to \neg s$	de (4) et (7) par PC

   (b) 1 point pour la formalisation, 1 point pour la preuve de validité.

Si l'existence de Dieu était probable, alors la phrase qu'Il existe serait une phrase empirique.	$\rightsquigarrow$ $p \to q$
Dans ce cas, il serait possible de l'ajouter à d'autres phrases empiriques pour en déduire des conclusions qui ne sont pas déductibles de ces autres phrases empiriques seules.	$\rightsquigarrow$ $q \to r$
Mais cela n'est en fait pas possible.	$\rightsquigarrow$ $\neg r$
Alors il n'est pas le cas que l'existence de Dieu est probable.	$\rightsquigarrow$ $\neg p$

1	$p \to q, q \to r, \neg r$	$\vdash$	$p \to q$	prémisse
2	$p \to q, q \to r, \neg r$	$\vdash$	$q \to r$	prémisse
3	$p \to q, q \to r, \neg r$	$\vdash$	$\neg r$	prémisse
4	$p \to q, q \to r, \neg r$	$\vdash$	$\neg q$	de (2) et (3) par MT
5	$p \to q, q \to r, \neg r$	$\vdash$	$\neg p$	de (1) et (3) par MT

(c) formalisation : 1 point ; preuve de la validité : 1 point.

Si je crois en Dieu, alors s'il existe, je gagne, et s'il n'existe pas, alors je ne perds pas.	$\rightsquigarrow$ $p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s))$
Si, à l'inverse, je ne crois pas en Dieu, alors, s'Il existe, je perds, et s'Il n'existe pas, alors je ne gagne pas.	$\rightsquigarrow$ $\neg p \to ((q \to \neg s) \wedge (\neg q \to \neg r))$
De ceci il s'ensuit que si je crois, alors je gagnerai ou je ne perdrai pas,	$\rightsquigarrow$ $p \to (r \vee \neg s)$
tandis que si je ne crois pas, alors je perdrai ou je ne gagnera pas	$\rightsquigarrow$ $\neg p \to (s \vee \neg r)$

La déduction a deux parties : la première conclusion s'ensuit de la première prémisse, et la deuxième conclusion s'ensuit de la deuxième prémisse.

1	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s))$	$\vdash p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s))$	prémisse
2	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p$	$\vdash^* p$	supposition
3	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p$	$\vdash^* (q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)$	de (1) et (2) avec (MP
4	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p$	$\vdash^* q \to r$	de (3) par $\wedge$**E**
5	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p$	$\vdash^* \neg q \to \neg s$	de (3) par $\wedge$**E**
6	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p, q$	$\vdash^* q$	supposition
7	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p, q$	$\vdash^* r$	de (4) et (6) par (MP)
8	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p, q$	$\vdash^* r \vee \neg s$	de (7) par ($\vee$**I**)
9	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p$	$\vdash^* q \to (r \vee \neg s)$	de (6) et (8) par (PC)
10	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p, \neg q$	$\vdash^* \neg q$	supposition
11	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p, \neg q$	$\vdash^* \neg s$	de (5) et (10) par (MP)
12	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p, \neg q$	$\vdash^* r \vee \neg s$	de (11) par ($\vee$**I**)
13	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p$	$\vdash^* \neg q \to (r \vee \neg s)$	de (6) et (8) par (PC)
14	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p, \neg(r \vee \neg s)$	$\vdash^* \neg(r \vee \neg s)$	supposition
15	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p, \neg(r \vee \neg s)$	$\vdash^* \neg q$	de (9) et (14) par (MT)
16	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p, \neg(r \vee \neg s)$	$\vdash^* \neg\neg q$	de (13) et (14) par (MT)
17	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p$	$\vdash^* \neg\neg(r \vee \neg s)$	de (14), (15) et (16) par (RAA)
18	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s)), p$	$\vdash^* r \vee \neg s$	de (18) par (DN)
19	$p \to ((q \to r) \wedge (\neg q \to \neg s))$	$\vdash p \to (r \vee \neg s)$	de (2) et (18) par (PC)

Le deuxième raisonnement se fait en substituant "$\neg p$" à "p" et en changeant "s" en "r" et

vice versa.

1	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r))$	$\vdash \neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r))$	prémisse
2	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p$	$\vdash^* \neg p$	supposition
3	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p$	$\vdash^* (q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)$	de (1) et (2) par (MP
4	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p$	$\vdash^* q \rightarrow s$	de (3) par $\wedge$**E**
5	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p$	$\vdash^* \neg q \rightarrow \neg r$	de (3) par $\wedge$**E**
6	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p, q$	$\vdash^* q$	supposition
7	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p, q$	$\vdash^* s$	de (4) et (6) par (MP)
8	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p, q$	$\vdash^* s \vee \neg r$	de (7) par ($\vee$**I**)
9	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p$	$\vdash^* q \rightarrow (s \vee \neg r)$	de (6) et (8) par (PC)
10	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p, \neg q$	$\vdash^* \neg q$	supposition
11	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p, \neg q$	$\vdash^* \neg r$	de (5) et (10) par (MP)
12	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p, \neg q$	$\vdash^* s \vee \neg r$	de (11) par ($\vee$**I**)
13	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p$	$\vdash^* \neg q \rightarrow (s \vee \neg r)$	de (6) et (8) par (PC)
14	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p, \neg(s \vee \neg r)$	$\vdash^* \neg(s \vee \neg r)$	supposition
15	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p, \neg(s \vee \neg r)$	$\vdash^* \neg q$	de (9) et (14) par (MT)
16	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p, \neg(s \vee \neg r)$	$\vdash^* \neg\neg q$	de (13) et (14) par (MT)
17	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p$	$\vdash^* \neg\neg(s \vee \neg r)$	de (14), (15) et (16) par (RAA)
18	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)), \neg p$	$\vdash^* s \vee \neg r$	de (18) par (DN)
19	$\neg p \rightarrow ((q \rightarrow s) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r))$	$\vdash \neg p \rightarrow (s \vee \neg r)$	de (2) et (18) par (PC)

2. **Question** (4 points) Vérifiez au moyen de tables de vérité si les formules données sont des tautologies :

Solution

(a) "$p \rightarrow \neg\neg p$" est une tautologie :

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$p \rightarrow \neg\neg p$
V	F	V	V
F	V	F	V

(b) "$(p \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$" est une tautologie :

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	$(p \rightarrow (q \wedge r)) \leftrightarrow$ $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V	F	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

(c) "$\neg(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$" n'est pas une tautologie :

p	q	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$\neg(\neg p \rightarrow q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	F	F

(d) "$(p \rightarrow \neg p) \leftrightarrow \neg p$" est une tautologie :

p	$\neg p$	$p \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow \neg p) \leftrightarrow \neg p$
V	F	F	V
F	V	V	V

3. **Question** (4 points) Formulez les lois de distributivité et utilisez des tables de vérité pour montrer qu'elles sont correctes.
   Solution Les lois de distributivité disent que :
   – toute formule qui a la même forme que "$p \vee (q \wedge r)$" est équivalente sémantiquement à une formule qui a la même forme que "$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$".
   – toute formule qui a la même forme que "$p \wedge (q \vee r)$" est équivalente sémantiquement à une formule qui a la même forme que "$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$".

   Une autre manière de dire la même chose :

   $$\ulcorner \phi \vee (\psi \wedge \chi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi) \urcorner$$
   $$\ulcorner \phi \wedge (\psi \vee \chi) \urcorner \quad \Longleftrightarrow \quad \ulcorner (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi) \urcorner$$

   Les tables de vérité sont les suivantes :

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

4. **Question** (2 points) Si ψ est une tautologie, alors $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ en est une également. Démontrez que la converse est fausse, c'est-à-dire qu'il n'est pas vrai en général que : si $\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner$ est une tautologie, alors ψ est également une tautologie.
   Solution $\ulcorner \phi \rightarrow \phi \urcorner$, par exemple, est une tautologie, mais ϕ ne l'est normalement pas.
5. **Question** (4 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les phrases données.
   Solution Un erreur fréquent était de ne pas distinguer entre $\wedge$**E** et $\vee$**E**. La première règle est simple et nous permet d'inférer "p" et "q" à partir de "$p \wedge q$". La deuxième est différente : s'il était permis d'inférer "p" et "q" à partir de "$p \vee q$", on pourrait tout conclure de tout, en passant de "p" à "$p \vee q$" (par $\vee$**I**) et après à "q" !

(a)

1	$p, p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash$	p	prémisse
2	$p, p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash$	$p \rightarrow q$	prémisse
3	$p, p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash$	$p \rightarrow r$	prémisse
4	$p, p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash$	q	de (1) et (2) par (MP)
5	$p, p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash$	r	de (2) et (3) par (MP)
6	$p, p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash$	$q \wedge r$	de (4) et (5) par ($\wedge$**I**)

(b)

1	$\neg p \wedge q$	$\vdash$	$\neg p \wedge q$	prémisse
2	$\neg p \wedge q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$\neg p \wedge q, p, \neg r$	$\vdash^*$	$\neg r$	supposition
4	$\neg p \wedge q, p, \neg r$	$\vdash^*$	$\neg p$	de (1) par ($\wedge$**E**)
5	$\neg p \wedge q, p$	$\vdash^*$	$\neg\neg r$	de (3), (2) et (4) par (RAA)
6	$\neg p \wedge q, p$	$\vdash^*$	r	de (5) par (DN)
7	$\neg p \wedge q$	$\vdash$	$p \rightarrow r$	de (2) et (6) par (PC)

(c)

1	$p \vee p$	$\vdash$	$p \vee p$	prémisse
2	$p \vee p, p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$p \vee p, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$p \vee p$	$\vdash$	p	de (1), (2) et (3) par ($\vee$**E**)

(d)

1	$p \rightarrow q$	$\vdash^*$	$p \rightarrow q$	supposition
2	$p \rightarrow q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$p \rightarrow q, p$	$\vdash^*$	q	de (1) et (2) par (MP)
4	$p \rightarrow q, p$	$\vdash^*$	$q \vee r$	de (3) par ($\vee$**I**)
5	$p \rightarrow q$	$\vdash^*$	$p \rightarrow (q \vee r)$	de (2) et (4) par (PC)
6		$\vdash$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$	de (1) et (5) par (PC)

17.8 Premier examen probatoire

1. **Question** (3 points) Descartes, dans la Troisième *Méditation*, raisonne à peu près comme suit :

> Encore que l'idée de la substance soit en moi, si l'idée d'une substance infinie n'a pas été mise en moi par une substance infinie, je ne peux avoir l'idée d'une substance infinie. Par conséquent, il faut nécessairement conclure que Dieu existe.

Montrez que la conclusion s'ensuit avec ces deux prémisses supplémentaires.
Solution

(a) Formalisons l'argument comme suit (1 point) :

Encore que l'idée de la substance soit en moi, p
si l'idée d'une substance infinie n'a pas été mise en moi, $\neg q \to \neg r$
je ne peux avoir l'idée d'une substance infinie.
Je peux avoir l'idée d'une substance infinie. r
Si l'idée d'une substance infinie a été mise en moi, alors Dieu existe. $q \to s$
Par conséquent, il faut nécessairement conclure que Dieu existe. s

(b) On voit que la première prémisse (que l'idée de la substance est en moi) ne joue aucun rôle dans l'argument (1 point).

(D1)	p
(D2)	$\neg q \to \neg r$
(D3)	r
(D4)	$q \to s$
(D5)	s

(c) (1 point)

i. Par une table de vérité :

q	r	s	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q \to \neg r$	$q \to s$	$\mathbf{A} := (\neg q \to \neg r) \wedge r \wedge (q \to s)$	$\mathbf{A} \to s$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	F	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V	V	F	V

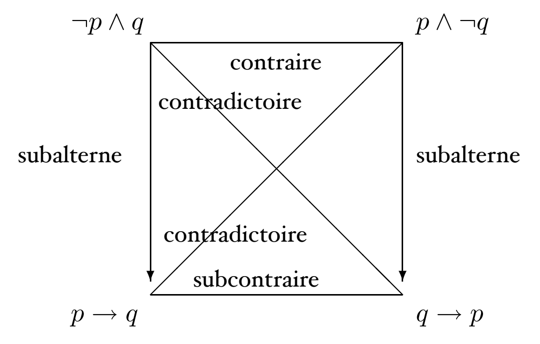
ii. Par une déduction naturelle :

1	$\vdash \neg q \to \neg r$	prémisse
2	$\vdash r$	prémisse
3	$\vdash \neg\neg r$	DN (introduction de la double négation) de (2)
4	$\vdash \neg\neg q$	MT (modus tollens) de (1) et (3)
5	$\vdash q$	DN (élimination de la double négation) de (4)
6	$\vdash q \to s$	prémisse
7	$\vdash s$	MP (modus ponens) de (6) et (5)

iii. Par simple raisonnement : Si "q" était faux, alors "r" le serait également (D2) ; mais "r" est vrai (D3), donc "q" doit l'être aussi. Si "q" est vrai, alors "s l'est aussi (D4) ; donc "s" est vrai.

2. **Question** (2 points) Montrez que l'ensemble de formules propositionnelles { "$\neg p \wedge q$", "$p \wedge \neg q$", "$p \to q$", "$q \to p$" } forme un carré d'opposition.

Solution Nous avons le carré suivant (1 point) :



– Les relations se vérifient ainsi (1 point) :
  (a) Contrariété : Si "p" est faux et "q" vrai, alors il n'est pas le cas que "p" est vrai et "q" faux ; et vice versa.
  (b) Contradiction : Les phrases suivantes sont vraies : "$\neg p \wedge q \leftrightarrow \neg(q \rightarrow p)$" ; "$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$".
  (c) Subalternation : Si "p" est faux et "q" vrai, alors "$p \rightarrow q$" est vrai. Si "p" est vrai et "q" faux, alors "$q \rightarrow p$" est vrai.
  (d) Subcontrariété : Si "$p \rightarrow q$" est faux, alors "p" est vrai et "q" est faux ; alors "$q \rightarrow p$" est vrai. Si "$q \rightarrow p$" est faux, alors "q" est vrai et "p" est faux ; alors "$p \rightarrow q$" est vrai.

  Voici les tables de vérité correspondantes (1 point) :

(a) Contrariété :

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg p)$	$(\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \wedge \neg p))$
V	V	F	F	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F	V

(b) Contradiction :

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$q \rightarrow p$	$\neg(q \rightarrow p)$	$(\neg p \wedge q) \leftrightarrow \neg(q \rightarrow p)$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(q \rightarrow p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V

(c) Subalternation :

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$q \rightarrow p$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

3. **Question** (3 points) En respectant la convention qui veut que l'on forme le nom d'une expression en plaçant ce mot entre guillemets (et selon la fiction qu'il n'y a pas d'autre usage des guillemets), lesquelles des phrases données expriment des phrases vraies ?

   Solution

   (a) "Socrate s'appelle Socrate." est **faux**.
   (b) "Les grecs avaient plusieurs noms pour "Socrate"." est également **faux**.
   (c) "L'expression ""philosophie"" commence par des guillemets." est **vrai.**

(d) "Pour parler de Paris, il faut mentionner "Paris"." est **faux** : il suffit d'utiliser "Paris".
(e) "Berne n'est pas la "capitale de la Suisse"." est **vrai**, parce que Berne n'est pas un mot.
(f) "La phrase qui précède ne mentionne pas la capitale de la Suisse." et **faux** : elle mentionne Berne qui est la capitale de la Suisse en utilisant "Berne".

4. **Question** (3 points) Quelle est la négation des phrases données ?
Solution
(a) La négation de "Seuls les fous adorent Aristote." est "Il y a un admirateur d'Aristote qui n'est pas fou.".
(b) La négation de "Il n'y a aucun endroit en Suisse plus magnifique que Paris." est "Il y a un endroit en Suisse qui est plus magnifique que Paris.".
(c) La négation de "Je n'ai rien dit." est "J'ai dit quelque chose".
(d) La négation de "Pour passer l'examen, il est nécessaire de faire les exercices." est "Pour passer l'examen, il n'est pas nécessaire de faire les exercices.".
(e) La négation de "Il viendra seulement s'il est invité." est "Il viendra même s'il n'est pas invité.".
(f) La négation de "Elle est gentille et intelligente." est "Soit elle n'est pas gentille, soit elle n'est pas intelligente.".

5. **Question** (3 points) Déterminez si les phrases données peuvent être vraies ensemble. Si elles ne peuvent pas être vraies ensemble, indiquez si la raison est d'ordre empirique, sémantique ou logique.
Solution
(a) "Il a mangé." et "Il n'y a rien qui est tel qu'il l'a mangé." **ne peuvent pas être vrais ensemble** pour des raisons **empiriques** (pour manger, il faut manger quelque chose).
(b) "Il est nécessaire que tous les modes soient des attributs." et "La sagesse est un mode mais pas un attribut." **ne peuvent pas être vrais ensembles** pour des raisons **logiques** (si tous les modes sont des attributs, alors rien ne peut être un mode sans être un attribut).
(c) "Si Dieu existe, il est omnipotent." et "Si Dieu n'est pas omnipotent, alors il n'existe pas." **peuvent** (et même doivent) **être vrais ensemble**.
(d) "Le train est arrivé à l'heure." et "Le train avait du retard." **ne peuvent pas être vrais ensemble** pour des raisons **empiriques** (un train est à une seule place à chaque moment). Si on considère que "avoir du retard" et synonyme à "ne pas être à l'heure", on peut aussi attribuer l'incompatibilité à des raisons sémantiques. Ceci ne me paraît pas très plausible, cependant, puisque le train pourrait aussi être en avance.
(e) "Marie n'adore que Guillaume.", "Toutes les personnes adorées par Marie habitent Paris." et "Guillaume habite Paris." **ne peuvent pas être vrais ensemble** pour des raisons **empiriques** (personne ne peut habiter deux villes en même temps).
(f) "Il ne réussira pas l'examen sauf s'il fait les exercices." et "Pour réussir à l'examen, il ne faut que s'inscrire." **peuvent être vrais ensemble** : si l'inscription est une condition suffisante pour la réussite à l'examen, les exercices peuvent toujours en être une condition nécessaire (l'inscription est alors aussi une raison suffisante pour les exercices).

6. **Question** (2 points) Déterminez lesquelles des paires de phrases données sont telles que le premier membre a la même table de vérité que le second. :
Solution
(a) Les deux phrases ont les mêmes tables de vérité :

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \wedge r$
V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \wedge r$	$(p \wedge (\neg q \wedge r)$
V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	F
F	F	F	V	F	F

(b) Les deux phrases n'ont pas les mêmes tables de vérité :

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

(c) Les deux phrases n'ont pas les mêmes tables de vérité :

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

(d) Les deux phrases ont les mêmes tables de vérité :

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

p	q	$\neg p$	$q \wedge \neg p$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

7. **Question** (4 points) Soit "ϕ" est un nom de la phrase "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage" et soit "ψ" un nom de la phrase "J'étudie la logique". Mentionnez quatre différentes conséquences logiques de $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$.

   Solution Voici quelques conséquences logiques de $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$:

   (a) "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage ; et j'étudie la logique." (= $\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$)
   (b) "J'étudie la logique et si j'étudie la logique, je serai heureux et sage." (= $\ulcorner \psi \wedge \phi \urcorner$)
   (c) "Si j'étudie la logique, je serai heureux et sage." (= ϕ)
   (d) "J'étudie la logique." (= ψ)
   (e) "Je serai heureux et sage."
   (f) "Je serai heureux."
   (g) "Je serai sage."
   (h) "Soit je n'étudie pas la logique, soit je serai heureux et sage."
   (i) "Si je ne serai pas heureux et sage, je n'étudie pas la logique."
   (j) "Si je ne serai pas heureux, je n'étudie pas la logique."
   (k) "Si je ne serai pas sage, je n'étudie pas la logique."
   (l) "Il n'est pas le cas que soit il n'est pas le cas que si j'étudie la logique, je serai heureux et sage, soit je n'étudie pas la logique." (= $\ulcorner \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \urcorner$)

17.9 Deuxième examen probatoire

1. **Question** (6 points) A l'aide de la méthode des arbres, déterminez les valeurs de vérité des

phrases données.

Solution

(a) Pour montrer que "$\{(p \to q) \to r\ ,\ \neg q \to \neg p\}\ \models r$" est vrai, faisons l'arbre pour la négation de l'implication correspondante :

$$\checkmark \quad \neg((((p \to q) \to r) \land (\neg q \to \neg p)) \to r)$$

$$\checkmark \quad ((p \to q) \to r) \land (\neg q \to \neg p)$$
$$\neg r$$

$$\checkmark\ (p \to q) \to r$$
$$\checkmark\ \neg q \to \neg p$$

$$\checkmark\ \neg(p \to q) \qquad r$$
$$\qquad\qquad \nabla$$

$$p$$
$$\neg q$$

$$\neg\neg q \qquad \neg p$$
$$\nabla \qquad \nabla$$

(b) Voici un arbre pour "$\{(p \lor \neg q) \land q\ ,\ (p \lor ((r \to p) \land r)) \to r\}\ \models q \to r$" :

$$\checkmark \quad \neg((((p \lor \neg q) \land q) \land ((p \lor ((r \to p) \land r))) \to r)) \to (q \to r))$$

$$\checkmark\ ((p \lor \neg q) \land q) \land ((p \lor ((r \to p) \land r))) \to r)$$
$$\checkmark\ \neg(q \to r)$$

$$\checkmark \quad (p \lor \neg q) \land q$$
$$\checkmark \quad (p \lor ((r \to p) \land r))) \to r$$

$$p \lor \neg q$$
$$q$$

$$p \qquad \neg q$$
$$\qquad \nabla$$

$$\neg q$$
$$r$$

$$\checkmark \neg(p \lor ((r \to p) \land r)) \qquad r$$
$$\qquad \nabla$$

$$\neg p$$
$$\neg((r \to p) \land r)$$
$$\nabla$$

(c) Pour montrer que "$\{(p \to \neg r) \land q\ ,\ q \to ((p \land r) \lor ((r \to \neg p) \to r))\}\ \models r$" est vrai, faisons l'arbre pour la négation de l'implication correspondante :

$\checkmark \quad \neg((((p \to \neg r) \wedge q) \wedge (q \to ((p \wedge r) \vee ((r \to \neg p) \to r))) \to r)$

$\checkmark \quad ((p \to \neg r) \wedge q) \wedge (q \to ((p \wedge r) \vee ((r \to \neg p) \to r))$
$\neg r$

$\checkmark \quad (p \to \neg r) \wedge q$
$\checkmark \quad q \to ((p \wedge r) \vee ((r \to \neg p) \to r))$

$\checkmark\ p \to \neg r)$
q

$\neg q$ ∇ | $\checkmark (p \wedge r) \vee ((r \to \neg p) \to r)$

$\checkmark p \wedge r$ | $\checkmark (r \to \neg p) \to r$

p, r ∇ | $\checkmark \neg(r \to \neg p)$ | r ∇

r
$\neg\neg p$
∇

(d) Pour montrer que "$\{p \to q\ ,\ p \to \neg q\} \models \neg p$" est faux, faisons l'arbre pour la négation de l'implication correspondante :

$\checkmark \quad \neg(((p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \to \neg p)$

$\checkmark \quad (p \to q) \wedge (p \to \neg q)$
$\neg\neg p$

$\checkmark \quad p \to q$
$\checkmark \quad p \to \neg q$

$\neg p$ ∇ | q $\checkmark$

$\neg p$ ∇ | $\neg q$ ∇

(e) Pour montrer que "$\{p \wedge (r \vee q)\ ,\ \neg q \to \neg p\} \models p \wedge r$" est faux, faisons l'arbre pour la négation de l'implication correspondante :

$$
\begin{array}{c}
\checkmark\ \neg(((p \wedge (r \vee q)) \wedge (\neg q \to \neg p)) \to (p \wedge r)) \\
| \\
\checkmark\ ((p \wedge (r \vee q)) \wedge (\neg q \to \neg p) \\
\checkmark\ \neg(p \wedge r) \\
| \\
\checkmark\ p \wedge (r \vee q)) \\
\checkmark\ \neg q \to \neg p \\
| \\
p \\
\checkmark (r \vee q) \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg p \ \nabla \qquad \neg r \\
\qquad \swarrow \quad \searrow \\
\qquad \neg\neg q \qquad \neg p \ \nabla \\
\swarrow \quad \searrow \\
r \ \nabla \qquad q
\end{array}
$$

La branche contenant "q" reste ouverte et l'arbre est entièrement développé.

(f) Pour montrer que "$\{p \to (q \to r)\ ,\ \neg r\} \models \neg(p \wedge q)$" est vrai, faisons l'arbre pour la négation de l'implication correspondante :

$$
\begin{array}{c}
\checkmark\ \neg(((p \to (q \to r)) \wedge \neg r) \to \neg(p \wedge q)) \\
| \\
\checkmark\ (p \to (q \to r)) \wedge \neg r) \\
\checkmark\ \neg\neg(p \wedge q) \\
| \\
\checkmark\ p \to (q \to r) \\
\checkmark\ \neg r \\
| \\
\checkmark\ p \wedge q \\
| \\
p \\
q \\
\swarrow \quad \searrow \\
\neg p \ \nabla \qquad \checkmark\ q \to r \\
\qquad \swarrow \quad \searrow \\
\qquad \neg q \ \nabla \qquad r \ \nabla
\end{array}
$$

2. **Question** (14 points) Démontrez les séquents donnés, utilisant les règles d'inférence de la

déduction naturelle.

Solution

(a) Voici une preuve de “$p \to (\neg\neg p \to q)\ , \neg q\ \vdash\ \neg p$” :

1	$p \to (\neg\neg p \to q), \neg q$	$\vdash$		prémisse
2	$p \to (\neg\neg p \to q), \neg q$	$\vdash$		prémisse
3	$p \to (\neg\neg p \to q), \neg q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$p \to (\neg\neg p \to q), \neg q, p$	$\vdash^*$	$\neg\neg p \to q$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to (\neg\neg p \to q), \neg q, p$	$\vdash^*$	$\neg\neg\neg p$	de (4) et (2) par (MT)
6	$p \to (\neg\neg p \to q), \neg q, p$	$\vdash^*$	$\neg p$	de (5) par (DN)
7	$p \to (\neg\neg p \to q), \neg q$	$\vdash$	$\neg p$	de (3), (3) et (6) par (RAA)

(b) Voici une preuve de “$(p \vee \neg q) \to p\ ,\ \neg p\ \vdash\ \neg p \wedge q$” :

1	$(p \vee \neg q) \to p\ , \neg p$	$\vdash$	$(p \vee \neg q) \to p$	prémisse
2	$(p \vee \neg q) \to p\ , \neg p$	$\vdash$	$\neg p$	prémisse
3	$(p \vee \neg q) \to p\ , \neg p, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition
4	$(p \vee \neg q) \to p\ , \neg p, \neg q$	$\vdash^*$	$p \vee \neg q$	de (3) par ($\vee$**I**)
5	$(p \vee \neg q) \to p\ , \neg p, \neg q$	$\vdash^*$	p	de (1) et (4) par (MP)
6	$(p \vee \neg q) \to p\ , \neg p$	$\vdash$	$\neg\neg q$	de (3), (2) et (5) par (RAA)
7	$(p \vee \neg q) \to p\ , \neg p$	$\vdash$	q	de (6) par (DN)
8	$(p \vee \neg q) \to p\ , \neg p$	$\vdash$	$\neg p \wedge q$	de (2) et (7) par ($\wedge$**I**)

(c) Voici une preuve de “$p \to (q \to r)\ \vdash\ (p \to q) \to (p \to r)$” :

1	$p \to (q \to r)$	$\vdash$	$p \to (q \to r)$	prémisse
2	$p \to (q \to r), p \to q$	$\vdash^*$	$p \to q$	supposition
3	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
4	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash^*$	q	de (2) et (3) par (MP)
5	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash^*$	$q \to r$	de (1) et (2) par (MP)
6	$p \to (q \to r), p \to q, p$	$\vdash^*$	r	de (4) et (5) par (MP)
7	$p \to (q \to r), p \to q$	$\vdash^*$	$p \to r$	de (3) et (6) par (PC)
8	$p \to (q \to r)$	$\vdash$	$(p \to q) \to (p \to r)$	de (2) et (7) par (PC)

(d) Voici une preuve de “$p \to (q \to r)\ \vdash\ (p \wedge q) \to r$” :

1	$p \to (q \to r)$	$\vdash$	$p \to (q \to r)$	prémisse
2	$p \to (q \to r), p \wedge q$	$\vdash^*$	$p \wedge q$	supposition
3	$p \to (q \to r), p \wedge q$	$\vdash^*$	p	de (2) par ($\wedge$**E**)
4	$p \to (q \to r), p \wedge q$	$\vdash^*$	$q \to r$	de (1) et (3) par (MP)
5	$p \to (q \to r), p \wedge q$	$\vdash^*$	q	de (2) par ($\wedge$**E**)
6	$p \to (q \to r), p \wedge q$	$\vdash^*$	r	de (4) et (5) par (MP)
7	$p \to (q \to r)$	$\vdash$	$(p \wedge q) \to r$	de (2) et (6) par (PC)

(e) Voici une preuve de “$p\ \vdash\ (\neg(q \to r) \to \neg p) \to (\neg r \to \neg q)$” :

1	p	$\vdash$	p	prémisse
2	p	$\vdash$	$\neg\neg p$	de (1) par (DN)
3	$p, \neg(q \to r) \to \neg p$	$\vdash^*$	$\neg(q \to r) \to \neg p$	supposition
4	$p, \neg(q \to r) \to \neg p$	$\vdash^*$	$\neg\neg(q \to r)$	de (3) et (2) par (MT)
5	$p, \neg(q \to r) \to \neg p$	$\vdash^*$	$q \to r$	de (4) par (DN)
6	$p, \neg(q \to r) \to \neg p, \neg r$	$\vdash^*$	$\neg r$	supposition
7	$p, \neg(q \to r) \to \neg p, \neg r$	$\vdash^*$	$\neg q$	de (5) et (6) par (MT)
8	$p, \neg(q \to r) \to \neg p$	$\vdash^*$	$\neg r \to \neg q$	de (6) et (7) par (PC)
9	p	$\vdash$	$(\neg(q \to r) \to \neg p) \to (\neg r \to \neg q)$	de (3) et (8) par (PC)

(f) Voici une preuve de "$p \to \neg p \ \vdash \ \neg p$" :

1	$p \to \neg p$	$\vdash$	$p \to \neg p$	prémisse
2	$p \to \neg p, p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$p \to \neg p, p$	$\vdash^*$	$\neg p$	de (1) et (2) par (MP)
4	$p \to \neg p$	$\vdash$	$\neg p$	de (2), (2) et (3) par (RAA)

(g) Voici une preuve de "$p \wedge q \ \vdash \ p \vee q$" :

1	$p \wedge q$	$\vdash$	$p \wedge q$	prémisse
2	$p \wedge q$	$\vdash$	p	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$p \wedge q$	$\vdash$	$p \vee q$	de (2) par ($\vee$**I**)

(h) Voici une preuve de "$p \wedge (q \leftrightarrow s)$, $(q \leftrightarrow s) \to r \ \vdash \ r \vee t$" :

1	$p \wedge (q \leftrightarrow s), (q \leftrightarrow s) \to r$	$\vdash$	$p \wedge (q \leftrightarrow s)$	prémisse
2	$p \wedge (q \leftrightarrow s), (q \leftrightarrow s) \to r$	$\vdash$	$(q \leftrightarrow s) \to r$	prémisse
3	$p \wedge (q \leftrightarrow s), (q \leftrightarrow s) \to r$	$\vdash$	$q \leftrightarrow s$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$p \wedge (q \leftrightarrow s), (q \leftrightarrow s) \to r$	$\vdash$	r	de (2) et (3) par (MP)
5	$p \wedge (q \leftrightarrow s), (q \leftrightarrow s) \to r$	$\vdash$	$r \vee t$	de (4) par ($\vee$**I**)

(i) Voici une preuve de "$\neg(\neg p \wedge \neg q)$, $\neg p \ \vdash \ q$" :

1	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p$	$\vdash$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	prémisse
2	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p$	$\vdash$	$\neg p$	prémisse
3	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg q$	supposition
4	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p, \neg q$	$\vdash^*$	$\neg p \wedge \neg q$	de (2) et (3) par ($\wedge$**I**)
5	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p$	$\vdash$	$\neg\neg q$	de (3), (4) et (1) par (RAA)
6	$\neg(\neg p \wedge \neg q), \neg p$	$\vdash$	q	de (5) par (DN)

(j) Voici une preuve de "$\neg(q \to p) \ \vdash \ q \to \neg p$" :

1	$\neg(q \to p)$	$\vdash$	$\neg(q \to p)$	prémisse
2	$\neg(q \to p), p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$\neg(q \to p), p, q$	$\vdash^*$	q	supposition
4	$\neg(q \to p), p$	$\vdash^*$	$q \to p$	de (3) et (2) par (PC)
5	$\neg(q \to p)$	$\vdash$	$\neg p$	de (2), (1) et (4) par (RAA)
6	$\neg(q \to p)$	$\vdash$	$q \to \neg p$	de (3) et (5) par (PC)

Le fait que l'application de (PC) dans la dernière ligne n'est pas nécessaire pour enlever une supposition montre que la conclusion prouvée était plus faible que nécessaire ; nous aurions pu directement prouver "p".

(k) Voici une preuve de "$\vdash\ p \rightarrow p$" :

1	p	$\vdash^*$	p	supposition
2		$\vdash$	$p \rightarrow p$	de (1) et (1) par (PC)

(l) Voici une preuve de "$\vdash\ \neg(p \wedge \neg p)$" :

1	$p \wedge \neg p$	$\vdash^*$	$p \wedge \neg p$	supposition
2	$p \wedge \neg p$	$\vdash^*$	p	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$p \wedge \neg p$	$\vdash^*$	$\neg p$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4		$\vdash$	$\neg(p \wedge \neg p)$	de (1), (2) et (3) par (RAA)

(m) Voici une preuve de "$\neg p \leftrightarrow \neg q\ \vdash\ p \leftrightarrow q$" :

1	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$\vdash$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	prémisse
2	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$\vdash$	$\neg p \rightarrow \neg q$	de (1) par ($\leftrightarrow$ **E**)
3	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$\vdash$	$\neg q \rightarrow \neg p$	de (1) par ($\leftrightarrow$ **E**)
4	$\neg p \leftrightarrow \neg q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
5	$\neg p \leftrightarrow \neg q, p$	$\vdash^*$	$\neg\neg p$	de (4) par (DN)
6	$\neg p \leftrightarrow \neg q, p$	$\vdash^*$	$\neg\neg q$	de (3) et (5) par (MT)
7	$\neg p \leftrightarrow \neg q, p$	$\vdash^*$	q	de (6) par (DN)
8	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$\vdash$	$p \rightarrow q$	de (4) et (7) par (PC)
9	$\neg p \leftrightarrow \neg q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
10	$\neg p \leftrightarrow \neg q, q$	$\vdash^*$	$\neg\neg q$	de (9) par (DN)
11	$\neg p \leftrightarrow \neg q, q$	$\vdash^*$	$\neg\neg p$	de (2) et (10) par (MT)
12	$\neg p \leftrightarrow \neg q, q$	$\vdash^*$	p	de (11) par (DN)
13	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$\vdash$	$q \rightarrow p$	de (9) et (12) par (PC)
14	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$\vdash$	$p \leftrightarrow q$	de (8) et (13) par ($\leftrightarrow$ **I**)

(n) Voici une preuve de "$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)\ \vdash\ p \leftrightarrow r$" :

1	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash$	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	prémisse
2	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash$	$p \leftrightarrow \neg q$	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash$	$q \leftrightarrow \neg r$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash$	$p \rightarrow \neg q$	de (2) par ($\leftrightarrow$ **E**)
5	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash$	$\neg q \rightarrow p$	de (2) par ($\leftrightarrow$ **E**)
6	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash$	$q \rightarrow \neg r$	de (3) par ($\leftrightarrow$ **E**)
7	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash$	$\neg r \rightarrow q$	de (3) par ($\leftrightarrow$ **E**)
8	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), p$	$\vdash^*$	p	supposition
9	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), p$	$\vdash^*$	$\neg q$	de (4) et (8) par (MP)
10	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), p$	$\vdash^*$	$\neg\neg r$	de (7) et (9) par (MT)
11	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), p$	$\vdash^*$	r	de (10) par (DN)
12	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash$	$p \rightarrow r$	de (8) et (11) par (PC)
13	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), r$	$\vdash^*$	r	supposition
14	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), r$	$\vdash^*$	$\neg\neg r$	de (13) par (DN)
15	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), r$	$\vdash^*$	$\neg q$	de (6) et (14) par (MT)
16	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r), r$	$\vdash^*$	p	de (13) et (15) par (MP)
17	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash$	$r \rightarrow p$	de (13) et (16) par (PC)
18	$(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$	$\vdash$	$p \leftrightarrow r$	de (12) et (17) par ($\leftrightarrow$ **I**)

17.10 La logique des prédicats

1. **Question** (2 points) Classifiez les phrases données selon la distinction "**S**aP" / "**S**iP / "**S**eP" / "**S**oP" :
   Solution
   (a) "Tous les anges sont immortels" a la forme **SaP**.
   (b) "Aucun ange n'est mortel" a la forme **SeP**.
   (c) "L'homme est un être raisonnable" a la forme **SaP**.
   (d) "Quelques oeuvres d'art ne sont pas jolies" a la forme **SoP**.
   (e) "Quelques oeuvres d'art sont laides" a la forme **SiP**.
   (f) "Personne parmi les hommes n'est sans vice" a la forme **SeP**.
2. **Question** (1 point) Faites un diagramme de Venn pour la phrase suivante. Est-elle compatible avec "Aucun F n'est G" ?

   (7) Tous les F sont G et tous les G sont F.

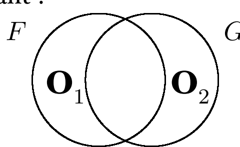
   Solution En logique des prédicats, (7) a la forme :

   (8) $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)\ \wedge\ \forall x(Gx \rightarrow Fx)$

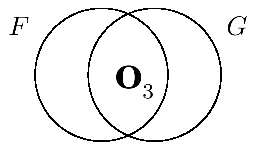
   ce qui est sémantiquement équivalent à

   (9) $\forall x\,(Fx \leftrightarrow Gx)$

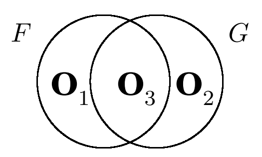
   Le diagramme de Venn pour (7) est le suivant :



   Le premier "**O**" ("$\mathbf{O}_1$") représente l'implication de gauche à droite, la deuxième ("$\mathbf{O}_2$") celle de droite à gauche. Le diagramme pour "Aucun F n'est G" est le suivant :



   Combinant les deux, nous obtenons :



   D'après ce diagramme, il n'y a pas de F qui ne sont pas de G, pas des F qui sont des G et pas de G qui ne sont pas de F. Il n'y a donc aucun F et aucun G.
   La question de compatibilité reçoit une réponse différentielle : les deux phrases ne sont pas compatibles selon la syllogistique, qui présuppose que les termes généraux qu'elle traite sont vrais d'au moins un objet ; elles sont cependant compatibles dans la logique des prédicats, qui permet le cas où il n'y a pas de F : (7) est vraie, s'il n'y a pas non plus de G, ce qui n'est pas non plus exclu par la logique des prédicats. "Aucun F n'est G" serait formalisé comme

   (10) $\neg\exists x\,(Fx \wedge Gx)$

ce qui est consistant avec (9).

3. **Question** (2 points) Soient les cartes suivantes :

E	K	4	7

On sait que chaque carte comporte une lettre de l'alphabet d'un côté et un chiffre de l'autre. Supposez que l'on fasse l'affirmation suivante :

S'il y a une voyelle d'un côté de ces quatre cartes, il y a un nombre pair de l'autre côté.

Combien de cartes faut-il retourner *au minimum* pour vérifier cette affirmation ? Lesquelles ?
Solution Nous voyons une voyelle ("E") et un nombre pair (4). Il est donc clair qu'il faut tourner la première carte, "E", pour voir si on trouve un nombre pair de l'autre côté. Quelle autre carte faut-il tourner ? Si on tourne la troisième, on n'apprend rien sur la vérité de l'implication (puisqu'il ne s'ensuit rien de la vérité de son conséquent). Si on tourne la deuxième, on n'apprend également rien (puisqu'il ne s'ensuit rien de la fausseté de son antécédent). Pour trouver qu'il faut tourner la quatrième, on applique le principe de conversion : "S'il y a une voyelle d'un côté de ces quatre cartes, il y a un nombre pair de l'autre côté." est équivalent à "S'il n'y a pas de nombre pair sur un côté, il y a une lettre qui n'est pas une voyelle sur l'autre". Il faut donc tourner la quatrième pour voir si la lettre de l'autre côté n'est pas une voyelle. Si c'est le cas, l'implication est vraie, sinon, elle est fausse. Il faut donc tourner les cartes "E" et "7".

4. **Question** (1 point) Est-ce que les phrases suivantes peuvent être vraies ensembles ; si oui, comment ? (utilisez le prédicat "personne(x)" et la relation "x aime y")
(a) Toute personne aime quelqu'un.
(b) Personne n'est aimé par tout le monde.

Solution

(a)	"Toute personne aime quelqu'un"	$\forall x(\text{personne}(x) \to \exists y(\text{personne}(y) \wedge x \text{ aime } y))$
(b)	"Il n'y a personne qui est aimé par toute le monde"	$\neg\exists y(\text{personne}(y) \wedge \forall x(\text{personne}(x) \to x \text{ aime } y))$

Les deux phrases peuvent être vraies ensemble si pour toute personne, il existe quelqu'un qui est aimé par cette personne mais que différentes personnes ont différents aimants. S'il n'y a, par exemple, que quatre personnes dans notre univers de discours – Sam, Annette, Marie et Jeanne – et si Sam aime Annette, Annette aime Sam, Marie aime Sam et Jeanne aime Marie, la première phrase est vraie. Puisque personne n'est aimé par tous les quatre, la deuxième phrase est également vraie dans cette situation.

5. **Question** (2 points) Formalisez les deux phrases données dans le calcul des prédicats (avec "oiseau(x)", "corbeau(x)", "personne(x)", "blanc(x)", "noir(x)", "vertueux(x)", "heureux(x)") et dites s'il s'agit ou non de tautologies (de la logique des prédicats).
Solution
(a) La formalisation de la phrase "S'il y a des oiseaux blancs et pas de corbeaux noirs, alors certains oiseaux ne sont pas des corbeaux" nous donne :

$$(\exists x(\text{oiseau}(x) \wedge \text{blanc}(x)) \wedge \neg\exists y(\text{corbeau}(y) \wedge \text{noir}(y))) \ \to \ \exists x(\text{oiseau}(x) \wedge \neg\text{corbeau}(x))$$

Cette phrase n'est pas une tautologie, puisque elle n'est vraie que si on présuppose que rien (ou, de moins, aucun oiseau) de blanc ne peut être noir (ou si on présuppose que rien (ou, de moins, aucun corbeau) de noir ne peut être blanc).

(b) La formalisation de la phrase “S’il est vrai que, si tous les gens sont vertueux, alors tous les gens sont heureux, alors tous les gens vertueux sont heureux” nous donne :

$$(\forall x(\text{personne}(x) \rightarrow \text{vertueux}(x)) \rightarrow \forall x(\text{personne}(x) \rightarrow \text{heureux}(x))) \rightarrow (\forall x(\text{personne}(x) \wedge \text{vertueux}(x) \rightarrow \text{heureux}(x)))$$

(b) n’est pas non plus une tautologie, parce qu’il est logiquement possible qu’il y ait des gens qui ne sont pas vertueux mais aussi des gens vertueux qui ne sont pas heureux. Dans ce cas, il n’est pas le cas que tous les gens sont vertueux, et donc l’antécédent de la première implication est faux, ce qui rend la première implication vraie. Puisque cette première implication est l’antécédent de l’implication toute entière, cette dernière est fausse s’il y a des gens vertueux qui ne sont pas heureux.
Si, par exemple, notre univers de discours contient Marie, qui n’est pas vertueuse, et Sam, qui est vertueux, mais qui n’est pas heureux, “$(\forall x(\text{personne}(x) \rightarrow \text{vertueux}(x)) \rightarrow \forall x(\text{personne}(x) \rightarrow \text{heureux}(x)))$” est vrai, parce que son antécédent, “$\forall x(\text{personne}(x) \rightarrow \text{vertueux}(x)$” est faux. Mais il est faux que toute personne vertueuse est heureuse (puisque Sam est vertueux, mais pas heureux).

6. **Question** (1 point) Formalisez les deux énoncés donnés dans le calcul des prédicats. Ces deux énoncés sont-ils sémantiquement équivalents ?
Solution

(a)	“Tous les hommes ont une cervelle de moineau.”	$\forall x(\text{homme}(x) \rightarrow \text{a une cervelle de moineau}(x))$
(b)	“Seuls les hommes ont une cervelle de moineau.”	$\forall x(\text{a une cervelle de moineau}(x) \rightarrow \text{homme}(x))$

Les deux énoncés ne sont pas équivalents :
(a) Si tous les hommes ont une cervelle de moineau mais que les moineaux ont aussi une cervelle de moineau, (a) est vrai, mais (b) est faux.
(b) Si seuls les hommes ont une cervelle de moineau, mais que quelques hommes n’ont pas de cerveau du tout, (b) est vrai, mais (a) est faux.

7. **Question** (3 points) Étant donné les quelques abréviations, donnez une formalisation dans le langage du calcul des prédicats de chacune des phrases suivantes (lorsqu’une phrase est ambiguë, donnez les deux formalisations possibles).
Solution

(a)	“Les philosophes sont sérieux.”	$\forall x(Ph(x) \rightarrow S(x))$
(b)	“Les philosophes ne sont pas tous sérieux.”	$\neg\forall x(Ph(x) \rightarrow S(x))$
(c)	“Quelques philosophes sont politiciens.”	$\exists x(Ph(x) \wedge Po(x))$
(d)	“Tout politicien s’admire.”	$\forall x(Po(x) \rightarrow A(x,x))$
(e)	“Tout philosophe respecte Aristote.”	$\forall x(Ph(x) \rightarrow R(x,a))$
(f)	“Certains philosophes respectent A. et S.”	$\exists x(Ph(x) \wedge R(x,a) \wedge R(x,s))$
(g_1)	“Tous les philosophes admirent un politicien.”	$\forall x(Ph(x) \rightarrow \exists y(Po(y) \wedge A(x,y))$
(g_2)		$\exists y(Po(y) \wedge \forall x(Ph(x) \rightarrow A(x,y)))$
(h)	“Les philosophes respectent les politiciens sérieux.”	$\forall x,y\ ((Ph(x) \wedge Po(y) \wedge S(y)) \rightarrow R(x,y))$
(i)	“Aristote est admiré.”	$\exists x(A(x,a))$

(g) est ambiguë entre une interprétation selon laquelle le même politicien est admiré par tous les philosophes et une autre selon laquelle différents philosophes admirent différents politiciens.

8. **Question** (2 points) Formulez, dans le langage naturel, des phrases contradictoires aux phrases données.
Solution

(a)	"Tout ce qui brille n'est pas d'or."	Il y a une ambiguı̈té entre "Tout ce qui brille est d'or." et : "Il y a de l'or qui brille"
(b)	"Cette salle est à moitié vide."	"Cette salle n'est pas à moitié vide."
(c)	"Tous les chemins mènent à Rome."	"Il y a un chemin qui ne mène pas à Rome."
(d)	"Certains Qu.s ont au moins deux voitures."	"Tous les Québécois ont moins de deux voitures." "Aucun Québécois n'a au moins deux voitures."
(e)	"Les chiens ont quatre pattes."	"Il y a un chien qui n'a pas quatre pattes."
(f)	"Le chien est un animal."	Il y a une ambiguı̈té entre : "Le chien n'est pas un animal." ou : "Il y a un chien qui n'est pas un animal."
(g)	"Le pingouin est mon animal préféré."	"Le pingouin n'est pas mon animal préféré."

Pour (a), la réponse varie selon qu'on interprète la négation comme interne ou externe. Si on l'interprète comme externe, la phrase a la forme "$\neg\forall x(x$ brille $\rightarrow\ \ x$ est d'or)" et la phrase contradictoire est donc "Tout ce qui brille est d'or." Si l'on interprète comme interne, la phrase a la forme "$\forall x(x$ brille $\rightarrow \neg x(x$ est d'or$))$" et la phrase contradictoire est "Il y a quelque chose qui brille et qui est d'or".

Il est possible d'argumenter que la phrase qui contredit (f) est plutôt "Il y a un chien qui n'est pas un animal". (f), d'après cette interprétation, fait une assertion sur l'espèce – le fait que si un membre de l'espèce n'est pas un animal, alors l'espèce CHIEN ne peut pas être une sous-espèce de l'espèce ANIMAL, n'est pas un fait logique, mais appartient à une autre domaine (la biologie, si elle nous dit que les espèces sont uniformes dans ce sens-là, la métaphysique si elle nous dit que les espèces ne déterminent que les propriétés essentielles de leurs membres). Une telle ambiguı̈té n'existe cependant pas pour (g).

9. **Question** (6 points) Soit $\mathcal{L}^+$ une langue de la logique des prédicats avec $\mathbf{I} = \{0\}$, $\mathbf{J} = \{0,1,2\}$, $\mathbf{K} = \{0,1\}$, $\lambda(0) = 2$, $\mu(0) = 1$, $\mu(1) = \mu(2) = 2$. Nous remplaçons les signes non-logiques par les suivants :

$$\begin{array}{rcl} \ldots R_0 \cdots & \rightsquigarrow & \ldots \leq \cdots \\ f_0(\ldots) & \rightsquigarrow & -\ldots \\ f_1(\ldots,\cdots) & \rightsquigarrow & \ldots + \cdots \\ f_2(\ldots,\cdots) & \rightsquigarrow & \ldots \times \cdots \\ c_0 & \rightsquigarrow & 0 \\ c_1 & \rightsquigarrow & 1 \end{array}$$

Solution

(a) Les expressions suivantes sont-elles des termes de $\mathcal{L}^+$?
- (i) "0" ("c_0") est un terme de $\mathcal{L}^+$.
- (ii) "$x_1 + 1$" ("$f_1(x_1, c_1)$") est un terme de $\mathcal{L}^+$.
- (iii) "$+x_1$" n'est pas un terme de $\mathcal{L}^+$.
- (iv) "$x_1\times$" n'est pas un terme de $\mathcal{L}^+$.
- (v) "$x_1 \times (0+1)$" ("$f_2(x_1, f_1(c_0, c_1))$") est un terme de $\mathcal{L}^+$.
- (vi) "2" n'est pas un terme de $\mathcal{L}^+$.

(b) Les expressions suivantes sont-elles des formules atomiques de $\mathcal{L}^+$?
- (i′) "$x_1 + 1$" n'est pas une formule atomique de $\mathcal{L}^+$.
- (ii′) "$0 + 0 \neq 1$" ("$f_1(c_0, c_0) \neq c_1$") est une formule atomique de $\mathcal{L}^+$.
- (iii′) "$(x_1 \leq 1) \neq 1$" n'est pas une formule atomique de $\mathcal{L}^+$.
- (iv′) "$\forall x_1(x_1 \leq (0+1))$" n'est pas une formule atomique de $\mathcal{L}^+$ (même si c'est une formule).
- (v′) "$0 + 1 \neq 0 \times 1$" ("$f_1(c_0, c_1) \neq f_2(c_0, c_1)$") est une formule atomique de $\mathcal{L}^+$.

(vi′) "$x_1 \leq 1$" ("$R_0(x_1, c_1)$") est une formule atomique de $\mathcal{L}^+$.

(c) Les expressions suivantes sont-elles des formules de $\mathcal{L}^+$?

(i″) "0" n'est pas une formule de $\mathcal{L}^+$.

(ii″) "$x_1 + 1 \leq x_1$" ("$R_0(f_1(x_1, c_1), x_1)$") est une formule de $\mathcal{L}^+$ (même atomique).

(iii″) "$\forall x_1(x_1 \times (0 + 1))$" n'est pas une formule de $\mathcal{L}^+$.

(iv″) "$1 + (x_1 \times (0 + 1))$" n'est pas une formule de $\mathcal{L}^+$.

(v″) "$(1 + 1) \wedge (0 \leq 1)$" n'est pas une formule de $\mathcal{L}^+$.

(vi″) "$\forall x_1(x_1 \leq (0 + 1))$" ("$\forall x_1(R_0(x_1, f_0(c_0, c_1)))$") est une formule de $\mathcal{L}^+$.

(d) Dans lesquelles des formules données $\mathcal{L}^+$ la variable "x_1" a-t-elle une occurrence libre ?

(i‴) "x_1" a une occurrence libre dans "$x_1 + 1 \leq 1$".

(ii‴) "x_1" n'a pas d'occurrence libre dans "$\forall x_1 \neg(x_1 \neq (0 + 1))$".

(iii‴) "x_1" a une occurrence libre dans "$\exists x_2(1 + (x_2 \times (0 + 1)) \leq x_1)$".

(iv‴) "x_1" a une occurrence libre dans "$\forall x_1(0 \leq x_1) \wedge ((0 \leq 1) \vee 1 \neq x_1)$" (la deuxième).

(v‴) "x_1" n'a pas d'occurrence libre dans "$\forall x_1((0 \leq x_1) \rightarrow (1 \neq x_1))$".

(vi‴) "x_1" n'a pas d'occurrence libre dans "$\forall x_2 \exists x_1 \neg(x_2 \leq x_1)$"

17.11 La méthode des arbres

1. **Question** (3 points) Vérifiez (de manière intuitive) si l'argument suivant, dont les prémisses sont (1) à (10) et dont la conclusion est (11), est valide. A chaque étape, n'utilisez que deux phrases à la fois et en déduisez une troisième. Supposez que l'univers de discours ne contient que des animaux.

   Solution

   (i) De (1) et (5), on conclut :
   (11) Tous les animaux dans la maison tuent des souris.

   (ii) De (8) et (11) on conclut :
   (12) Tous les animaux dans la maison sont des carnivores.

   (iii) De (4) et (12) on conclut :
   (13) Tous les animaux dans la maison chassent la nuit.

   (iv) De (6) et (13) on conclut :
   (14) Tous les animaux qui s'habituent à moi chassent la nuit.

   (v) De (10) et (14) on conclut :
   (15) Tous les animaux qui s'habituent à moi adorent la lune.

   (vi) De (2) et (15) on conclut :
   (16) Tout animal qui s'habitue à moi est susceptible d'être mon ami.

   (vii) De (7) et (16) on conclut :
   (17) Les kangourous ne s'habituent pas à moi.

   (viii) De (9) et (17) on conclut :
   (18) Je déteste les kangourous.

   (ix) De (3) et (18) on conclut :
   (19) J'évite les kangourous.

   Il existe des 'solutions' plus courtes, mais elle présupposes la prémisse additionnelle (bien que évidente) que les kangourous ne sont pas des chats.

2. **Question** (2 points) Donnez des phrases en français dont les formules données sont des formalisations :

   Solution

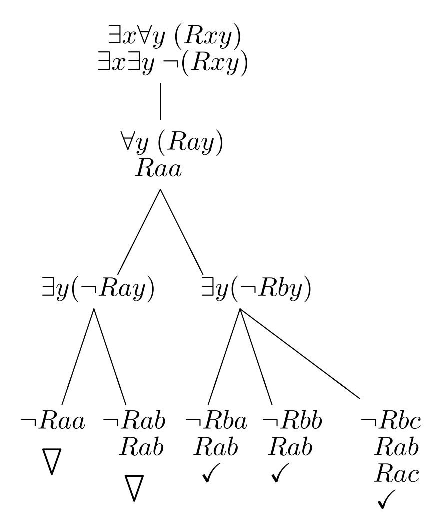
   (a) Voici un exemple d'une phrase dont "$\forall x(Dx \rightarrow \forall y((Cy \wedge Fy) \rightarrow Hxy))$" est la formalisa-

tion : "tous mes amis adorent ce qui est cher et rare", avec "Dx" pour "x est mon ami", "Cx" pour "x est cher", "Fx" pour "x est rare" et "Hxy" pour "x adore y". D'autres exemples : "Tout dalmatien hait tout croyant fou", "Tout bon argument ne possède que des formalisations logiques simples", "Tous les chats aiment tuer toutes les souris qui ont une queue et une peau grise", "Tous les professeurs apprécient les élèves engagés", "Tous les enfants aiment les parents intelligents", "Chaque étudiant réussit les examens faciles et courts."

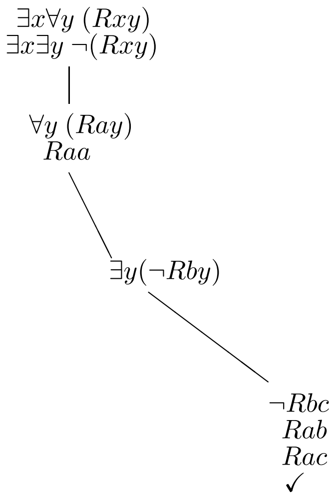
(b) Voici un exemple d'une phrase dont "$\exists x((Dx \wedge Fx) \rightarrow Pax)$" est la formalisation serait la suivante : "il existe quelque chose que Sam achète si elle est jolie et rare", avec "Dx" pour "x est joli", "Fx" pour "x est rare", "a" pour "Sam" et "Pxy" pour "x achète y". D'autres exemples sont : "Il y a quelqu'un que Angelina adopte s'il est jeune et joli."

3. **Question** (3 points) A l'aide de la définition de validité, justifiez la vérité des phrases données.
Solution
(a) Démontrons que $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Gx \rightarrow \neg Hx) \models \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$:
Soit $\mathcal{A}$ une structure et supposons que "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$" et "$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$" soient vrais dans cette structure. Nous devons montrer que la phrase ouverte "$Fx \rightarrow \neg Hx$" est vraie quelle que soit la valeur assignée à "x". Soit h une assignation arbitraire et supposons que "Fx" soit vrai (dans $\mathcal{A}$) sous cette assignation. Alors "Gx" doit également être vrai sous cette assignation, en raison de la vérité de "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$" dans $\mathcal{A}$. Mais si "Gx" est vrai sous cette assignation, alors "$\neg Hx$" l'est également, puisque nous avons supposé que "$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$" était vrai dans $\mathcal{A}$. Quelle que soit l'assignation h, si "Fx" est vrai sous cette assignation, "$\neg Hx$" l'est aussi. Donc "$\forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$" est vrai dans $\mathcal{A}$. Comme tout ce que nous avions présupposé sur $\mathcal{A}$ était que "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$" et "$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$" soient vrais dans $\mathcal{A}$, nous avons démontré que "$\forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$" est une conséquence sémantique de ces deux phrases.
(b) Démontrons que $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \models \neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$:
Soit $\mathcal{A}$ une structure dans laquelle "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$" est vrai. Par conséquent, toute assignation de valeurs dans l'univers de discours de cette structure à la variable "x" satisfait la phrase ouverte "$Fx \rightarrow Gx$". D'après notre condition de satisfaction **S6**, soit toute assignation satisfait "Gx", soit aucune assignation ne satisfait "Fx". D'après la condition **S4**, aucune assignation ne peut alors satisfaire "$Fx \wedge \neg Gx$". D'après la condition **S9** et d'après **S3**, aucune assignation ne peut donc satisfaire "$\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$". Autrement dit, toute assignation doit satisfaire "$\neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$". Donc "$\neg\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$" est vrai dans toute structure dans laquelle "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$" est vrai et la première phrase est une conséquence sémantique de la deuxième.
(c) Démontrons que $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(\neg Gx) \models \exists x(\neg Fx)$:
Soit $\mathcal{A}$ une structure dans laquelle "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$" et "$\exists x(\neg Gx)$" sont vrais. Nous devons montrer qu'il y a une assignation de valeurs qui satisfait "$\neg Fx$". Nous savons qu'il y a une assignation qui satisfait "$\neg Gx$". Or, cette assignation ne peut pas satisfaire "Fx", puisque dans ce cas, nous savons par la première prémisse qu'elle devrait également satisfaire "Gx", ce qui est impossible. Par la clause pour la négation **S3**, cette assignation doit donc satisfaire "$\neg Fx$".

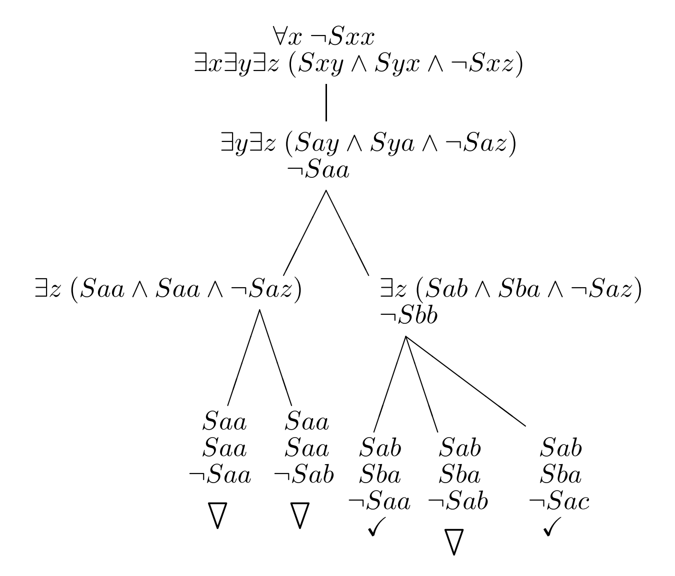
4. **Question** (4 points) A l'aide de la méthode des arbres, trouvez des modèles pour les phrases données.
Solution
(a) D'après l'ancienne méthode, voici l'arbre pour "$\exists x\forall y\ (Rxy) \wedge \exists x\exists y\ (\neg Rxy)$", :



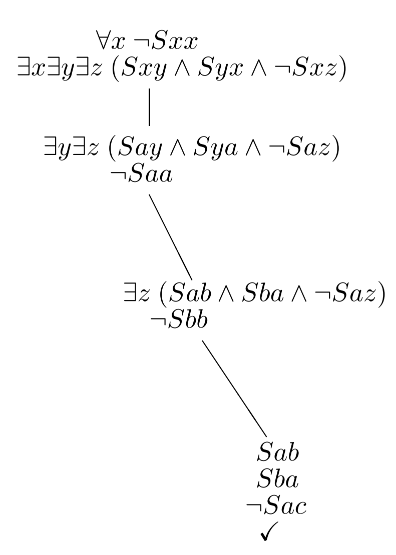
Les branches marquées par "✓" représentent des structures dans lesquelles la phrases initiale est vraie. Elle sera vraie, par exemple, dans une structure à deux individus, a et b, où la relation R obtient entre a et a, a et b et entre aucune autre paire. Dans cette structure, il est vrai qu'il existe un x (à savoir a) qui porte R à tout ce qui existe et qu'il existe deux individus (à savoir b et a dans cet ordre) qui ne sont pas reliés par R. Avec la nouvelle méthode, nous aurions pu nous contenter de l'arbre suivant :



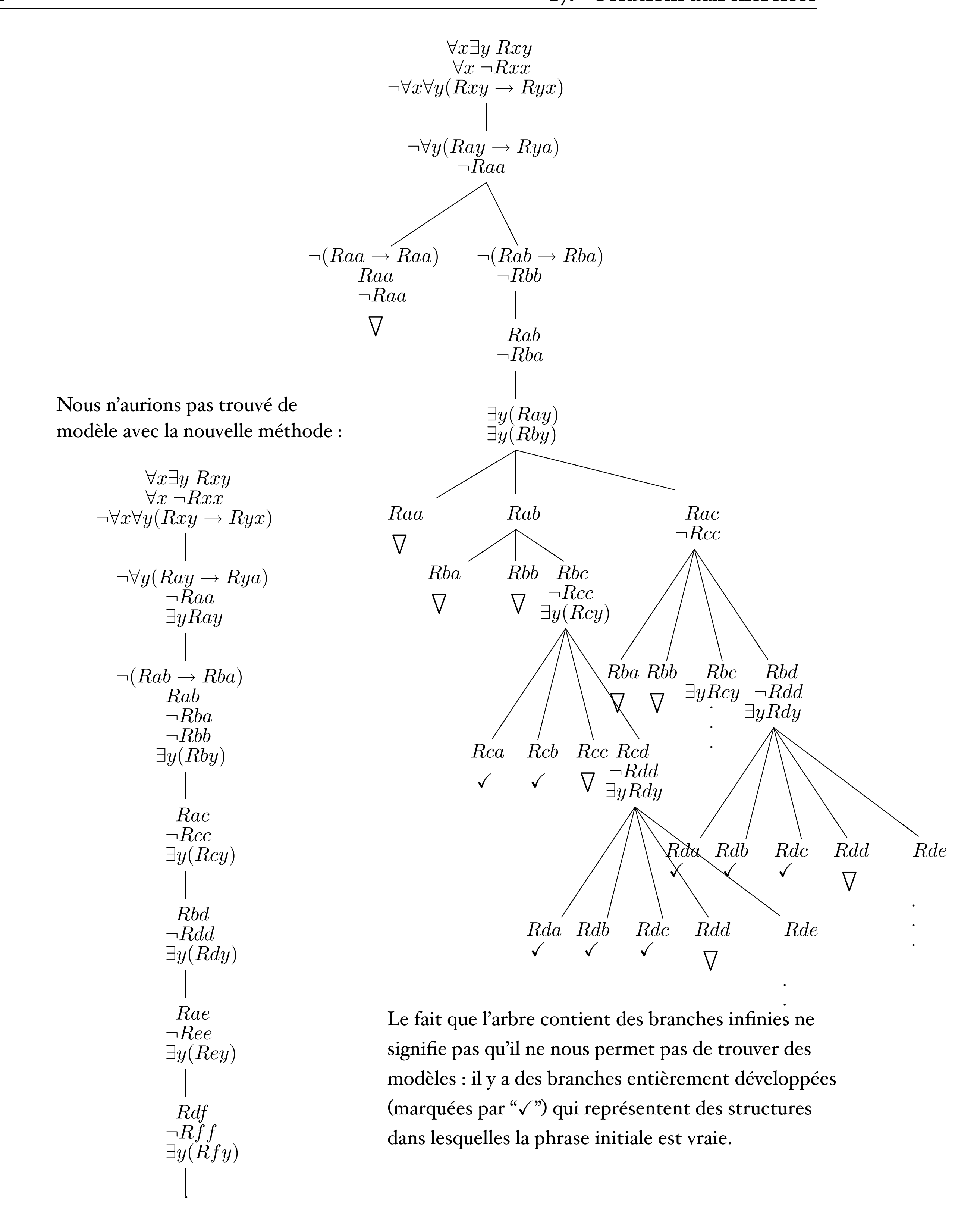
(b) En utilisant l'ancienne méthode, voici l'arbre pour "$\forall x\ (\neg Sxx) \wedge \exists x \exists y \exists z\ (Sxy \wedge Syx \wedge \neg Sxz)$" :



En utilisant la nouvelle méthode, l'arbre sera le suivant :



(c) L'arbre pour "$\forall x \exists y\, (Rxy) \wedge \forall x\, (\neg Rxx) \wedge \neg \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$" avec l'ancienne méthode :



Nous n'aurions pas trouvé de modèle avec la nouvelle méthode :

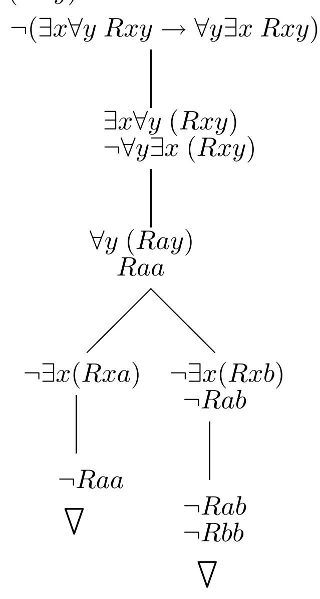
Le fait que l'arbre contient des branches infinies ne signifie pas qu'il ne nous permet pas de trouver des modèles : il y a des branches entièrement développées (marquées par "✓") qui représentent des structures dans lesquelles la phrase initiale est vraie.

(d) L'arbre pour "$\forall x \exists y\ (Rxy) \wedge \forall x\ (\neg Rxx) \wedge \exists x \exists y (Rxy \wedge \neg Ryx)$" est le même que celui pour (4c), avec une application de la règle de conjonction à la place de celle pour une implication niée.

5. **Question** (4 points) Déterminez si les phrases données sont valides à l'aide de la méthode des arbres.

Solution

(a) Comme pour la logique propositionnelle, nous vérifions la validité d'une phrase en prouvant que toutes les branches de l'arbre pour sa négation se ferment. Voici l'arbre qui vérifie la validité de "$\exists x \forall y\ (Rxy) \rightarrow \forall y \exists x\ (Rxy)$" :



(b) Voici l'arbre montrant que "$\forall x\ (Fx) \rightarrow \exists x\ (Fx)$" est valide :

$$\neg(\forall x\ Fx \rightarrow \exists x\ Fx)$$

$$\forall x\ Fx$$
$$\neg \exists x\ Fx$$

$$\neg Fa$$
$$Fa$$
$$\nabla$$

L'introduction de la constante pour instantier la quantification universelle est légitime puisque nous excluons les univers de discours vides (cf. leçon 12).

(c) Voici l'arbre pour "$\neg \exists y\ (Py)\ \rightarrow \forall y\ (Fy \rightarrow \exists x Fx)$" :

$$\neg(\neg \exists y\ Py\ \rightarrow \forall y\ (Fy \rightarrow \exists x Fx))$$
$$\neg \exists y\ Py$$
$$\neg \forall y\ (Fy \rightarrow \exists x Fx)$$

$$\neg(Fa \rightarrow \exists x Fx)$$

$$\neg \exists x (Fx)$$
$$Fa$$

$$\neg Fa$$
$$\nabla$$

Il n'est pas étonnant que "$\neg \exists y Py$" ne joue aucun rôle dans la preuve de validité : dans la

logique des prédicats, comme dans la logique propositionnelle, n'importe quelle implication est valide si son conséquent est lui-même valide.

(d) L'arbre pour "$\forall x\,(Fx \rightarrow (Gx \wedge Hx)) \rightarrow \forall x\,((Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx)$" :

$$\neg(\forall x\,(Fx \rightarrow (Gx \wedge Hx)) \rightarrow \forall x\,((Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx))$$

|

$$\forall x\,(Fx \rightarrow (Gx \wedge Hx))$$
$$\neg\forall x\,((Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx)$$

|

$$\neg((Fa \wedge Ga) \rightarrow Ha)$$

|

$$Fa$$
$$Ga$$
$$\neg Ha$$
$$(Fa \rightarrow (Ga \wedge Ha)$$

/ \

$\neg Fa$ Ga, Ha

∇ ∇

6. **Question** (4 points) Soient les abréviations suivantes :

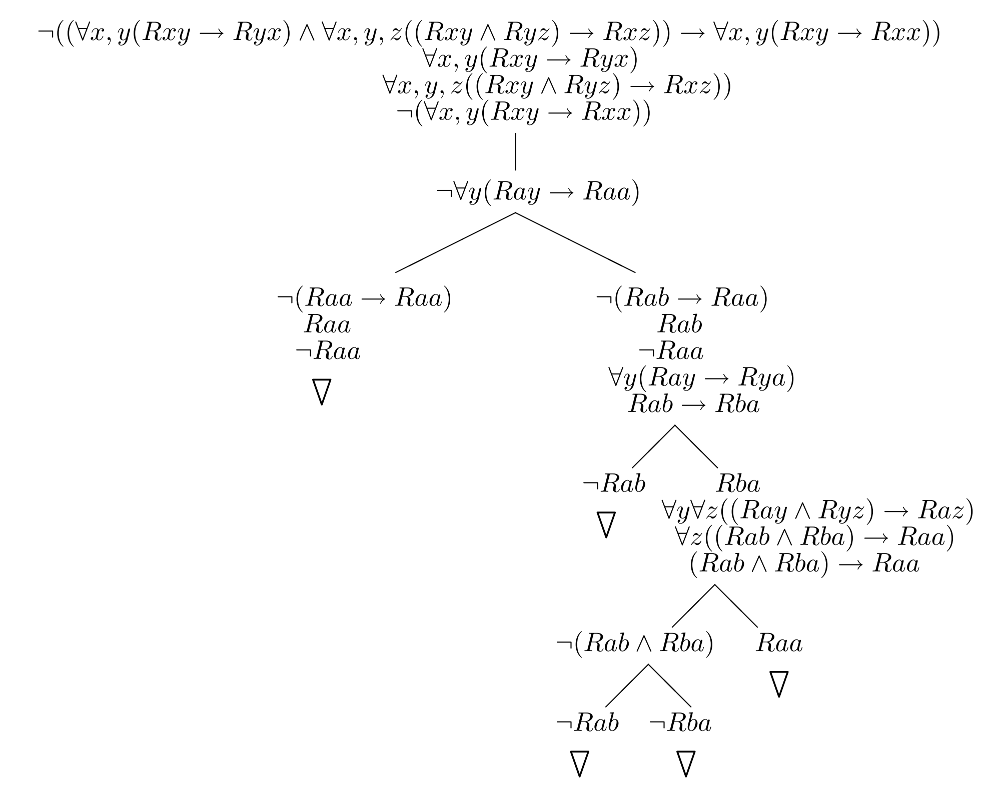
"p" pour	"$\forall x, y(Rxy \rightarrow Ryx)$"	("la relation R est symétrique")
"q" pour	"$\forall x, y, z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$"	("la relation R est transitive")
"r" pour	"$\forall x, y(Rxy \rightarrow Rxx)$"	("la relation R est réflexive")
"s" pour	"$\forall x\exists y(Rxy)$"	("la relation R est 'ouverte'")
"t" pour	"$\forall x\forall y\,(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$"	("la relation R est anti-symétrique")

Solution

(a) Prouvons, par la méthode des arbres, que toute relation symétrique et transitive est automatiquement réflexive :

(11) $(\forall x\forall y(Rxy \rightarrow Ryx) \wedge \forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)) \rightarrow \forall x\forall y(Rxy \rightarrow Rxx)$

Voici l'arbre pour la négation de (11) :



(b) Montrons que nous ne pouvons pas, par la méthode des arbres, trouver un modèle pour la phrase suivante :

$$\neg((\forall x \forall y \forall z\ ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz) \wedge \forall x \exists y(Rxy) \wedge \forall x \forall y\ (Rxy \to \neg Ryx)) \to\ \exists x \forall y(\neg Ryx))$$

En examinant les quatre phrases dont il faut tester la consistance (les trois antécédents et la négation de la conclusion), nous remarquons qu'elles nous donnent un arbre infini : Si nous instancions "$\forall x \exists y(Rxy)$" par a, "$\exists y(Ray)$" nous force à introduire une nouvelle constante, "*b*" – pour laquelle "$\forall x \exists y(Rxy)$" doit être instanciée à nouveau. "$\exists y(Rby)$", dans l'ancienne méthode, nous donne trois branches : nous fermons la première, "Rba", en instanciant "$\forall x \forall y(Rxy \to \neg Ryx)$" pour a et ensuite pour "*b*" et nous fermons la deuxième, "Rbb" en l'instanciant deux fois par "*b*", mais nous ne pouvons pas fermer de cette manière la troisième, "Rbc" – qui nous donnera donc "$\exists y(Rcy)$" et une nouvelle constante. Cette progression nous empêchera d'instancier "$\neg\exists x \forall y \neg(Ryx)$" pour toutes les constantes, ce qui serait nécessaire pour utiliser la transitivité afin de fermer la branche par l'antisymétrie. La phrase dit qu'une relation transitive, ouverte et antisymétrique ne doit pas forcément avoir un élément minimal. Elle n'est vraie que dans des structures ayant un univers de discours infini.

(c) Un exemple d'une structure dans laquelle (2) est vraie est le suivant : prenons comme univers de discours les nombres entiers $\mathbb{Z}$, et interprétons une seule signe de relation binaire R sur $\mathbb{Z}$ par la relation $\ldots < \cdots$. Il est clair que cette relation est antisymétrique et qu'elle est transitive et ouverte (puisqu'il y a, pour tout nombre entier, un nombre entier qui est plus grand). Il est également évident, cependant, qu'il n'y a pas d'élément minimal par rapport à cette relation, à savoir qu'il n'y a pas de nombre entier le plus petit.
Cet exercice montre qu'il est possible, lorsqu'une phrase n'a que des modèles finis, que nous n'en trouvions aucun par la méthode des arbre, ancienne ou nouvelle.

17.12 La déduction naturelle

1. **Question** (14 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents donnés :
   Solution
   (a) Voici une preuve de : "$\forall x(Fx \to \neg Gx), \forall x(Hx \to Gx) \vdash \forall x(Fx \to \neg Hx)$"

1	$\forall x(Fx \to \neg Gx), \forall x(Hx \to Gx)$		$\vdash \forall x(Fx \to \neg Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \to \neg Gx), \forall x(Hx \to Gx)$		$\vdash \forall x(Hx \to Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Fx \to \neg Gx), \forall x(Hx \to Gx)$	Fa	$\vdash^* Fa$	supposition
4	$\forall x(Fx \to \neg Gx), \forall x(Hx \to Gx)$	Fa	$\vdash^* Fa \to \neg Ga$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \to \neg Gx), \forall x(Hx \to Gx)$	Fa	$\vdash^* \neg Ga$	de (3) et (4) par (MP)
6	$\forall x(Fx \to \neg Gx), \forall x(Hx \to Gx)$	Fa	$\vdash^* Ha \to Ga$	de (2) avec (SU)
7	$\forall x(Fx \to \neg Gx), \forall x(Hx \to Gx)$	Fa	$\vdash^* \neg Ha$	de (6) et (5) avec (MT)
8	$\forall x(Fx \to \neg Gx), \forall x(Hx \to Gx)$		$\vdash Fa \to \neg Ha$	de (3) et (7) avec (PC)
9	$\forall x(Fx \to \neg Gx), \forall x(Hx \to Gx)$		$\vdash \forall x(Fx \to \neg Hx)$	de (8) avec (GU)

   (b) Voici une preuve de "$\forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx) \vdash \forall x(Fx \to \neg Hx)$" :

1	$\forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx)$		$\vdash \forall x(Gx \to \neg Fx)$	prémisse
2	$\forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx)$		$\vdash \forall x(Hx \to Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx)$	Fa	$\vdash^* Fa$	supposition
4	$\forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx)$	Fa	$\vdash^* Ga \to \neg Fa$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx)$	Fa	$\vdash^* \neg\neg Fa$	de (3) avec (DN)
6	$\forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx)$	Fa	$\vdash^* \neg Ga$	de (5) et (4) avec (MT)
7	$\forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx)$	Fa	$\vdash^* Ha \to Ga$	de (2) avec (SU)
8	$\forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx)$	Fa	$\vdash^* \neg Ha$	de (6) et (7) avec (MT)
9	$\forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx)$		$\vdash Fa \to \neg Ha$	de (3) et (8) avec (PC)
10	$\forall x(Gx \to \neg Fx), \forall x(Hx \to Gx)$		$\vdash \forall x(Fx \to \neg Hx)$	de (9) avec (GU)

   (c) Voici une preuve de "$\forall x(Fx \to Gx) \vdash \forall x(Fx) \to \forall x(Gx)$" :

1	$\forall x(Fx \to Gx)$		$\vdash \forall x(Fx \to Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* \forall x(Fx)$	supposition
3	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* Fa \to Ga$	de (1) avec (SU)
4	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* Fa$	de (2) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* Ga$	de (3) et (4) par (MP)
6	$\forall x(Fx \to Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* \forall x(Gx)$	de (5) avec (GU)
7	$\forall x(Fx \to Gx)$		$\vdash \forall x(Fx) \to \forall x(Gx)$	de (2) et (6) avec (PC)

(d) Voici une preuve de "$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx) \ \vdash \ \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$" :

1	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$		$\vdash \ \forall x(Gx \rightarrow \neg Hx)$	prémisse
2	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$		$\vdash \ \exists x(Fx \wedge Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \ Fa \wedge Ga$	supposition
4	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \ Ga \rightarrow \neg Ha$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \ Ga$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
6	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \ \neg Ha$	de (5) et (4) par (MP)
7	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \ Fa$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
8	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \ Fa \wedge \neg Ha$	de (6) et (7) avec ($\wedge$**I**)
9	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \ \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$	de (8) avec (GE)
10	$\forall x(Gx \rightarrow \neg Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$		$\vdash \ \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$	de (1), (3) et (9) avec (SE)

L'application de (SE) est légitime parce que ni la conclusion obtenue de la supposition du disjoint typique ni les suppositions faites lors de sa dérivation ne contiennent "a".

(e) Voici une preuve de "$\forall x(Hx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx) \ \vdash \ \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$" :

1	$\forall x(Hx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$		$\vdash \ \forall x(Hx \rightarrow Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Hx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$		$\vdash \ \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Hx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^* \ Fa \wedge \neg Ga$	supposition
4	$\forall x(Hx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^* \ Ha \rightarrow Ga$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Hx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^* \ \neg Ga$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
6	$\forall x(Hx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^* \ \neg Ha$	de (5) et (4) avec (MT)
7	$\forall x(Hx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^* \ Fa$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
8	$\forall x(Hx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^* \ Fa \wedge \neg Ha$	de (6) et (7) avec ($\wedge$**I**)
9	$\forall x(Hx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$	$Fa \wedge \neg Ga$	$\vdash^* \ \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$	de (8) avec (GE)
10	$\forall x(Hx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge \neg Gx)$		$\vdash \ \exists x(Fx \wedge \neg Hx)$	de (1), (3) et (9) avec (SE)

(f) Voici une preuve de "$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \ \vdash \ \exists x(Fx) \rightarrow \exists x(Gx)$" :

1	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$		$\vdash \ \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists x(Fx)$	$\vdash^* \ \exists x(Fx)$	supposition
3	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* \ Fa$	supposition
4	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* \ Fa \rightarrow Ga$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* \ Ga$	de (3) et (4) par (MP)
6	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists x(Fx), Fa$	$\vdash^* \ \exists x(Gx)$	de (5) avec (GE)
7	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists x(Fx)$	$\vdash^* \ \exists x(Gx)$	de (2), (3) et (6) avec (SE)
8	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$		$\vdash \exists x(Fx) \rightarrow \exists x(Gx)$	de (2) et (7) avec (PC)

(g) Voici une preuve de "$\forall x(Fx \wedge Gx) \ \vdash \ \forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$" :

1	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \ \forall x(Fx \wedge Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \ Fa \wedge Ga$	de (1) avec (SU)
3	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \ Fa$	de (2) avec ($\wedge$**E**)
4	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \ \forall x(Fx)$	de (3) avec (GU)
5	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \ Ga$	de (2) avec ($\wedge$**E**)
6	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \ \forall x(Gx)$	de (5) avec (GU)
7	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \ \forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx)$	de (4) et (6) avec ($\wedge$**I**)

(h) Voici une preuve de "$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx) \ \vdash\ \exists x(Fx \vee Gx)$" :

1	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\vdash\ \exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	prémisse
2	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Fx) \quad \vdash^*\ \exists x(Fx)$	supposition
3	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Fx), Fa \quad \vdash^*\ Fa$	supposition
4	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Fx), Fa \quad \vdash^*\ Fa \vee Ga$	de (3) avec (∨**I**)
5	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Fx), Fa \quad \vdash^*\ \exists x(Fx \vee Gx)$	de (4) avec (GE)
6	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Fx) \quad \vdash^*\ \exists x(Fx \vee Gx)$	de (2), (3) et (5) avec (SE)
7	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Gx) \quad \vdash^*\ \exists x(Gx)$	supposition
8	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Gx), Ga \quad \vdash^*\ Ga$	supposition
9	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Gx), Ga \quad \vdash^*\ Fa \vee Ga$	de (8) avec (∨**I**)
10	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Fx), Ga \quad \vdash^*\ \exists x(Fx \vee Gx)$	de (9) avec (GE)
11	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\exists x(Fx) \quad \vdash^*\ \exists x(Fx \vee Gx)$	de (7), (8) et (10) avec (SE)
12	$\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx)$	$\vdash\ \exists x(Fx \vee Gx)$	de (1,2,6,7,11) avec (∨**E**)

(i) Voici une preuve de "$\exists x(Fa \rightarrow Fx) \ \vdash\ Fa \rightarrow \exists x(Fx)$" :

1	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$\vdash\ \exists x(Fa \rightarrow Fx)$	prémisse
2	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa \rightarrow Fb \quad \vdash^*\ Fa \rightarrow Fb$	supposition
3	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa \rightarrow Fb, Fa \quad \vdash^*\ Fa$	supposition
4	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa \rightarrow Fb, Fa \quad \vdash^*\ Fb$	de (2) et (3) par (MP)
5	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa \rightarrow Fb, Fa \quad \vdash^*\ \exists x(Fx)$	de (4) avec (GE)
6	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$Fa \rightarrow Fb \quad \vdash^*\ Fa \rightarrow \exists x(Fx)$	de (3) et (5) avec (PC)
7	$\exists x(Fa \rightarrow Fx)$	$\vdash\ Fa \rightarrow \exists x(Fx)$	de (1), (2) et (6) avec (SE)

(j) Voici une preuve de "$\exists x(Fx) \rightarrow Fa \ \vdash\ \forall x(Fx \rightarrow Fa)$" :

1	$\exists x(Fx) \rightarrow Fa$	$\vdash\ \exists x(Fx) \rightarrow Fa$	prémisse
2	$\exists x(Fx) \rightarrow Fa$	$Fb \quad \vdash^*\ Fb$	supposition
3	$\exists x(Fx) \rightarrow Fa$	$Fb \quad \vdash^*\ \exists x(Fx)$	de (2) avec (GE)
4	$\exists x(Fx) \rightarrow Fa$	$Fb \quad \vdash^*\ Fa$	de (2) et (3) par (MP)
5	$\exists x(Fx) \rightarrow Fa$	$\vdash\ Fb \rightarrow Fa$	de (2) et (4) avec (PC)
6	$\exists x(Fx) \rightarrow Fa$	$\vdash\ \forall x(Fx \rightarrow Fa)$	de (5) avec (GU)

Cette preuve est plus compliquée que nécessaire : il est possible de prouver "$\forall x(Fx \rightarrow Fa)$" sans aucune prémisse, c'est-à-dire que "$\forall x(Fx \rightarrow Fa)$" est valide et s'ensuit de n'importe quel prémisse, comme suit :

1	$Fa \quad \vdash^*\ Fa$	supposition
2	$Fa \quad \vdash^*\ \exists x(Fx)$	de (2) avec (GE)
3	$\vdash\ Fa \rightarrow \exists x(Fx)$	de (1) et (3) avec (PC)

(k) Voici une preuve de "$\exists x \forall y(Rxy) \vdash \forall y \exists x(Rxy)$" :

1	$\exists x \forall y(Rxy)$	$\vdash\ \exists x \forall y(Rxy)$	prémisse
2	$\exists x \forall y(Rxy)$	$\forall y(Ray) \quad \vdash^*\ \forall y(Ray)$	supposition
3	$\exists x \forall y(Rxy)$	$\forall y(Ray) \quad \vdash^*\ Rab$	de (2) avec (SU)
4	$\exists x \forall y(Rxy)$	$\forall y(Ray) \quad \vdash^*\ \exists x(Rxb)$	de (3) avec (GE)
5	$\exists x \forall y(Rxy)$	$\forall y(Ray) \quad \vdash^*\ \forall y \exists x(Rxb)$	de (4) avec (GU)
6	$\exists x \forall y(Rxy)$	$\vdash\ \forall y \exists x(Rxy)$	de (1), (2) et (5) avec (SE)

L'application de (SE) est légitime parce que la preuve de "$\forall y \exists x(Rxb)$" ne dépend pas des suppositions ou prémisses, autre que le disjoint typique, dans lesquelles "a" a une occurrence.

(l) Voici une preuve de "$\exists x \exists y(Rxy) \vdash \exists y \exists x(Rxy)$" :

1	$\exists x \exists y(Rxy)$		$\vdash$	$\exists x \exists y(Rxy)$	prémisse
2	$\exists x \exists y(Rxy)$	$\exists y(Ray)$	$\vdash^*$	$\exists y(Ray)$	supposition
3	$\exists x \exists y(Rxy)$	$\exists y(Ray), Rab$	$\vdash^*$	Rab	supposition
4	$\exists x \exists y(Rxy)$	$\exists y(Ray), Rab$	$\vdash^*$	$\exists x(Rxb)$	de (3) avec (GE)
5	$\exists x \exists y(Rxy)$	$\exists y(Ray), Rab$	$\vdash^*$	$\exists y \exists x(Rxb)$	de (4) avec (GE)
6	$\exists x \exists y(Rxy)$	$\exists y(Ray)$	$\vdash^*$	$\exists y \exists x(Rxb)$	de (2), (3) et (5) avec (SE)
7	$\exists x \exists y(Rxy)$		$\vdash$	$\exists y \exists x(Rxy)$	de (1), (2) et (6) avec (SE)

(m) Voici une preuve de "$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \forall x(\exists y(Fy \wedge Rxy) \rightarrow \exists y(Gy \wedge Rxy))$" :

1	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$		$\vdash$	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray)$	$\vdash^*$	$\exists y(Fy \wedge Ray)$	supposition
3	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray), Fb \wedge Rab$	$\vdash^*$	$Fb \wedge Rab$	supposition
4	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray), Fb \wedge Rab$	$\vdash^*$	Fb	de (3) avec ($\wedge$**E**)
5	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray), Fb \wedge Rab$	$\vdash^*$	$Fb \rightarrow Gb$	de (1) avec (SU)
6	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray), Fb \wedge Rab$	$\vdash^*$	Gb	de (4) et (5) par (MP)
7	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray), Fb \wedge Rab$	$\vdash^*$	Rab	de (3) avec ($\wedge$**E**)
8	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray), Fb \wedge Rab$	$\vdash^*$	$Gb \wedge Rab$	de (6) et (7) avec ($\wedge$**I**)
9	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray), Fb \wedge Rab$	$\vdash^*$	$\exists y(Gy \wedge Ray)$	de (8) avec (GE)
10	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	$\exists y(Fy \wedge Ray)$	$\vdash^*$	$\exists y(Fy \wedge Ray)$	de (2), (3) et (9) avec (SE)
11	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$		$\vdash$	$\exists y(Fy \wedge Ray) \rightarrow \exists y(Fy \wedge Ray)$	de (2) et (10) avec (PC)
12	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$		$\vdash$	$\forall x(\exists y(Fy \wedge Rxy) \rightarrow \exists y(Fy \wedge Rxy))$	de (11) avec (GU)

(n) Pour prouver "$\exists x(Fx \wedge Gx), \exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow \neg Rxy)) \vdash \exists x(Fx \wedge \neg \forall y(Fy \rightarrow Rxy))$", nous adoptons les abréviations suivantes :

"**A**"	pour	"$\exists x(Fx \wedge Gx)$"
"**B**"	pour	"$\exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow \neg Rxy))$"
"**C**"	pour	"$Fb \wedge \forall y(Gy \rightarrow \neg Rby)$"
"**D**"	pour	"$Fa \wedge Ga$"
"**E**"	pour	"$\forall y(Fy \rightarrow Rby)$"

Voici la preuve :

1	**A**, **B**		$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$	prémisse
2	**A**, **B**		$\vdash \exists x(Fx \wedge \forall y(Gy \rightarrow \neg Rxy))$	prémisse
3	**A**, **B**	**C**	$\vdash^* Fb \wedge \forall y(Gy \rightarrow \neg Rby)$	supposition
4	**A**, **B**	**C**	$\vdash^* \forall y(Gy \rightarrow \neg Rby)$	de (3) par ($\wedge$**E**)
5	**A**, **B**	**C**, **D**	$\vdash^* Fa \wedge Ga$	supposition
6	**A**, **B**	**C**, **D**	$\vdash^* Ga \rightarrow \neg Rba$	de (4) avec (SU)
7	**A**, **B**	**C**, **D**	$\vdash^* Ga$	de (5) avec ($\wedge$**E**)
8	**A**, **B**	**C**, **D**	$\vdash^* \neg Rba$	de (6) et (7) par (MP)
9	**A**, **B**	**C**, **D**, **E**	$\vdash^* \forall y(Fy \rightarrow Rby)$	supposition
10	**A**, **B**	**C**, **D**, **E**	$\vdash^* Fa \rightarrow Rba$	de (9) avec (SU)
11	**A**, **B**	**C**, **D**, **E**	$\vdash^* Fa$	de (5) avec ($\wedge$**E**)
12	**A**, **B**	**C**, **D**, **E**	$\vdash^* Rba$	de (11) et (10) par (MP)
13	**A**, **B**	**C**, **D**	$\vdash^* \neg\forall y(Fy \rightarrow Rby)$	de (9), (8) et (12) par (RAA)
14	**A**, **B**	**C**, **D**	$\vdash^* Fb$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
15	**A**, **B**	**C**, **D**	$\vdash^* Fb \wedge \neg\forall y(Fy \rightarrow Rby)$	de (13) et (14) avec ($\wedge$**I**)
16	**A**, **B**	**C**, **D**	$\vdash^* \exists x(Fx \wedge \neg\forall y(Fy \rightarrow Rxy))$	de (15) avec (GE)
17	**A**, **B**	**C**	$\vdash^* \exists x(Fx \wedge \neg\forall y(Fy \rightarrow Rxy))$	de (1), (5), (16) avec (SE)
18	**A**, **B**		$\vdash \exists x(Fx \wedge \neg\forall y(Fy \rightarrow Rxy))$	de (2), (3), (17) avec (SE)

2. **Question** (6 points) Dites si les applications données des règles de déduction naturelle pour les quantificateurs sont correctes. Si elles ne le sont pas, dites pourquoi.
Solution
(a) Application de (SU) incorrecte :

1	$\forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	prémisse
2	$\forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \exists z(Faa \wedge Gaz)$	de (1) par (SU)

Des occurrences de deux variables différentes, "x" et "z", ont été substituées par "a".

(b) Application de (SU) incorrecte :

1	$\forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	prémisse
2	$\forall x\exists z(Fxz \wedge Gxz)$	$\vdash \exists z(Faz \wedge Gbz)$	de (1) par (SU)

La substitution de "x" par "a" n'était pas uniforme (ni celle de "x" par "b") : il faut remplacer *toutes* les occurrences de la même variable par la même constante.

(c) Application correcte de (GE) :

1	Fba	$\vdash Fba$	prémisse
2	Fba	$\vdash \exists y(Fby)$	de (1) par (GE)

La constante "a" est libre pour "y" dans "Fba", puisqu'elle ne contient aucune occurrence de "y".

(d) Application incorrecte de (GE) :

1	$\exists x(Fxa)$	$\vdash \exists x(Fxa)$	prémisse
2	$\exists x(Fxa)$	$\vdash \exists y\exists x(Fxx)$	de (1) par (GE)

On substitue "a" par une variable pour laquelle elle n'est pas libre dans la formule où elle se trouve ("$\exists x\exists x(Fxx)$" aurait également été incorrecte). En outre, on substitue "a" par une

variable qui n'est pas liée par le quantificateur introduit.

(e) Application incorrecte de (GU) :

1	$Fab \to \forall x(Gax)$	$\vdash Fab \to \forall x(Gax)$	prémisse
2	$Fab \to \forall x(Gax)$	$\vdash \forall y(Fay \to \forall x(Gax))$	de (1) par (GU)

"a" a une occurrence dans la prémisse dont dépend la 'preuve' de "$Fab \to \forall x(Gax)$".

(f) Application incorrecte de (SE) :

1	$\exists x(Fxa \land Gbx)$	$\vdash \exists x(Fxa \land Gbx)$	prémisse
2	$\exists x(Fxa \land Gbx)$	$\vdash Fba \land Gbb$	de (1) par (SE)

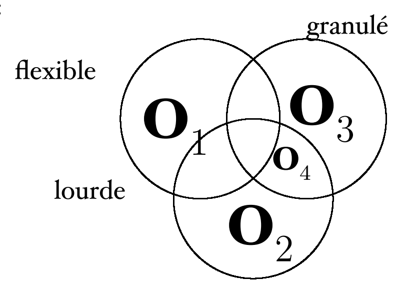
(SE) doit éliminer une supposition, celle du disjoint typique. Et "b" a une occurrence dans une prémisse.

17.13 Formalisation dans la logique des prédicats

1. **Question** (1 point) Faites un diagramme de Venn pour la phrase suivante :

   Une chose est flexible si et seulement si elle est soit granulée soit lourde.

   Solution Voici le diagramme :

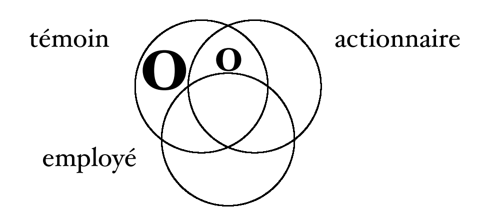


   Pour l'implication de gauche à droite, nous dessinons la premier "**O**" ("$\mathbf{O}_1$"). Celle de gauche à droite est équivalente à la conjonction de "tout ce qui est lourd mais n'est pas granulé est flexible" ("$\mathbf{O}_2$"), de "tout ce qui est granulé mais n'est pas lourd est flexible" ("$\mathbf{O}_3$") et de "tout ce qui est lourd est granulé est flexible" ("$\mathbf{O}_4$").

2. **Question** (5 points) Formalisez les arguments donnés dans le langage de la logique des prédicats et vérifiez s'ils sont valides avec des diagrammes de Venn :
   Solution
   (a) L'inférence "Tous les témoins qui sont des actionnaires sont des employés. Tous les témoins sont soit des employés, soit des actionnaires. Donc, tous les témoins sont des employés." est formalisée comme suit :

$$\text{(12)}\qquad \frac{\begin{array}{c}\forall x\ ((x \text{ est un témoin} \land x \text{ est un actionnaire}) \to\ x \text{ est un employé})\\ \forall x\ (x \text{ est un témoin} \to\ (x \text{ est un employé} \lor x \text{ est un actionnaire}))\end{array}}{\forall x\ (x \text{ est un témoin} \to\ x \text{ est un employé})}$$

   La vérification de la validité de (12) se fait comme suit : si quelqu'un est un témoin, il est soit employé, soit actionnaire (deuxième prémisse). S'il est actionnaire, il est aussi employé (première prémisse). Qu'il soit actionnaire ou non, il sera donc certainement un employé.



(b) L'inférence “Toute personne qui connaît Jeanne et Marie admire Jeanne. Quelques personnes qui connaissent Jeanne ne l'admirent pas. Donc, il existe quelqu'un qui connaît Jeanne mais pas Marie.” est formalisée comme suit :

(13)
$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ ((x \text{ connaît Marie} \wedge x \text{ connaît Jeanne}) \rightarrow\ x \text{ admire Jeanne})\\ \exists x\ (x \text{ connaît Jeanne} \wedge \neg(x \text{ admire Jeanne}))\end{array}}{\exists x\ (x \text{ connaît Jeanne} \wedge \neg(x \text{ connaît Marie}))}$$

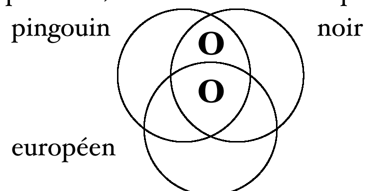
La vérification de la validité de (13) se fait comme suit : si tout le monde qui connaît Jeanne connaîssait également Marie, la première prémisse s'appliquerait à tous les gens qui connaissent Marie. Alors tous ces gens admireraient Jeanne et la deuxième prémisse ne pourrait pas être vraie.

connaissance de Marie — connaissance de Jeanne — admirateur de Jeanne — O — X

(c) L'inférence “Aucun pingouin européen n'est noir ; tous les pingouins noirs sont européen. Donc, aucun pingouin n'est noir.” est formalisée comme suit :

(14)
$$\frac{\begin{array}{c}\neg\exists x\ (x \text{ est un pingouin} \wedge x \text{ est européen} \wedge x \text{ est noir})\\ \forall x\ ((x \text{ est un pingouin} \wedge x \text{ est noir }) \rightarrow\ x \text{ européen})\end{array}}{\neg\exists x\ (x \text{ est un pingouin} \wedge x \text{ est noir})}$$

La vérification de la validité de (14) se fait comme suit : s'il y avait des pingouins noirs, alors ils seraient européens (deuxième prémisse). Mais ceci est exclu par la première prémisse.

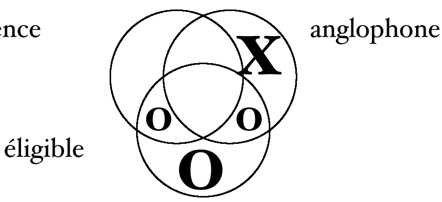


(d) L'inférence “Seuls les maîtres de conférence parlant anglais sont éligibles ; certaines personnes parlent anglais mais ne sont pas des maîtres de conférence ; donc certaines personnes qui ne sont pas éligibles parlent anglais.” est formalisée comme suit :

(15)
$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ (x \text{ est éligible} \rightarrow\ (x \text{ est un maître de conférence} \wedge x \text{ parle l'anglais}))\\ \exists x\ (x \text{ parle l'anglais} \wedge\neg(x \text{ est un maître de conférence}))\end{array}}{\exists x\ (x \text{ parle l'anglais} \wedge\neg(x \text{ est éligible}))}$$

La vérification de la validité de (15) se fait comme suit : si tous ceux qui parlent anglais étaient éligibles, alors, par la deuxième prémisse, au moins une personne qui n'est pas maître de conférence serait éligible. Mais ceci est exclu par la première prémisse.

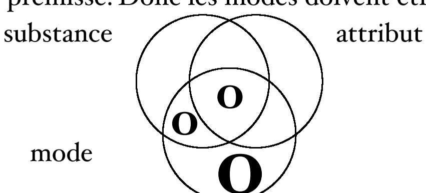




(e) L'inférence "Tout est soit une substance, soit un attribut ; les modes ne sont pas de substances. Donc, les modes sont des attributs." est formalisée comme suit :

$$\text{(16)}\qquad \frac{\begin{array}{c}\forall x\ (x \text{ est une substance} \vee x \text{ est un attribut})\\ \forall x\ (x \text{ est un mode} \rightarrow\ \neg(x \text{ est une substance}))\end{array}}{\forall x\ (x \text{ est un mode} \rightarrow\ x \text{ est attribut})}$$

La vérification de la validité de (16) se fait comme suit : tout ce qui est un mode doit, par la première prémisse, être soit une substance, soit un attribut. Or, un mode ne peut pas être une substance, par la deuxième prémisse. Donc les modes doivent être des attributs.



3. **Question** (2 points) Formalisez les phrases données dans le langage de la logique des prédicats.
Solution

(a)	Si tous les commandeurs doivent être renversés, alors aucun commandeur ne doit pas être renversé.	$\forall x\ (x \text{ est un commandeur} \rightarrow\ x \text{ doit être renversé}) \rightarrow \neg\exists x\ (x \text{ est un commandeur} \wedge \neg(x \text{ doit être renversé}))$
(b)	Tout oiseau qui n'est ni nuisible ni dangereux n'est pas un rapace.	$\forall x((x \text{ est un oiseau} \wedge \neg(x \text{ est nuisible}) \wedge \neg(x \text{ est dangereux})) \rightarrow \neg(x \text{ est un rapace}))$
(c)	Quelques champignons sont à la fois répandus et vénéneux.	$\exists x(x \text{ est un champignon} \wedge x \text{ est répandu} \wedge x \text{ est vénéneux})$
(d)	Quelques champignons sont répandus et quelques champignons sont vénéneux.	$\exists x(x \text{ est un champignon} \wedge x \text{ est répandu}) \wedge \exists x(x \text{ est un champignon} \wedge x \text{ est vénéneux})$

4. **Question** (2 points) Formulez en langage ordinaire les négations des phrases (c) et (d) de la troisième question. (c) et (d) ne sont pas logiquement équivalentes dans la mesure où l'un des deux implique l'autre, mais la converse (que la deuxième implique la première) n'est pas vraie. Dans quel sens va l'implication ?
Solution Les négations de (c) et de (d) sont les suivantes :

(¬c)	"Rien n'est à la fois un champignon, répandu et vénéneux"	"$\neg\exists x(x \text{ est un champignon} \wedge x \text{ est répandu} \wedge x \text{ est vénéneux })$"
(¬d)	"Soit aucun champignon n'est répandu, soit aucun champignon n'est vénéneux"	"$\forall x(x \text{ est un champignon} \rightarrow \neg(x \text{ est répandu})) \vee \forall x(x \text{ est un champignon} \rightarrow \neg(x \text{ est vénéneux}))$"

(¬c) est équivalent à "Tous les champignons répandus ne sont pas vénéneux, tous les champignons vénéneux ne sont pas répandus et tout ce qui est répandu et vénéneux n'est pas un champignon".
S'il y a des champignons qui sont répandus et vénéneux, alors il y a des champignons répandus et des champignons vénéneux. Donc (c) implique (d). Mais il est tout à fait possible qu'il y ait des champignons répandus mais non-vénéneux, et aussi des champignons vénéneux mais rares.

Donc (d) n'implique pas (c).
Parmi les négations, l'implication va dans le sens inverse (d'après le principe de conversion). (¬d) implique (¬c), mais la converse est fausse. Si tous les champignons sont rares, il n'y a pas de champignons répandus et vénéneux (puisqu'il n'y a pas de champignons répandus) ; si tous les champignons ne sont pas vénéneux, il n'y a pas non plus de champignons répandus et vénéneux (puisqu'il n'y a pas de champignons vénéneux).

5. **Question** (3 points) Parmi les énoncés donnés, trouvez ceux qui sont équivalents et ceux qui sont la négation l'un de l'autre. Formalisez chacun des énoncés en langage de la logique des prédicats.
   Solution (b), (c), (e) et (f) sont tous équivalents. (a) et (d) sont aussi équivalents. Aucun des énoncés n'est la négation d'un autre. Abrégeant "x est une amour" par "Ax", "x est heureux" par "Hx" et "x est imaginaire" par "Ix",
   (a) "Les amours heureuses sont imaginaires." est formalisé par "$\forall x((Ax \wedge Hx)) \rightarrow Ix)$"
   (b) "Les amours imaginaires sont heureuses." est formalisé par "$\forall x((Ax \wedge Ix)) \rightarrow Hx)$"
   (c) "Les amours malheureuses ne sont pas imaginaires." est formalisé par "$\forall x((Ax \wedge \neg Hx)) \rightarrow \neg Ix)$"
   (d) "Il n'y a pas d'amours heureuses qui ne soient imaginaires." est formalisé par "$\neg\exists x(Ax \wedge Hx \wedge \neg Ix)$"
   (e) "Il n'y a d'imaginaire que les amours heureuses." est formalisé par "$\forall x((Ax \wedge Hx)) \rightarrow Ix)$"
   (f) "Toutes les amours imaginaires sont heureuses." est formalisé par "$\forall x((Ax \wedge Ix)) \rightarrow Hx)$"
6. **Question** (3 points) A l'aide de la méthode des arbres, prouvez les phrases données.
   Solution
   (a) Un arbre pour "$\forall x(Fx) \rightarrow \forall y(Fy)$" :

$\checkmark \quad \neg(\forall x(Fx) \rightarrow \forall y(Fy))$

|

$\checkmark^a \quad \forall x(Fx)$
$\checkmark^a \quad \neg\forall y(Fy)$

|

$\neg Fa$
Fa
∇

   (b) Un arbre pour "$(\forall x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \exists x(Fx \wedge Hx)) \rightarrow \exists x(Gx \wedge Hx)$" :

$\checkmark \quad \neg((\forall x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \exists x(Fx \wedge Hx)) \rightarrow \exists x(Gx \wedge Hx))$

|

$\checkmark^a \quad \forall x(Fx \rightarrow Gx)$
$\checkmark^a \quad \exists x(Fx \wedge Hx)$
$\checkmark^a \quad \neg\exists x(Gx \wedge Hx)$

|

$\checkmark\ Fa \wedge Ha$
$\checkmark\ Fa \rightarrow Ga$
$\checkmark\ \neg(Ga \wedge Ha)$

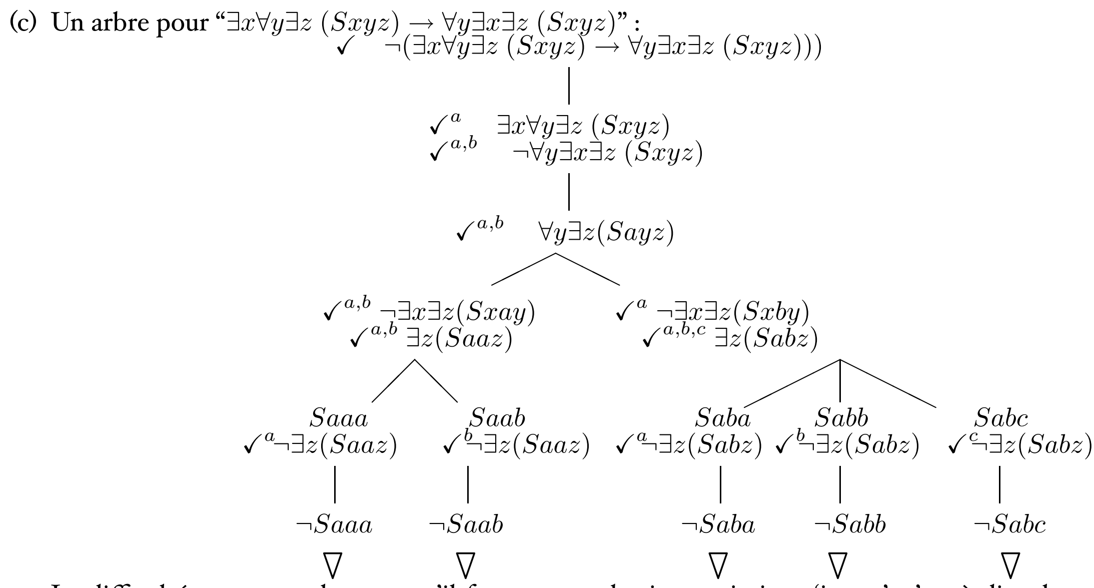
/ \

$\neg Fa$ ∇ | Ga

/ \

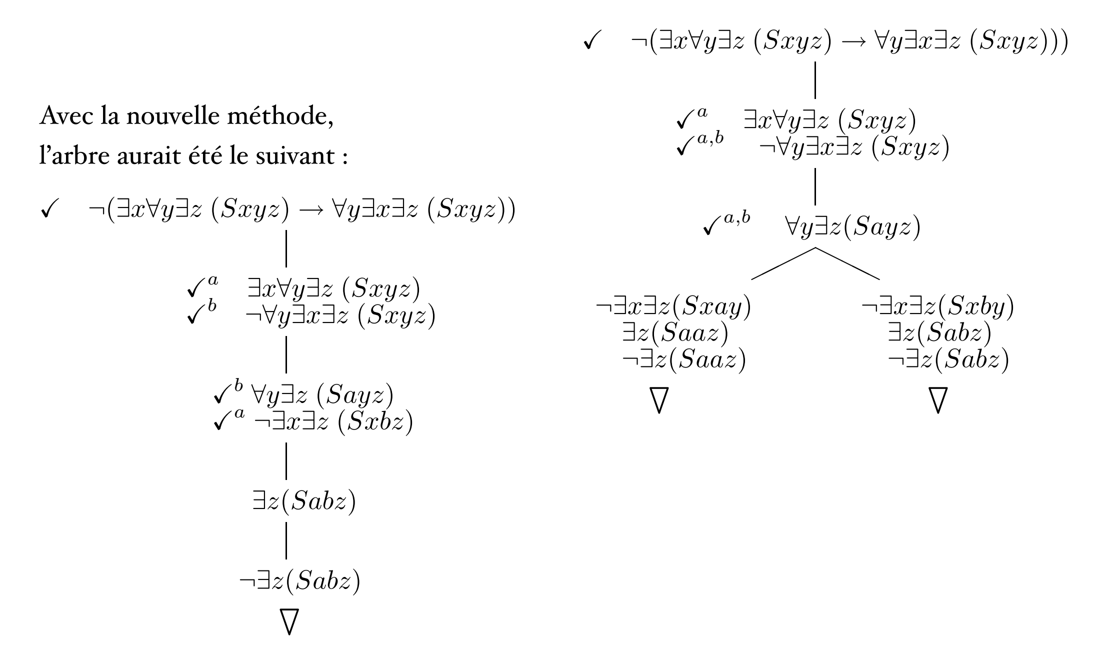
$\neg Ga$ ∇ | $\neg Ha$ ∇

(c) Un arbre pour "$\exists x \forall y \exists z\ (Sxyz) \to \forall y \exists x \exists z\ (Sxyz)$" :



La difficulté avec cet arbre est qu'il faut trouver les instanciations 'justes', c'est-à-dire des instanciations qui mènent à des contradictions. Sans cela, il serait nécessaire de dessiner un arbre extrêmement grand.
Pour cet exercice, il est utile de se rappeler qu'une branche d'un arbre se ferme si elle contient n'importe quelle paire d'une phrase et de sa négation. On aurait donc aussi pu se contenter de l'arbre suivant :

Avec la nouvelle méthode, l'arbre aurait été le suivant :



"$\forall y \exists z\ (Sayz)$" est l'instanciation de la quantification existentielle et "$\neg\exists x \exists z\ (Sxbz)$" celle de la négation de la quantification universelle. La nouvelle constante "b" est ensuite utilisée pour instancier "$\forall y \exists z (Sayz)$", ce qui nous donne "$\exists z (Sabz)$". Mais "$a$", nous donne également "$\neg\exists z (Sabz)$", comme instanciation de "$\neg\exists x \exists z (Sxby)$". Nous avons donc une contradiction et fermons la (seule) branche.

7. (4 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents donnés.
   (a) Une preuve pour "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$, $\forall x(Hx \rightarrow \neg Gx)$ $\vdash$ $\forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$" serait la suivante :

1	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow \neg Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow \neg Gx)$	$\vdash \forall x(Hx \rightarrow \neg Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow \neg Gx)$	$Fa \quad \vdash^* \ Fa$	supposition
4	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow \neg Gx)$	$Fa \quad \vdash^* \ Fa \rightarrow Ga$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow \neg Gx)$	$Fa \quad \vdash^* \ Ga$	de (3) et (4) par (MP)
6	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow \neg Gx)$	$Fa \quad \vdash^* \ \neg\neg Ga$	de (5) avec (DN)
7	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow \neg Gx)$	$Fa \quad \vdash^* \ Ha \rightarrow \neg Ga$	de (1) avec (SU)
8	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow \neg Gx)$	$Fa \quad \vdash^* \ \neg Ha$	de (7) et (6) avec (MT)
9	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow \neg Gx)$	$\vdash Fa \rightarrow \neg Ha$	de (3) et (8) avec (PC)
10	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Hx \rightarrow \neg Gx)$	$\vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Hx)$	de (9) avec (GU)

   (b) Une preuve pour "$\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx)$, $\forall x \neg(Hx)$ $\vdash$ $\forall x \neg(Fx)$" :

1	$\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx), \forall x \neg(Hx)$	$\vdash \forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx)$	prémisse
2	$\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx), \forall x \neg(Hx)$	$\vdash \forall x \neg(Hx)$	prémisse
3	$\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx), \forall x \neg(Hx)$	$\vdash (Fa \vee Ga) \rightarrow Ha$	de (1) avec (SU)
4	$\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx), \forall x \neg(Hx)$	$\vdash \neg Ha$	de (2) avec (SU)
5	$\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx), \forall x \neg(Hx)$	$\vdash \neg(Fa \vee Ga)$	de (4) et (5) avec (MT)
6	$\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx), \forall x \neg(Hx)$	$Fa \quad \vdash^* \ Fa$	supposition
7	$\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx), \forall x \neg(Hx)$	$Fa \quad \vdash^* \ Fa \vee Ga$	de (6) avec ($\vee$**I**)
8	$\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx), \forall x \neg(Hx)$	$\vdash \neg Fa$	de (6), (5) et (7) avec (RAA)
9	$\forall x((Fx \vee Gx) \rightarrow Hx), \forall x \neg(Hx)$	$\vdash \forall x \neg(Fx)$	de (8) avec (GU)

   (c) Une preuve pour "$\exists x(Fx \wedge Gx)$ $\vdash$ $\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)$" serait la suivante :

1	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx))$	prémisse
2	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga \quad \vdash^* \ Fa \wedge Ga$	supposition
3	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga \quad \vdash^* \ Fa$	de (2) avec ($\wedge$**E**)
4	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga \quad \vdash^* \ \exists x(Fx)$	de (3) avec (GE)
5	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga \quad \vdash^* \ Ga$	de (2) avec ($\wedge$**E**)
6	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga \quad \vdash^* \ \exists x(Gx)$	de (5) avec (GE)
7	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga \quad \vdash^* \ \exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)$	de (4) et (6) avec ($\wedge$**I**)
8	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash \exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)$	de (1), (2) et (7) avec (SE)

   (d) Une preuve pour "$\forall x(Fx \rightarrow Fa)$ $\vdash$ $\exists x(Fx) \rightarrow Fa$" serait la suivante :

1	$\forall x(Fx \rightarrow Fa)$	$\vdash \forall x(Fx \rightarrow Fa)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \rightarrow Fa)$	$\exists x(Fx) \quad \vdash^* \ \exists x(Fx)$	supposition
3	$\forall x(Fx \rightarrow Fa)$	$\exists x(Fx), Fb \quad \vdash^* \ Fb$	supposition
4	$\forall x(Fx \rightarrow Fa)$	$\exists x(Fx), Fb \quad \vdash^* \ Fb \rightarrow Fa$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \rightarrow Fa)$	$\exists x(Fx), Fb \quad \vdash^* \ Fa$	de (3) et (4) par (MP)
6	$\forall x(Fx \rightarrow Fa)$	$\exists x(Fx) \quad \vdash^* \ Fa$	de (2), (3) et (5) avec (SE)
7	$\forall x(Fx \rightarrow Fa)$	$\vdash \exists x(Fx) \rightarrow Fa$	de (2) et (6) avec (PC)

17.14 La logique des prédicats

1. **Question** (10] Formalisez (supposez que le domaine de quantification est la totalité des êtres

humains).

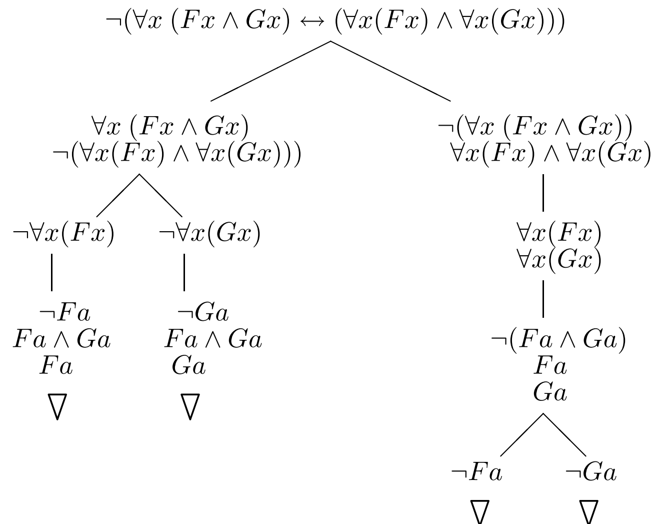
Solution

(a)	"Suzie est F."	"F(Suzie)"	"Fa" ou "$\exists x(Fx \wedge x =$ Suzie)"
(b)	"Sam est F."	"F(Sam)"	"Fb"
(c)	"Quelques D sont F."	"$\exists x\ (Dx \wedge Fx)$"	
(d)	"Tout D est F."	"$\forall x\ (Dx \rightarrow Fx)$"	
(e)	"Seuls les D sont F."	"$\forall x\ (Fx \rightarrow Dx)$"	"$\neg\exists x\ (Fx \wedge \neg Dx)$"
(f)	"Aucun H n'est F."	"$\neg\exists x\ (Hx \wedge Fx)$"	
(g)	"Quelques H ne sont pas F."	"$\exists x\ (Hx \wedge \neg Fx)$"	
(h)	"Sam n'est pas F."	"$\neg F$(Sam)"	"$\neg Fa$"
(i)	"Suzie a tué Sam."	"A-tué(Suzie, Sam)"	"Rba"
(j)	"Quelqu'un a tué Sam."	"$\exists x$ (A-tué(x,Sam))"	"$\exists x\ (Rxa)$"
(k)	"Sam a tué quelqu'un."	"$\exists x$ (A-tué(Sam, x))"	"$\exists x\ (Rax)$"
(l)	"Quelqu'un a tué quelqu'un."	"$\exists x\exists y$ (A-tué(x, y))"	"$\exists x, y\ (Rxy)$"
(m)	"Quelqu'un s'est tué."	"$\exists x$ (A-tué(x, x))"	"$\exists x\ (Rxx)$"
(n)	"Personne ne s'est tué."	"$\neg\exists x$ (A-tué(x, x))"	"$\neg\exists x\ (Rxx)$"
(o)	"Quelqu'un a tué tout le monde."	"$\exists x\forall y$ (A-tué(x, y))"	"$\exists x\forall y\ (Rxy)$"
(p)	"Quelqu'un a été tué par tout le monde."	"$\exists x\forall y$ (A-tué(y, x))"	"$\exists y\forall y\ (Rxy)$"
(q)	"Il y a un S entre Sam et Suzie."	"$\exists x$(entre(x,Sam,Suzie))"	"$\exists x(Exab)$"
(r)	"Chaque douanier hait un coureur."	"$\forall x\exists y$ (x est douanier $\rightarrow$ y est coureur $\wedge$ hait(x, y))"	"$\forall x\exists y\ (Dx \rightarrow (Cy \wedge Hxy))$"
(s)	"Quelques coureurs aiment chaque douanier."	"$\exists x$ (x est coureur $\wedge$ $\forall y$ (y est douanier $\rightarrow$ x aime y))"	"$\exists x\ (Cx \wedge \forall y\ (Dy \rightarrow Axy))$"
(t)	"Il y a un coureur haï par tous les douaniers fous."	"$\exists x\ \forall y$ ((y est douanier $\wedge$ y est fou) $\rightarrow$ (x est coureur $\wedge$ y hait x))"	"$\exists x\ \forall y\ ((Dy \wedge Fy) \rightarrow (Cx \wedge Hyx))$"
(u)	"Quelques C n'ont de relation P avec aucun FD."	"$\exists x\neg\exists y\ (Cx \wedge Fy \wedge Dy \wedge Pxy)$"	
(v)	"Quelques C ont une relation P uniquement avec des D qui ne sont pas F."	"$\exists x\forall y((Cx \wedge Pxy \wedge Dy) \rightarrow \neg Fy)$"	

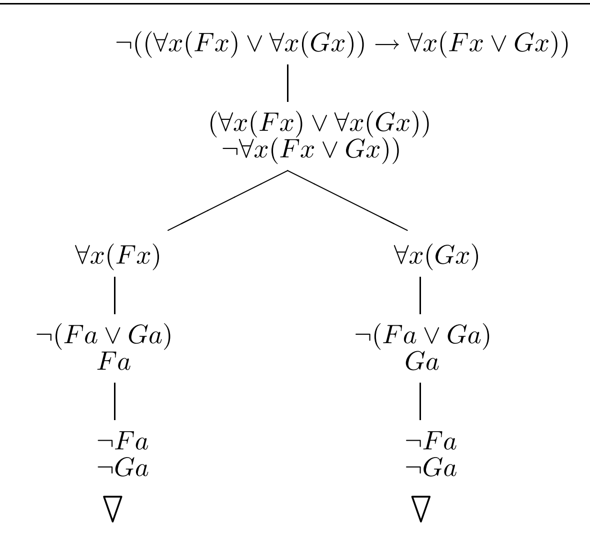
2. **Question** (5 points) A l'aide de la méthode des arbres, vérifiez la validité des phrases suivantes. Décrivez des structures dans lesquelles les converses de (b) et de (d) sont fausses.

Solution

(a) Nous prouvons ainsi "$\forall x\ (Fx \wedge Gx) \leftrightarrow (\forall x(Fx) \wedge \forall x(Gx))$" :



(b) L'arbre pour "$(\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)) \rightarrow \forall x(Fx \vee Gx)$" sera le suivant :

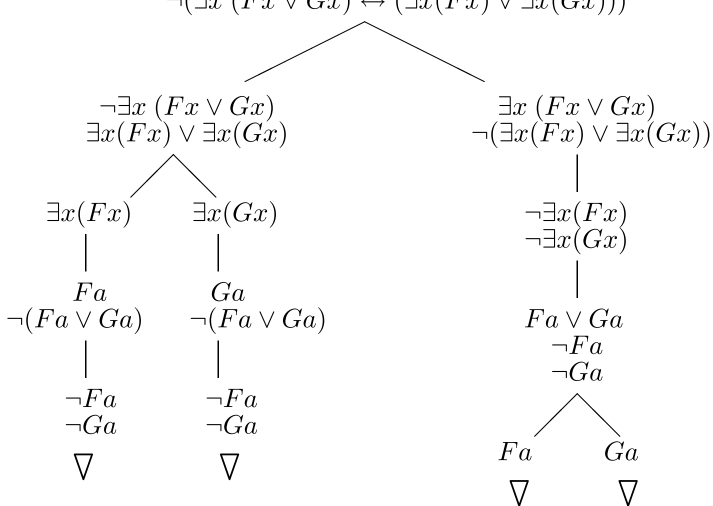


La converse de "$(\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)) \rightarrow \forall x(Fx \vee Gx)$", cependant, n'est pas valide. C'est à dire l'arbre pour la négation de la phrase contiendra des branches ouvertes :

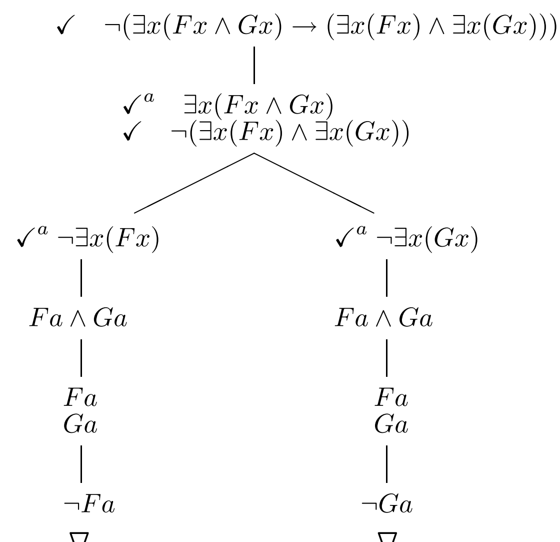
(17) $\forall x(Fx \vee Gx) \rightarrow (\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx))$

Pour voir que (17) n'est pas valide, il suffit de considérer une structure où un prédicat "Fx" est satisfait par quelques objets, mais n'est pas satisfait par tous. "$\forall x(Fx \vee \neg Fx)$" sera vrai dans cette structure (puisque cette phrase est vraie dans toutes les structures), mais "$\forall x(Fx) \vee \forall x(\neg Fx)$" sera faux dans cette structure, puisqu'elle contient des individus qui sont F et d'autres qui ne sont pas F.

(c) Un arbre pour "$\exists x\ (Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists x(Fx) \vee \exists x(Gx))$" sera le suivant :



(d) Un arbre pour "$\exists x\ (Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx))$" :



La converse de "$\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx))$", cependant, est fausse. L'arbre pour la négation de la phrase suivante contiendra des branches ouvertes :

(18) $(\exists x(Fx) \wedge \exists x(Gx)) \rightarrow \exists x(Fx \wedge Gx)$

Pour avoir un exemple d'une structure dans laquelle (18) est fausse, il suffit de penser à la même structure que nous avons utilisée pour montrer la non-validité de (17) : une structure dans laquelle quelques individus sont F et quelques autres ne le sont pas. Dans une telle structure il y a des F et aussi des $\neg F$, mais aucun individu n'est *à la fois* F et $\neg F$. Dans une telle structure, l'antécédent de (18) sera vrai et son conséquent faux.

17.15 Troisième examen probatoire

1. **Question** (3 points) Formulez les lois de Morgan et utilisez des tables de vérités pour montrer qu'elles sont correctes.
Solution 2 points pour les deux lois de Morgan, 1 point pour la vérification qu'il s'agit de tautologies.
Les lois de Morgan disent que :
   - toute formule qui a la même forme que "$\neg(p \wedge q)$" est équivalente sémantiquement à une formule de la forme $\neg p \vee \neg q$
   - toute formule qui a la même forme que "$\neg(p \vee q)$" est équivalente sémantiquement à une formule de la forme "$\neg p \wedge \neg q$"

   On peut aussi dire que les lois de Morgan disent que :
   $\ulcorner\neg(\phi \wedge \psi)\urcorner \Leftrightarrow \ulcorner\neg\phi \vee \neg\psi\urcorner$
   $\ulcorner\neg(\phi \vee \psi)\urcorner \Leftrightarrow \ulcorner\neg\phi \wedge \neg\psi\urcorner$

   Voici la table de vérité pour la première loi :

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

"$\neg(p \wedge q)$" et "$\neg p \vee \neg q$" ont la même table de vérité, donc les deux phrases sont sémantiquement équivalentes ; la première loi de Morgan est donc correcte.

La table de vérité pour la deuxième loi est la suivante :

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

"$\neg(p \vee q)$" et "$\neg p \wedge \neg q$" ont la même table de vérité, donc ils sont sémantiquement équivalente ; la deuxième loi de Morgan est donc également correcte.

2. **Question** (2 points) Déterminez lesquelles des paires de phrases suivantes sont telles que le premier membre a la même table de vérité que le second.
Solution Un point par paire.
(a) Voici les tables de vérité pour "$(p \wedge \neg q) \wedge r$" et pour "$p \wedge (\neg q \wedge r)$" :

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \wedge r$	$(\neg q \wedge r)$	$p \wedge (\neg q \wedge r)$
V	V	V	F	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	F	F

La sixième et la huitième colonne sont identiques : les deux phrases ont alors la même table de vérité.
(b) Voici les tables de vérité pour "$\neg(p \vee q)$" et pour "$\neg p \vee \neg q$" :

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

La quatrième et la septième colonne ne sont pas identiques : les deux phrases n'ont pas la même table de vérité.

3. **Question** (2 points) Considérez les deux phrases suivantes,
1 Chaque douanier fou hait un coureur.
2 Il y a un coureur qui est haï par tous les douaniers fous.
Solution Un point pour la question de l'ambiguïté ; un point pour l'implication.
(a) "Est-ce que l'une de ces phrases est structurellement ambigüe ? Si oui, laquelle et entre quelles deux formes logique est-elle ambigüe ?" – **1** est ambigüe entre les deux formes logiques suivantes :
1$'$ $\forall x$ ((x est un douanier $\wedge$ x est fou) $\rightarrow \exists y$ (y est un coureur $\wedge$ x hait y))
1$''$ $\exists y$ (y est un coureur $\wedge$ $\forall x$ ((x est un douanier $\wedge$ x est fou) $\rightarrow$ x hait y))
(b) "Est-ce que l'une de ces phrases implique sémantiquement l'autre et si oui, dans quel sens va l'implication ?" **2** implique **1**. Si on formalise **1** comme **1**$'$, c'est grâce au caractère tautologique de "$\exists y \forall x(Rxy) \rightarrow \forall x \exists y(Rxy)$". Si on la formalise comme **1**$''$, c'est une inférence du type "$\phi \vdash \phi$".

4. **Question** (3 points) Formalisez les phrases données dans un langage de la logique des prédicats

et formulez des phrases contradictoires :
Solution Un point par phrase.
(a) "Quelques champignons sont répandus et quelques champignons sont vénéneux." est formalisé ainsi :

$$\exists x\ (x \text{ est un champignon} \wedge x \text{ est répandu}) \wedge \exists x\ (x \text{ est un champignon} \wedge x \text{ est vénéneux})$$

Les phrases suivantes sont contradictoires :

$\neg(\exists x\ (x \text{ est un champignon } \wedge\ x \text{ est répandu})\ \wedge\ \exists x\ (x \text{ est un champignon } \wedge\ x \text{ est vénéneux}))$

$\forall x\ \neg(x \text{ est un champignon } \wedge\ x \text{ est répandu})\ \vee\ \forall x\ \neg(x \text{ est un champignon } \wedge\ x \text{ est vénéneux})$

(Soit aucun champignon n'est répandu, soit aucun champignon n'est vénéneux.)

(b) "Tous les chemins mènent à Rome." est formalisé ainsi :

$$\forall x\ (x \text{ est un chemin } \rightarrow\ x \text{ mène à Rome})$$

Les phrases suivantes sont contradictoires :

$\neg\forall x\ (x \text{ est un chemin } \rightarrow\ x \text{ mène à Rome})$

$\exists x\ \neg(x \text{ est un chemin } \rightarrow\ x \text{ mène à Rome})$

$\exists x\ (x \text{ est un chemin } \wedge\ \neg(x \text{ mène à Rome}))$

(Il y a un chemin qui ne mène pas à Rome.)

(c) "Seuls les fous adorent Aristote." est formalisé ainsi :

$$\forall x\ (x \text{ adore Aristote } \rightarrow\ x \text{ est fou})$$

Les phrases suivantes sont contradictoires :

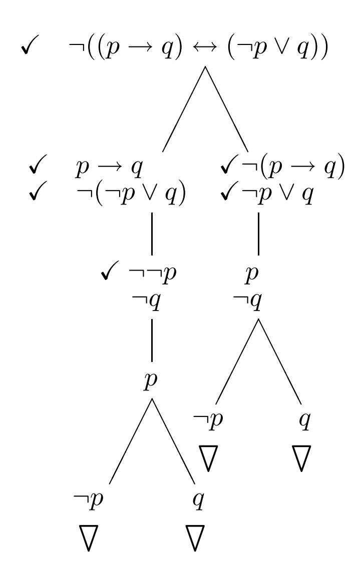
$\neg\forall x\ (x \text{ adore Aristote } \rightarrow\ x \text{ est fou})$

$\exists x\ \neg(x \text{ adore Aristote } \rightarrow\ x \text{ est fou})$

$\exists x\ (x \text{ adore Aristote } \wedge\ \neg(x \text{ est fou}))$

(Il y a quelqu'un qui adore Aristote mais qui n'est pas fou.)

5. **Question** (5 points) A l'aide de la méthode des arbres, prouvez les phrases données.
Solution Un point par arbre, un point supplémentaire s'il n'y avait aucune erreur.
(a) Un arbre pour "$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$" :



(b) Voici un arbre pour "$((p \to (p \wedge q)) \wedge p) \to q$" :

$\checkmark \quad \neg(((p \to (p \wedge q)) \wedge p) \to q)$

$\checkmark \quad ((p \to (p \wedge q)) \wedge p)$
$\neg q$

$\checkmark\ p \to (p \wedge q)$
p

$\neg p$ | $\checkmark\ p \wedge q$
∇ | p, q, ∇

(c) Un arbre pour "$\forall x(Fx \to Ga) \to (\exists x(Fx) \to Ga)$", par l'ancienne méthode :

$\checkmark \quad \neg(\forall x(Fx \to Ga) \to (\exists x(Fx) \to Ga))$

$\checkmark^{a,b} \quad \forall x(Fx \to Ga)$
$\checkmark\ \neg(\exists x(Fx) \to Ga)$

$\checkmark^{a,b}\ \exists x(Fx)$
$\neg Ga$

Fa, $\checkmark\ Fa \to Ga$ | Fb, $\checkmark\ Fb \to Ga$, $Fa \to Ga$

$\neg Fa$ ∇ | Ga ∇ | $\neg Fb$ ∇ | Ga ∇

Avec la nouvelle méthode on obtient :

$$\checkmark \quad \neg(\forall x(Fx \rightarrow Ga) \rightarrow (\exists x(Fx) \rightarrow Ga))$$

$$\checkmark^b \quad \forall x(Fx \rightarrow Ga)$$
$$\checkmark \; \neg(\exists x(Fx) \rightarrow Ga)$$

$$\checkmark^b \; \exists x(Fx)$$
$$\neg Ga$$

$$Fb$$
$$\checkmark Fb \rightarrow Ga$$

$$\neg Fb \qquad Ga$$
$$\nabla \qquad \nabla$$

(d) Voici un arbre pour "$Ga \rightarrow (\forall x(Fx) \rightarrow \exists x(Fx))$" :

$$\checkmark \quad \neg(Ga \rightarrow (\forall x(Fx) \rightarrow \exists x(Fx)))$$

$$Ga$$
$$\checkmark \quad \forall x(Fx) \rightarrow \exists x(Fx)$$

$$\checkmark^a \quad \forall x(Fx)$$
$$\checkmark^a \; \neg\exists x(Fx)$$

$$Fa$$
$$\neg Fa$$
$$\nabla$$

6. **Question** (5 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents donnés.
Solution
(a) Une preuve de "$\{p, p \rightarrow q \;,\; p \rightarrow r\} \vdash q \wedge r$" est la suivante :

1	$p, p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash p$	prémisse
2	$p, p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash p \rightarrow q$	prémisse
3	$p, p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash p \rightarrow r$	prémisse
4	$p, p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash q$	de (1) et (2) par (MP)
5	$p, p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash r$	de (1) et (3) par (MP)
6	$p, p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash q \wedge r$	de (4) et (5) avec ($\wedge$I)

(b) Voici une preuve de "$\{p \vee q\ ,\ p \to r\ ,\ q \to r\}\ \vdash\ r \vee s$" :

1	$p \vee q, p \to r, q \to r$	$\vdash\ p \vee q$	prémisse
2	$p \vee q, p \to r, q \to r$	$\vdash\ p \to r$	prémisse
3	$p \vee q, p \to r, q \to r$	$\vdash\ q \to r$	prémisse
4	$p \vee q, p \to r, q \to r$	$p\ \ \vdash^*\ p$	supposition
5	$p \vee q, p \to r, q \to r$	$p\ \ \vdash^*\ r$	de (2) et (4) par (MP)
6	$p \vee q, p \to r, q \to r$	$q\ \ \vdash^*\ q$	supposition
7	$p \vee q, p \to r, q \to r$	$q\ \ \vdash^*\ r$	de (3) et (6) par (MP)
8	$p \vee q, p \to r, q \to r$	$\vdash\ r$	de (1,3,4,5,6) avec ($\vee$E)
9	$p \vee q, p \to r, q \to r$	$\vdash\ r \vee s$	de (7) avec ($\vee$I)

(c) Voici une preuve de "$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)\ \vdash\ \forall x(Fx \vee Gx)$" :

1	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\vdash\ \forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Fx)\ \ \vdash^*\ \forall x(Fx)$	supposition
3	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Fx)\ \ \vdash^*\ Fa$	de (2) avec (SU)
4	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Fx)\ \ \vdash^*\ Fa \vee Ga$	de (3) avec ($\vee$I)
5	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Fx)\ \ \vdash^*\ \forall x(Fx \vee Gx)$	de (4) avec (GU)
6	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Gx)\ \ \vdash^*\ \forall x(Gx)$	supposition
7	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Gx)\ \ \vdash^*\ Ga$	de (6) avec (SU)
8	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Gx)\ \ \vdash^*\ Fa \vee Ga$	de (7) avec ($\vee$I)
9	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Gx)\ \ \vdash^*\ \forall x(Fx \vee Gx)$	de (8) avec (GU)
9	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\vdash\ \forall x(Fx \vee Gx)$	de (1,2,5,6,9) avec ($\vee$E)

(d) Voici une preuve de "$\{\forall x(Gx \to Hx)\ ,\ \exists x(Fx \wedge Gx)\} \vdash \exists x(Fx \wedge Hx)$" :

1	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash\ \forall x(Gx \to Hx)$	prémisse
2	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash\ \exists x(Fx \wedge Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga\ \ \vdash^*\ Fa \wedge Ga$	supposition
4	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga\ \ \vdash^*\ Ga \to Ha$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga\ \ \vdash^*\ Ga$	de (3) avec ($\wedge$E)
6	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga\ \ \vdash^*\ Ha$	de (4) par (MP)
7	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga\ \ \vdash^*\ Fa$	de (3) avec ($\wedge$E)
8	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga\ \ \vdash^*\ Fa \wedge Ha$	de (3) avec ($\wedge$I)
9	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga\ \ \vdash^*\ \exists x(Fx \wedge Hx)$	de (8) avec (GE)
10	$\forall x(Gx \to Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$\vdash\ \exists x(Fx \wedge Hx)$	de (1), (3) et (9) avec (SE)

17.16 Quatrième examen probatoire

1. **Question** (2 points) Montrez au moyen de tables de vérité que les quatre formules sont des tautologies.
Solution
(a) "$p \to p$" est une tautologie :

p	$p \to p$
V	V
F	V

(b) "$((p \vee q) \to r) \leftrightarrow ((p \to r) \wedge (q \to r))$" est une tautologie :

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)$	$((p \vee q) \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

(c) "$\neg(\neg p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$" est une tautologie :

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg(\neg p \wedge q)$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V	V

(d) "$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$" est une tautologie :

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

2. **Question** (4 points) À l'aide de la méthode des arbres, vérifiez si les phrases suivantes peuvent être prouvées.

Solution

(a) Un arbre pour "$(\neg q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$" :

✓ $\neg((\neg q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow p)))$

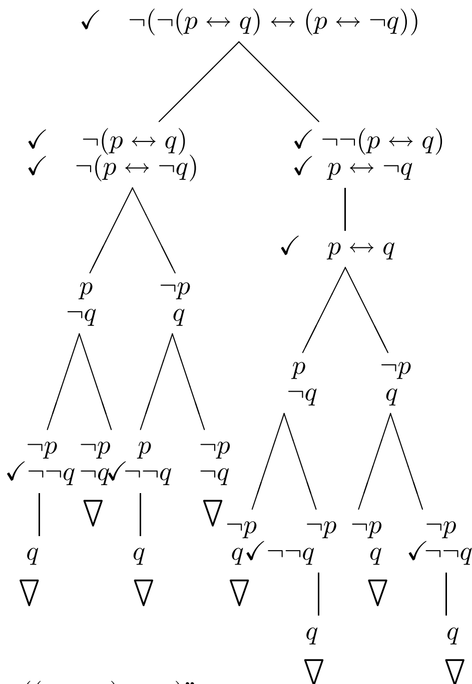
✓ $\neg q \rightarrow p$
✓ $\neg(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow p))$

$\neg p$
✓ $\neg(\neg q \rightarrow p)$

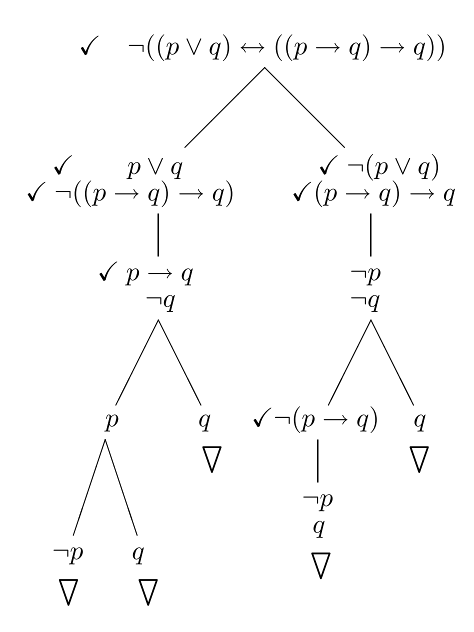
$\neg q$

✓ $\neg\neg q$ | p
q | ∇
∇

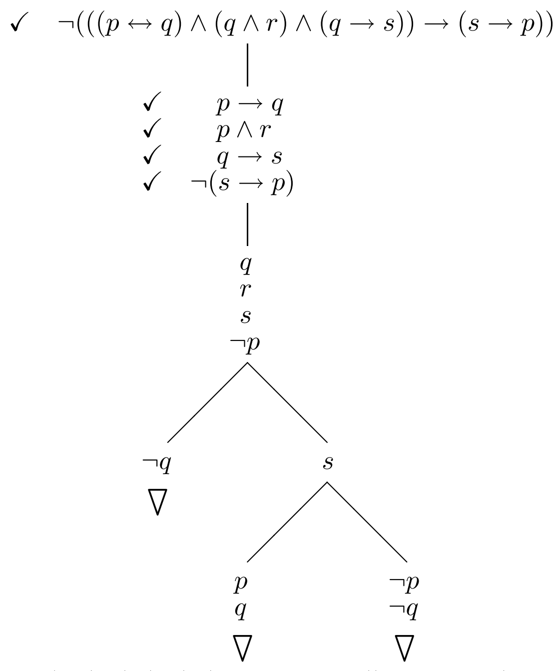
(b) Un arbre pour "$\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$" :



(c) Un arbre pour “$(p \vee q) \leftrightarrow ((p \to q) \to q)$” :



(d) Un arbre pour “$((p \leftrightarrow q) \wedge (q \wedge r) \wedge (q \to s)) \to (s \to p)$” :



3. **Question** (4 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents suivants.
Solution
(a) Voici une preuve de "$\{p \rightarrow q, p \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow (q \wedge r)$" :

1	$p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash p \rightarrow q$	prémisse
2	$p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash p \rightarrow r$	prémisse
3	$p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$p \quad \vdash^* p$	supposition
4	$p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$p \quad \vdash^* r$	de (2) et (3) par (MP)
5	$p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$p \quad \vdash^* q$	de (1) et (3) par (MP)
6	$p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$p \quad \vdash^* q \wedge r$	de (4) et (5) avec ($\wedge$**I**)
7	$p \rightarrow q, p \rightarrow r$	$\vdash p \rightarrow (q \wedge r)$	de (3) et (6) avec (PC)

(b) Voici une preuve de "$\{p \rightarrow q, r \rightarrow s\} \vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)$" :

1	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$\vdash p \rightarrow q$	prémisse
2	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$\vdash r \rightarrow s$	prémisse
3	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$p \wedge r \quad \vdash^* p \wedge r$	supposition
4	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$p \wedge r \quad \vdash^* p$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
5	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$p \wedge r \quad \vdash^* q$	de (1) et (4) par (MP)
6	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$p \wedge r \quad \vdash^* r$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
7	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$p \wedge r \quad \vdash^* s$	de (2) et (6) par (MP)
8	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$p \wedge r \quad \vdash^* q \wedge s$	de (5) et (7) avec ($\wedge$**I**)
9	$p \rightarrow q, r \rightarrow s$	$\vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge s)$	de (3) et (8) avec (PC)

(c) Voici une preuve de "$\vdash p \to (q \vee \neg q)$" :

1	$p \vdash^* p$	supposition
2	$p, \neg(q \vee \neg q) \vdash^* \neg(q \vee \neg q)$	supposition
3	$p, \neg(q \vee \neg q), q \vdash^* q$	supposition
4	$p, \neg(q \vee \neg q), q \vdash^* q \vee \neg q$	de (3) avec ($\vee$**I**)
5	$p, \neg(q \vee \neg q) \vdash^* \neg q$	de (3), (2) et (4) avec (RAA)
6	$p, \neg(q \vee \neg q), \neg q \vdash^* \neg q$	supposition
7	$p, \neg(q \vee \neg q), \neg q \vdash^* q \vee \neg q$	de (3) avec ($\vee$**I**)
8	$p, \neg(q \vee \neg q) \vdash^* \neg\neg q$	de (6), (2) et (7) avec (RAA)
9	$p \vdash^* q \vee \neg q$	de (2), (5) et (8) avec (RAA)
10	$\vdash p \to (q \vee \neg q)$	de (1) et (9) avec (PC)

(d) Voici une preuve de "$p \wedge \neg p \vdash p$" :

1	$p \wedge \neg p$	$\vdash p \wedge \neg p$	prémisse
2	$p \wedge \neg p$	$\neg p \vdash^* \neg p$	supposition
3	$p \wedge \neg p$	$\neg p \vdash^* p$	de (1) avec ($\wedge$**E**)
4	$p \wedge \neg p$	$\neg p \vdash^* \neg p$	de (1) avec ($\wedge$**E**)
5	$p \wedge \neg p$	$\vdash \neg\neg p$	de (3) et (4) avec (RAA)
6	$p \wedge \neg p$	$\vdash p$	de (5) avec (DN)

Une autre preuve, plus courte, est la suivante :

1	$p \wedge \neg p$	$\vdash p \wedge \neg p$	prémisse
2	$p \wedge \neg p$	$\vdash p$	de (1) avec ($\wedge$**E**)

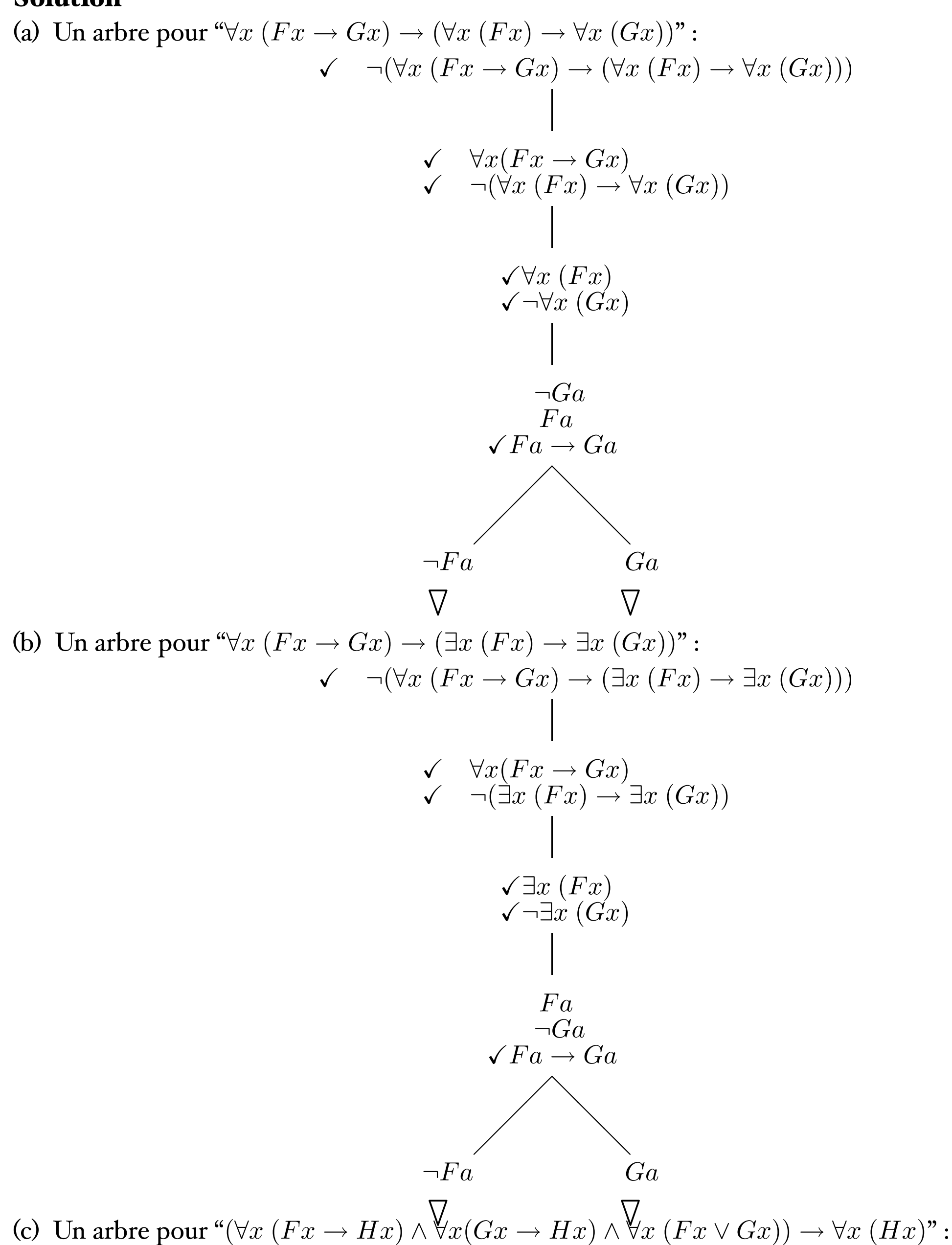
4. (2 points) Expliquez le termes.
   (a) Un **terme singulier** est une expression qui est utilisé pour designer au plus une chose. On distingue entre des noms propres comme "Maddox", des descriptions définies comme "l'actuelle reine d'Angleterre" et des indexicaux comme "moi", "ici" et "maintenant".
   (b) Une **phrase ouverte** est une formule bien-formée contenant au moins une occurrence libre d'une variable.
   (c) La **distinction entre usage et mention** est la distinction entre deux usages de mots : d'une part, on **utilise** des mots pour parler des choses qu'ils désignent, d'autre part on **mentionne** les mots pour parler de ces mots mêmes.
   (d) Un **système formel axiomatique** est un ensemble de phrases qui consiste en certains axiomes et en des théorèmes qui s'ensuivent de ces axiomes à l'aide des règles d'inférence.
   (e) L'**analyse Russellienne d'une description définie** consiste à donner la forme logique suivante à une description définie comme elle se trouve dans la phrase "l'actuelle reine d'Angleterre est F" :

$$\exists x(Ax \wedge Fx \wedge \forall y(Ay \to y = x))$$

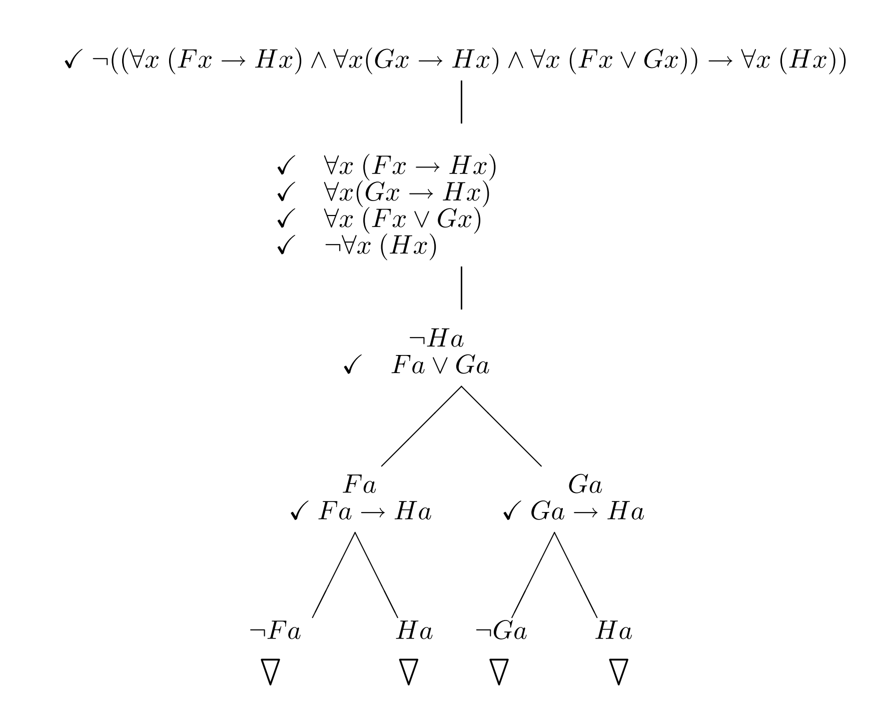
5. (2 points) Expliquez, en vos propres mots, les distinctions.
   (i) la distinction entre variables et constantes individuelles : une **constante individuelle** est interprétée dans une structure par l'assignation d'un référent ; une **variable** est interprétée par une assignation de valeurs ; sa référence peut varier à l'intérieur d'une structure.
   (ii) la distinction entre noms propres, indexicaux et descriptions définies : un *nom propre* est une expression qui a un référent quel que soit le contexte de son occurrence ; sa référence

est modalement stable (désignation rigide) ; une *expression indéxicale* a une référence qui varie avec le contexte de son énonciation ; une **description définie** a une référence qui ne varie pas avec le contexte de son énonciation, mais qui varie avec le contexte de son évaluation.

6. **Question** (3 points) A l'aide de la méthode des arbres, prouvez les phrases données.
Solution
(a) Un arbre pour "$\forall x\ (Fx \to Gx) \to (\forall x\ (Fx) \to \forall x\ (Gx))$" :



(c) Un arbre pour "$(\forall x\ (Fx \to Hx) \wedge \forall x(Gx \to Hx) \wedge \forall x\ (Fx \vee Gx)) \to \forall x\ (Hx)$" :



7. **Question** (3 points) Prouvez les séquents suivants par la méthode de la déduction naturelle :
   (a) Une preuve pour "$\exists x\forall y\exists z(Sxyz)\ \vdash\ \forall y\exists x\exists z(Sxyz)$" :

1	$\exists x\forall y\exists z(Sxyz)$	$\vdash\ \exists x\forall y\exists z(Sxyz)$	prémisse
2	$\exists x\forall y\exists z(Sxyz)$	$\forall y\exists z(Sayz)\ \vdash^*\ \forall y\exists z(Sayz)$	supposition
3	$\exists x\forall y\exists z(Sxyz)$	$\forall y\exists z(Sayz)\ \vdash^*\ \exists z(Sabz)$	de (2) par (SU)
4	$\exists x\forall y\exists z(Sxyz)$	$\forall y\exists z(Sayz)\ \vdash^*\ \exists x\exists z Sxbz$	de (3) par (GE)
5	$\exists x\forall y\exists z(Sxyz)$	$\vdash\ \exists x\exists z Sxbz$	de (2) et (4) par (SE)
6	$\exists x\forall y\exists z(Sxyz)$	$\vdash\ \forall y\exists x\exists z Sxyz$	de (5) par (GU)

   (b) Une preuve pour "$\forall x(Fx), \forall x(Gx)\ \vdash\ \forall x(Fx \land Gx)$" :

1	$\forall x(Fx), \forall x(Gx)$	$\vdash\ \forall x(Fx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx), \forall x(Gx)$	$\vdash\ \forall x(Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Fx), \forall x(Gx)$	$\vdash\ Fa$	de (1) par (SU)
4	$\forall x(Fx), \forall x(Gx)$	$\vdash\ Ga$	de (2) par (SU)
5	$\forall x(Fx), \forall x(Gx)$	$\vdash\ Fa \land Ga$	de (3) et (4) par ($\land$**I**)
6	$\forall x(Fx), \forall x(Gx)$	$\vdash\ \forall x(Fx \land Gx)$	de (5) par (GU)

   (c) Une preuve pour "$\exists x(Fx \lor Gx)\ \vdash\ \exists x(Fx) \land \exists x(Gx)$" :

17.17 Cinquième examen probatoire

1. **Question** (2 points) Faites des tables de vérité pour les phrases données.
   Solution
   (a) La table de vérité pour "$((\neg p \to q) \land \neg q \land (p \to (p \lor s)) \land \neg s) \to (p \land q)$" :

p	q	s	$p \vee s$	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$p \rightarrow (p \vee s)$	$\neg q$	$\neg s$	$\mathbf{A} := (\neg p \rightarrow q) \wedge \neg q \wedge (p \rightarrow (p \vee s)) \wedge \neg s$	$p \wedge q$	$\mathbf{A} \rightarrow (p \wedge q)$
V	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F	V	V	V	F	F	V

(b) La table de vérité de "$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$" :

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V	V

2. **Question** (3 points) La police arrête trois suspects : Maria, Sam et Jonathan. Ils font des témoignages suivantes :
   (a) Maria : "Jonathan est innocent, mais Sam ne l'est pas."
   (b) Sam : "Si Maria n'est pas innocente, alors Jonathan ne l'est pas non plus."
   (c) Jonathan : "Je suis innocent, mais un des deux autres ne l'est pas."

   Abrégeant "Maria est innocente" par "p", "Sam est innocent" par "q" et "Jonathan est innocent" par "r", répondez aux questions données.

   Solution Un point pour la formalisation, un point pour le tables de vérité et une réponse correcte à une question, un point pour le reste.

   (a) Exprimez les trois témoignages comme formules de la logique propositionnelle et en faites les tables de vérité.
      i. Maria : "$r \wedge \neg q$"
      ii. Sam : "$\neg p \rightarrow \neg r$"
      iii. Jonathan : "$r \wedge (\neg p \vee \neg q)$"

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \vee \neg q$	$r \wedge \neg q$	$\neg p \rightarrow \neg r$	$r \wedge (\neg p \vee \neg q)$
V	V	V	F	F	F	F	F	V	F
V	V	F	F	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	F	V	F

   (b) (i) Les trois témoignages sont **consistants** parce que les trois reçoivent "V" sur la troisième ligne.
      (ii) La table montre que **le témoignage de Jonathan s'ensuit de celui de Maria**.
      (iii) Si tout le monde est innocent, nous sommes dans la première ligne du tableau. Dans ce cas, **Maria et Jonathan** ont menti.
      (iv) Si les trois témoignages sont vrais, nous sommes dans la troisième ligne du tableau. Alors **Maria et Jonathan sont innocents, mais Sam ne l'est pas**.
      (v) Si les innocents ont dit la vérité et les autres ont menti, nous stipulons que la valeur de vérité du témoignage de Maria correspond à celui de "p", celle du témoignage de Sam à celle de "q" et celle du témoignage de Jonathan à celle de "r". Nous sommes donc dans

la sixième ligne du tableau et **Sam est innocent et Maria et Jonathan ne le sont pas**.

3. **Question** (3 points) Formalisez les phrases et formulez, en français, des phrases contradictoires : **Solution** Un point par quatre réponses justes.
   (a) "Quelques champignons sont répandus et quelques champignons sont vénéneux." est formalisée comme "$\exists \mathbf{x}(\mathbf{Cx} \wedge \mathbf{Rx}) \wedge \exists \mathbf{x}(\mathbf{Cx} \wedge \mathbf{Vx})$" avec "$Cx$" pour "$x$ est un champignon", "Rx" pour "x est répandu" et "Vx" pour "x est vénéneux". La contradiction est "$\neg\exists x(Cx \wedge Rx) \vee \neg\exists x(Cx \wedge Vx)$", ce qui peut être lu comme **"Soit il n'y a pas de champignons répandus, soit il n'y pas de champignons vénéneux"**; et ce qui est équivalent à "S'il y a des champignons répandus, alors aucun champignon n'est vénéneux" ("$\exists x(Cx \wedge Rx) \rightarrow \neg\exists x(Cx \wedge Vx)$").
   (b) "Aucun pingouin n'est fou." est formalisée comme "$\neg\exists \mathbf{x}(\mathbf{Px} \wedge \mathbf{Fx})$" avec "$Px$" pour "$x$ est un pingouin" et "Fx" pour "x est fou". La phrase contradictoire est "$\exists x(Px \wedge Fx)$" (**"il y a un pingouin fou"**), ce qui est équivalent à "Pas tous les pingouins ne sont pas fous" ("$\neg\forall x(Px \rightarrow \neg Fx)$").
   (c) "Il viendra seulement s'il est invité." est formalisée comme "$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$" avec "$p$" pour "Il viendra." et "q" pour "Il est invité". La phrase contradictoire est **"Il viendra et n'est pas invité"** ("$p \wedge \neg q$"). Ceci n'est pas équivalent à "Il viendra s'il n'est pas invité" ("$\neg q \rightarrow p$").
   (d) "Elle n'est ni gentille ni intelligente." est formalisée comme "$\neg\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q}$" avec "$p$" pour "Elle est gentille" et "q" pour "Elle est intelligente", ce qui est contradictoire à **"Soit elle est gentille, soit elle est intelligente"** ("$p \vee q$"), à "Si elle n'est pas gentille, elle est intelligente" ("$\neg p \rightarrow q$") et à "Si elle n'est pas intelligente, elle est gentille" ("$\neg q \rightarrow p$").
   (e) "Il y a un philosophe qui est adoré par tous les douaniers fous." est formalisée comme "$\exists \mathbf{x}\forall \mathbf{y}(\mathbf{Px} \wedge ((\mathbf{Dy} \wedge \mathbf{Fy}) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})))$" avec "$Px$" pour "$x$ est un philosophe", "Dx" pour "x est un douanier", "Fx" pour "x est fou" et "$A(x, y)$" pour "x adore y". La contradiction est **"aucun philosophe n'est adoré par tous les douaniers fous"** ("$\neg\exists x\forall y(Px \wedge ((Dy \wedge Fy) \rightarrow A(x, y))$"), ce qui est équivalent à "Tout philosophe n'est pas adoré par (au moins) un douanier fou" ("$\forall x\exists y(Px \rightarrow ((Dy \wedge Fy) \wedge \neg A(x, y)))$"). Quelques-uns ont formalisé la phrase comme "$\exists x\forall y((Px \wedge Dy \wedge Fy) \rightarrow A(x, y))$" – ce n'est pas une bonne formalisation parce que sa contradiction serait "toute chose est un philosophe et n'est pas adoré par un douanier fou" ("$\forall x\exists y(Px \wedge Dy \wedge Fy \wedge \neg A(x, y))$").
   (f) "Le roi de France est chauve." est formalisée comme "$\exists \mathbf{x}\forall \mathbf{y}(\mathbf{Rx} \wedge \mathbf{Cx} \wedge (\mathbf{Ry} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}))$" avec "$Rx$" pour "$x$ est roi de France" et "Cx" pour "x est chauve". La contradiction est **"soit il n'y a pas de roi de France, soit il y en a plusieurs, soit il y a un roi de France qui n'est pas chauve"** ("$\neg\exists x(Rx) \vee \exists x\exists y(Rx \wedge Ry \wedge x = y) \wedge \exists x(Rx \wedge \neg Cx)$"), ce qui est équivalent à "aucun roi de France chauve est le seul à être roi" ("$\forall x\exists y((Rx \wedge Cx) \rightarrow (Ry \wedge x \neq y)))$").

4. **Question** (6 points) Par la méthode de la déduction naturelle, prouvez les séquents donnés. **Solution**
   (a) Une preuve de "$\vdash p \vee \neg p$" est la suivante :

1	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash$	$\neg(p \vee \neg p)$	supposition
2	$\neg(p \vee \neg p), p$	$\vdash^*$	p	supposition
3	$\neg(p \vee \neg p), p$	$\vdash^*$	$p \vee \neg p$	de (2) par ($\vee$**I**)
4	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash^*$	$\neg p$	de (1), (2) et (3) par (RAA)
5	$\neg(p \vee \neg p)$	$\vdash^*$	$p \vee \neg p$	de (4) par ($\vee$**I**)
6		$\vdash$	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	de (1), (1) et (5) par (RAA)
7		$\vdash$	$p \vee \neg p$	de (6) par (DN)

   (b) Une preuve de "$p \vee q\ ,\ p \rightarrow r\ ,\ q \rightarrow r\ \vdash\ r \vee s$" est la suivante :

1	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$	$\vdash$	$p \vee q$	prémisse
2	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$	$\vdash$	$p \rightarrow r$	prémisse
3	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$	$\vdash$	$q \rightarrow r$	prémisse
4	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r, p$	$\vdash^*$	p	supposition
5	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r, p$	$\vdash^*$	r	de (2) et (5) par (MP)
6	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r, q$	$\vdash^*$	q	supposition
7	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r, q$	$\vdash^*$	r	de (3) et (6) par (MP)
8	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$	$\vdash$	r	de (1), (5) et (7) par ($\vee$**E**)
9	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$	$\vdash$	$r \vee s$	de (8) par ($\vee$**I**)

(c) Une preuve de “$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \ \vdash \ (p \vee q) \rightarrow r$” :

1	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$\vdash$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	prémisse
2	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$\vdash$	$p \rightarrow r$	de (1) par ($\wedge$**E**)
3	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$\vdash$	$q \rightarrow r$	de (1) par ($\wedge$**E**)
4	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r), p \vee q$	$\vdash^*$	$p \vee q$	supposition
5	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r), p \vee q, p$	$\vdash^*$	p	supposition
6	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r), p \vee q, p$	$\vdash^*$	r	de (5) et (2) par (MP)
7	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r), p \vee q, q$	$\vdash^*$	q	supposition
8	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r), p \vee q, q$	$\vdash^*$	r	de (3) et (7) par (MP)
9	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r), p \vee q$	$\vdash^*$	r	de (4, 5, 6, 7, 8) par ($\vee$**E**)
10	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	$\vdash$	$(p \vee q) \rightarrow r$	de (4) et (9) par (PC)

(d) Une preuve de “$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx) \ \vdash \ \forall x(Fx \vee Gx)$” :

1	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$		$\vdash \forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* \forall x(Fx)$	supposition
3	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* Fa$	de (2) avec (SU)
4	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* Fa \vee Ga$	de (3) avec ($\vee$**I**)
5	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Fx)$	$\vdash^* \forall x(Fx \vee Gx)$	de (4) avec (GU)
6	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Gx)$	$\vdash^* \forall x(Gx)$	supposition
7	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Gx)$	$\vdash^* Ga$	de (6) avec (SU)
8	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Gx)$	$\vdash^* Fa \vee Ga$	de (7) avec ($\vee$**I**)
9	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$	$\forall x(Gx)$	$\vdash^* \forall x(Fx \vee Gx)$	de (8) avec (GU)
10	$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$		$\vdash \forall x(Fx \vee Gx)$	de (1,2,5,6,9) avec ($\vee$**E**)

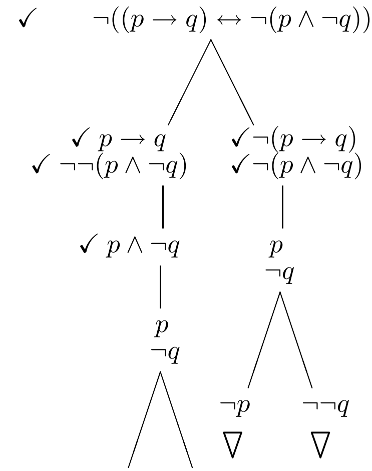
(e) Une preuve de “$\forall x(Gx \rightarrow Hx)$, $\exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \exists x(Fx \wedge Hx)$” :

1	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$		$\vdash \forall x(Gx \rightarrow Hx)$	prémisse
2	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$		$\vdash \exists x(Fx \wedge Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa \wedge Ga$	supposition
4	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ga \rightarrow Ha$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ga$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
6	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Ha$	de (5) et (4) par (MP)
7	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa$	de (3) avec ($\wedge$**E**)
8	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* Fa \wedge Ha$	de (6) et (7) avec ($\wedge$**I**)
9	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$	$Fa \wedge Ga$	$\vdash^* \exists x(Fx \wedge Hx)$	de (8) avec (GE)
10	$\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx)$		$\vdash \exists x(Fx \wedge Hx)$	de (1), (3) et (9) avec (SE)

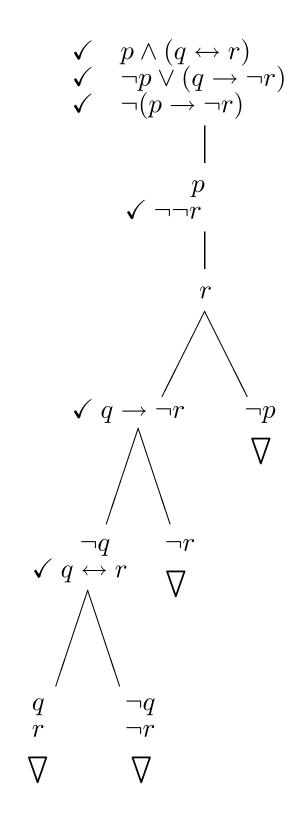
(f) Une preuve de "$\forall x(Fx \to Gx)$, $\forall x(Hx \to \neg Gx) \vdash \forall x(Fx \to \neg Hx)$" :

1	$\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Hx \to \neg Gx)$		$\vdash$	$\forall x(Fx \to Gx)$	prémisse
2	$\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Hx \to \neg Gx)$		$\vdash$	$\forall x(Hx \to \neg Gx)$	prémisse
3	$\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Hx \to \neg Gx)$	Fa	$\vdash^*$	Fa	supposition
4	$\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Hx \to \neg Gx)$	Fa	$\vdash^*$	$Fa \to Ga$	de (1) avec (SU)
5	$\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Hx \to \neg Gx)$	Fa	$\vdash^*$	Ga	de (3) et (4) par (MP)
6	$\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Hx \to \neg Gx)$	Fa	$\vdash^*$	$\neg\neg Ga$	de (5) avec (DN)
7	$\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Hx \to \neg Gx)$	Fa	$\vdash^*$	$Ha \to \neg Ga$	de (1) avec (SU)
8	$\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Hx \to \neg Gx)$	Fa	$\vdash^*$	$\neg Ha$	de (7) et (6) avec (MT)
9	$\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Hx \to \neg Gx)$		$\vdash$	$Fa \to \neg Ha$	de (3) et (8) avec (PC)
10	$\forall x(Fx \to Gx), \forall x(Hx \to \neg Gx)$		$\vdash$	$\forall x(Fx \to \neg Hx)$	de (9) avec (GU)

5. **Question** (4 points) A l'aide de la méthode des arbres, prouvez les phrases données.
Solution
(a) L'arbre pour "$(p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$" :



(b) L'arbre pour "$p \wedge (q \leftrightarrow r)$, $\neg p \vee (q \leftrightarrow \neg r) \vdash p \to \neg r$" :



(c) L'arbre pour "$\exists x \forall y\ (Rxy) \rightarrow \forall y \exists x\ (Rxy)$" :

✓ $\neg(\exists x \forall y\ (Rxy) \rightarrow \forall y \exists x\ (Rxy))$

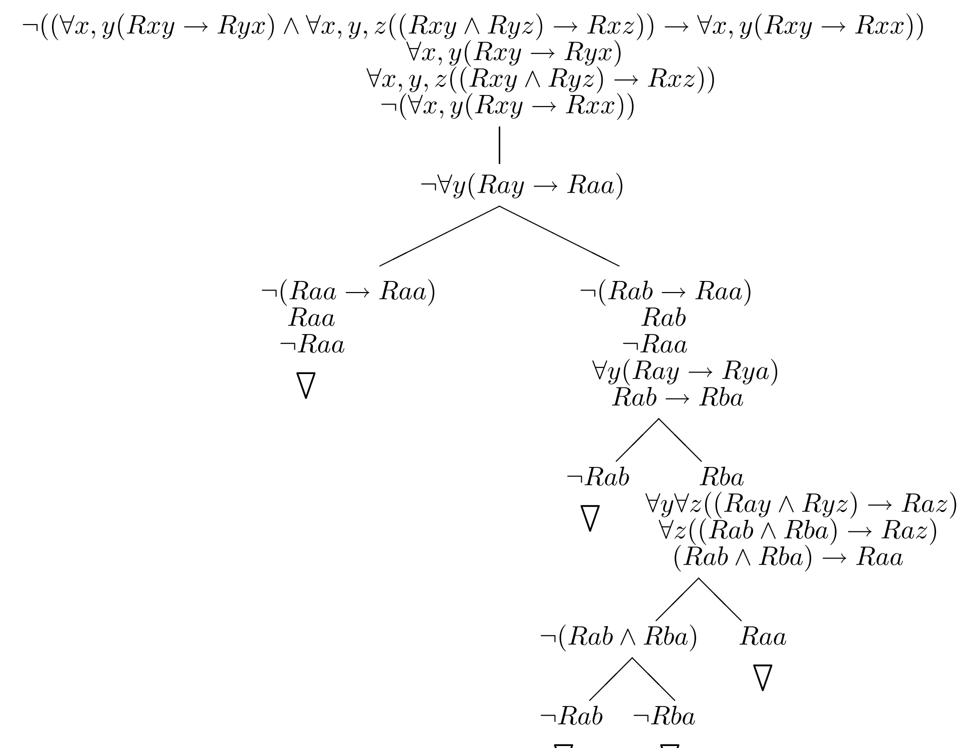
✓ $\exists x \forall y\ (Rxy)$
✓ $\neg \forall y \exists x\ (Rxy)$

✓ $\forall y\ (Ray)$
Raa

✓ $\neg \exists x (Rxa)$ | ✓ $\neg \exists x (Rxb)$, Rab

$\neg Raa$ ▽ | $\neg Rab$, $\neg Rbb$ ▽

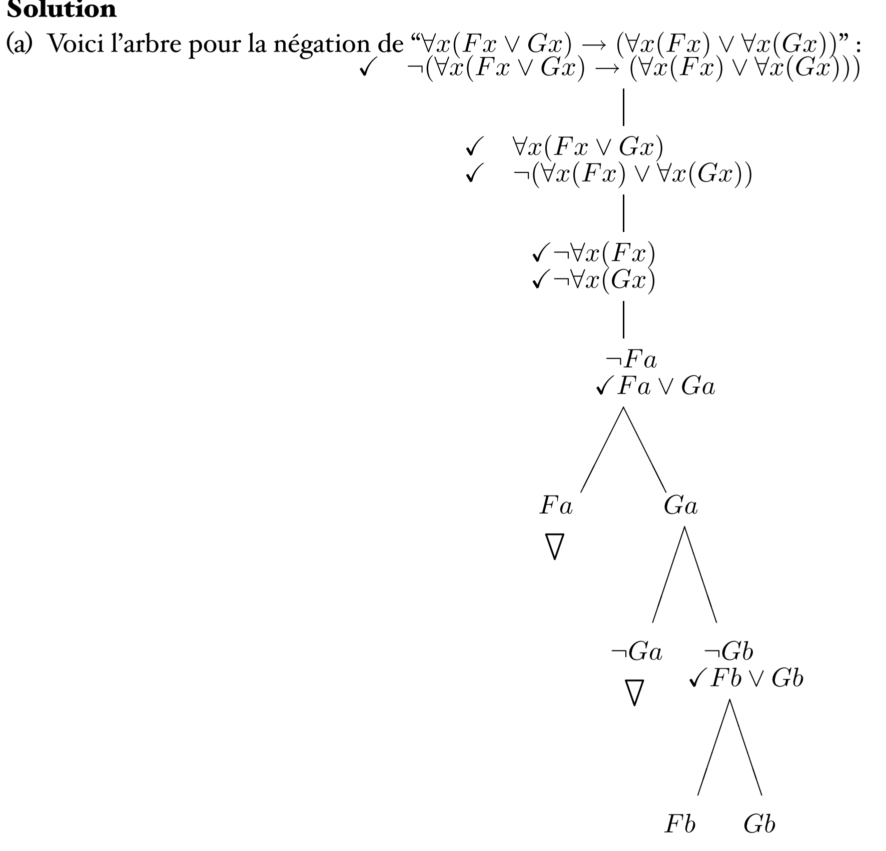
(d) L'arbre pour '$(\forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx) \wedge \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)) \rightarrow \forall x \forall y (Rxy \rightarrow Rxx)$" :



6. **Question** (2 points) Montrez que les phrases données ne sont pas des théorèmes de la logique des prédicats.

Solution

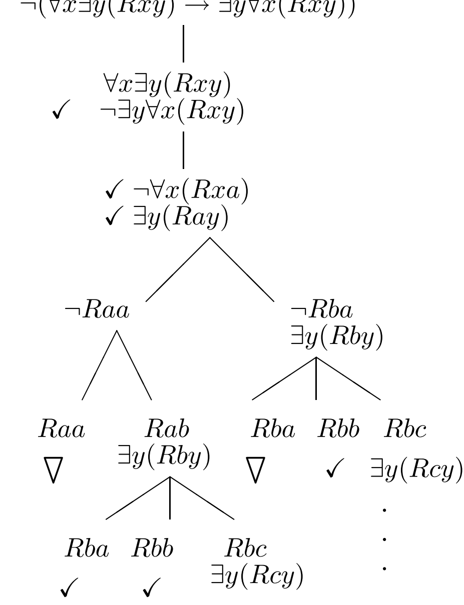
(a) Voici l'arbre pour la négation de "$\forall x(Fx \vee Gx) \rightarrow (\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx))$" :



L'arbre reste ouvert, donc cette phrase a des modèles – sa négation, en conséquence, n'est pas une tautologie.

Une autre solution consiste à donner une structure dont laquelle la phrase n'est pas vraie : Soit $\mathcal{A}$ une structure avec un univers de discours de deux individus $\{a, b\}$ dont un seulement est F et un seulement est G ($F^{\mathcal{A}} = \{a\}$ et $G^{\mathcal{A}} = \{b\}$). Dans cette structure, "$Fx \vee Gx$" est vraie sous n'importe quelle assignation (il y en a deux – une assigne "x" à a, l'autre l'assigne à b). Donc "$\forall x(Fx \vee Gx)$" est vraie. "$\forall x(Fx)$", par contre, n'est pas vraie, parce qu'il y a une assignation qui assigne "x" à b. "$\forall x(Gx)$" est également fausse, parce qu'une assignation assigne a à "x". En conséquent, la disjonction "$\forall x(Fx) \vee \forall x(Gx)$" est fausse et l'implication l'est également. Cette structure correspond à la branche ouverte de l'arbre.

(b) L'arbre pour la négation de "$\forall x \exists y(Rxy) \rightarrow \exists y \forall x(Rxy)$" reste également ouvert :



Même si cet arbre contient des branches infinies, il nous montre des modèles dans lesquelles la phrase initiale est vraie.

Une autre solution consiste à donner une structure dont laquelle la phrase n'est pas vraie : Soit $\mathcal{A}$ une structure avec un univers de discours de deux individus $\{a, b\}$ dont qui sont réciproquement en relation R, mais n'ont pas R à eux-mêmes ("$R(x, y)$" pourrait être "x n'est pas identique à y"). Nous avons donc $R^{\mathcal{A}} = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$). Dans cette structure, "$\exists y(Rxy)$" est vraie sous n'importe quelle assignation (il y en a deux – une assigne "x" à a, l'autre l'assigne à b, et dans les deux cas je trouve une assignation pour "y" qui rend "Rxy" vraie). Donc "$\forall x \exists y(Rxy)$" est vraie. Il n'y a pas d'assignation, par contre, sous laquelle "$\forall x(Rxy)$" est vraie – si j'assigne "y" à a, l'assignation de "x" à a rend "Rxy" fausse ; si j'assigne "y" à b, c'est l'assignation de "x" à b qui rend "Rxy" fausse. Donc "$\exists y \forall x(Rxy)$" est fausse dans cette structure (qui correspond à la branche ouverte de gauche).

Glossaire

Mots possédant une autre signification en logique, en philosophie ou en mathématiques que dans le langage ordinaire

1. "*Phrase*" : unité syntaxique constituée d'au moins un groupe nominal (NP) et d'un groupe verbal (VP) et terminée, dans le cas des phrases assertives, par un point ; les phrases, dans ce sens, ne sont ni ambigües ni indexicales : elle gardent leur valeur de vérité sans considération pour où, quand et par qui elles sont prononcées.
2. "*Proposition*" : ce qui est exprimé par une phrase ; le contenu d'une phrase ; ce qui possède (même essentiellement) une valeur de vérité.
3. "*Argument*" : l'ensemble d'au moins une prémisse et d'une conclusion qui vise à donner une raison de croire la dernière.

Vocabulaire technique spécifique à la (philosophie de la) logique

1. "*bien formé*"/"*mal formé*" : qualifie les phrases construites en accord avec les règles syntaxiques d'un langage / celles qui ne le sont pas.
2. "*Validité*" (d'un argument) : pour être valide, un argument doit être tel que si l'on accepte ses prémisses, on accepte aussi sa conclusion ; ou, en d'autres termes, il doit contenir une conclusion obligatoirement vraie si ses prémisses sont vraies.
3. "*Solidité*" (d'un argument) : pour être solide, un argument doit avoir toutes ses prémisses vraies.
4. "*Solidité*" (d'un calcul) : pour être solide, un calcul doit contenir exclusivement des théorèmes qui sont des tautologies (logiquement vraies).
5. "*Complétude*" : pour être complet, un calcul doit permettre la déduction de n'importe quelle tautologie (phrase logiquement vraie).
6. "*Vérifacteur*" : ce qui, dans le monde, rend une phrase donnée vraie ; par ex. Sam, le chien, dans le cas des phrases "Sam existe" ou "Il y a des chiens".
7. "*Falsifacteur*" : ce qui, dans le monde, rend une phrase donnée fausse ; par ex. Sam, le chien, dans le cas des phrases "Sam n'existe pas" ou "Il y n'a pas de chiens".

Bibliographie

Ackermann, Wilhelm, 1950. “Widerspruchsfreier Aufbau der Logik I”. *The Journal of Symbolic Logic* 15 : 33–57 2.5

Aristote, 1992. *Organon, t. 3 : Les Premières Analytiques.* Bibliothèque des textes philosophiques. Paris : Librairie philosophique Jean Vrin. Traduction et notes de Jules Tricot 1.1

Aristote, 1997a. *Organon, t. 5 : Les Topiques.* Bibliothèque des textes philosophiques. Paris : Librairie philosophique Jean Vrin. Traduction et notes de Jules Tricot 1.1

Aristote, 1997b. *Organon, t. 6 : Les Réfutations sophistiques.* Bibliothèque des textes philosophiques. Paris : Librairie philosophique Jean Vrin. Traduction et notes de Jules Tricot 1.1

Aristote, 2000a. *Organon, t. 1 et 2 : Catégories et De l'Interprétation.* Bibliothèque des textes philosophiques. Paris : Librairie philosophique Jean Vrin. Traduction et notes de Jules Tricot 1.1, 8.1

Aristote, 2000b. *Organon, t. 4 : Les Seconds Analytiques.* Bibliothèque des textes philosophiques. Paris : Librairie philosophique Jean Vrin. Traduction et notes de Jules Tricot 1.1

Arnauld, Antoine et Nicole, Pierre, 1662. *La Logique ou l'Art de Penser.* Paris : Chez Charles Savreux, au pied de la Tour de Nostre Dame. Reprinted as Arnauld et Nicole (1992) 1.1

Arnauld, Antoine et Nicole, Pierre, 1992. *La Logique ou l'Art de Penser.* Paris : Gallimard. Avec des notes et un postface de Charles Jourdain 17.17

Austin, John Langshaw, éditeur, 1961. *Philosophical Papers.* Oxford : Oxford University Press. Edited by J.O. Urmson and G.J. Warnock 1.2

Barnes, Jonathan, 2002. “What is a Begriffsschrift ?” *Dialectica* 56 : 65–80 4

Benacerraf, Paul et Putnam, Hilary, éditeurs, 1964. *Philosophy of Mathematics : Selected Readings.* Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall, Inc. 17.17

Beth, Evert Willem, 1955. “Semantic Entailment and Formal Derivability”. *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van wetenschappen, afd. lettterkunde, new series* 18. Amsterdam, Holland : N. V. Noord-Hollansche Uitgevers maatschappij 5.3

Blanché, Robert, 1996. *Introduction à la logique contemporaine.* Collection Cursus, série “Philosophie”. Paris : Armand Colin 3, 11

Bocheński, Joseph Martin, 1956. *Formale Logik.* München : Karl Alber 22

Boolos, George, 1984. “To Be is to Be Value of a Variable (or to Be Some Values of Some Variables)”. *The Journal of Philosophy* 81 : 430–449. Reprinted in Boolos (1998: 54–72) 17

Boolos, George, 1998. *Logic, Logic, and Logic.* Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press. Introductions and afterword by John P. Burgess ; edited by Richard Jeffrey. 17.17

Brentano, Franz, 1874. *Psychologie vom Empirischen Standpunkt*, volume I. Leipzig : Meiner. 2nd edition 1924, Leipzig : Meiner ; English translation by L.L. MacAlister : Brentano (1950) 1, 23, 17.17

Brentano, Franz, 1950. *Psychology of an Empirical Standpoint.* London : Routledge and Kegan Paul, Ltd.

Engl. translation ed. by L.L. McAlister of Brentano (1874) 17.17

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 1918. "Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten : Erster Teil : Allgemeine Mengenlehre". *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van wetenschappen te Amsterdam, 1st section* 12 4.3

Cantor, Georg, 1883. *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Eine mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen*. Leipzig : B.G. Teubner. Translation by William Ewald in Ewald (1996: 878–920) 4.3

Carnap, Rudolf, 1928a. *Der logische Aufbau der Welt*. Berlin-Schlachtensee : Weltkreis Verlag. English trans. in George (1967) 1.2

Carnap, Rudolf, 1928b. *Scheinprobleme in der Philosophie : Das Fremdpsychische und der Realismusstreit*. Berlin-Schlachtensee : Weltkreis Verlag. English trans. in George (1967) 1.2

Carnap, Rudolf, 1931. "Die logizistische Grundlegung der Metaphysik". *Erkenntnis - im Auftrage der Gesellschaft für empirische Philosophie, Berlin und der Vereins Ernst Mach in Wien, hrsg. von R. Carnap und H. Reichenbach* 2 : 91–105. Translated as "The Logicist Foundations of Mathematics" in Benacerraf et Putnam (1964) 1.2

Carnap, Rudolf, 1947. *Meaning and Necessity : A Study in Semantics and Modal Logic*. Chicago, Illinois : University of Chicago Press, 1 édition. Second edition : Carnap (1956) 1.2, 5

Carnap, Rudolf, 1956. *Meaning and Necessity : A Study in Semantics and Modal Logic*. Chicago, Illinois : University of Chicago Press, 2 édition. Enlarged edition, Midway reprint 1988 17.17

Carnap, Rudolf, 1997. *Signification et nécessité*. Paris : Gallimard. Trad. de Carnap (1956) par F. Rivenc & Ph. de Rouilhan

Carroll, Lewis, 1895. "What the Tortoise Said to Achilles". *Mind* 4 : 278–280 3.6

Church, Alonzo, 1936. "A Note on the Entscheidungsproblem". *The Journal of Symbolic Logic* 1 : 40–41. Corrigendum in the same volume, pp. 101–102 ; reprinted in Davis (1965: 110–115) 11.7

Cole, Peter et Morgan, Jerry L., éditeurs, 1975. *Syntax and Semantics 3 : Speech Acts*. New York : Academic Press 17.17

Davidson, Donald, 1967. "Truth and Meaning". *Synthèse* 17 : 304–323. Reprinted in Davidson (1984) and Jacquette (2002) 1.4

Davidson, Donald, 1980. *Essays on Actions and Events*. Oxford : Clarendon Press. 2nd, enl. edition : Davidson (2001) 1.2

Davidson, Donald, 1984. *Inquiries into Truth and Interpretation*. Oxford : Clarendon Press 1.2, 17.17

Davidson, Donald, 2001. *Essays on Actions and Events. Philosophical Essays Volume 1*. Oxford : Clarendon Press, 2 édition. Enlarged 17.17

Davidson, Donald et Harman, Gilbert H., éditeurs, 1975. *The Logic of Grammar*. Encino and Belmont, California : Dickenson Publishing Co. 17.17

Davis, Martin, éditeur, 1965. *The Undecidable. Basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems and computable fonctions*. Hewlett, New York : Raven Press 17.17

Dedekind, Richard, 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen ?* Braunschweig / Wiesbaden : Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH. English translation by Wooster W. Beman in Dedekind (1901) ; reprinted, with corrections, in Ewald (1996: 787–833) 4.3

Dedekind, Richard, 1901. *Essays on the Theory of Numbers*. Chicago, Illinois : Open Court Publishing Co. Translation by Wooster W. Beman ; reissue : Dedekind (1963) 17.17

Dedekind, Richard, 1963. *Essays on the Theory of Number*. New York : Dover Publications. Reissue of Dedekind (1901) 17.17

Dummett, Michael A. E., 2000. *Elements of Intuitionism*. Oxford Logic Guides. Oxford : Clarendon Press, 2 édition. 1st edition 1977 2.2

Ewald, William Bragg, éditeur, 1996. *From Kant to Hilbert : A source book in the foundations of mathematics*, volume II de *Oxford Science Publications*. Oxford : Clarendon Press 17.17

Feigl, Herbert et Sellars, Wilfrid, éditeurs, 1949. *Readings in Philosophical Analysis*. New York : Appleton-Century-Crofts 17.17

Fine, Kit, 1985. *Reasoning with Arbitrary Objects*. Nombre 3 dans Aristotelian Society Series. Oxford : Basil Blackwell Publishers 1

Fitch, Frederic B., 1951. *Symbolic Logic : An Introduction*. New York : Ronald Press Co. 1

Frege, Gottlob, 1879. *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle a.S. : Louis Nebert 1.2, 3, 4.3, 17.17

Frege, Gottlob, 1882. "Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift". *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik NF* 81 : 48–56. Reprinted in Frege (1980) 17.17

Frege, Gottlob, 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik : eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau : Wilhelm Koebner. Reissued as Frege (1961) ; translated by Dale Jacquette in **?** 4.3

Frege, Gottlob, 1891. *Function und Begriff : Vortrag, gehalten in der Sitzung vom 9. Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medizin und Naturwissenschaft*. Jena : Hermann Pohle. Reprinted in Frege (1980) 17.17

Frege, Gottlob, 1892a. "Über Begriff und Gegenstand". *Vierteljahreszeitschrift für wissenschaftliche Philosophie* 16 : 192–205. Reprinted in Frege (1980: 96–127) 8.5, 17.17

Frege, Gottlob, 1892b. "Über Sinn und Bedeutung". *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik NF* 100 : 25–50. Reprinted in Frege (1980) 1.2, 5, 14, 17.17

Frege, Gottlob, 1893. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume I. Jena : Hermann Pohle. Reissued as Frege (1966a) 1.2, 4.3, 17.17

Frege, Gottlob, 1903. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume II. Jena : Hermann Pohle. Reissued as Frege (1966b) 1.2, 4.3, 17.17

Frege, Gottlob, 1918a. "Der Gedanke. Eine logische Untersuchung." *Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus* 1 : 58–77. Ed. by Arthur Hoffmann and Horst Engert ; Erfurt : Verlag der Keyserschen Buchhandlung, reprinted in Frege (1993) 1.2, 17.17

Frege, Gottlob, 1918b. "Die Verneinung. Eine logische Untersuchung." *Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus* 1 : 143–157. Ed. by Arthur Hoffmann and Horst Engert ; Erfurt : Verlag der Keyserschen Buchhandlung, reprinted in Frege (1993) and Frege (1990: 362–378) 17.17

Frege, Gottlob, 1923. "Logische Untersuchungen. Dritter Teil : Gedankengefüge." *Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus* 3 : 36–51. Erfurt : Verlag Kurt Stenger, reprinted in Frege (1993) and Frege (1990: 379–384) 17.17

Frege, Gottlob, 1961. *Die Grundlagen der Arithmetik*. Hildesheim : Georg Olms Verlagsbuchhandlung 17.17

Frege, Gottlob, 1966a. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume I. Hildesheim : Georg Olms Verlagsbuchhandlung. Reprografischer Nachdruck der Ausgabe Frege (1893) 17.17

Frege, Gottlob, 1966b. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, volume II. Hildesheim : Georg Olms Verlagsbuchhandlung. Reprografischer Nachdruck der Ausgabe Frege (1903) 17.17

Frege, Gottlob, 1971a. *Écrits logiques et philosophiques*. Paris : Éditions du Seuil. Traduction et introduction de Claude Imbert ; contient des traductions de Frege (1882 1891 1892ba 1918a 1923 1918b) 17.17

Frege, Gottlob, 1971b. “Fonction et concept”. Dans Frege (1971a), p. ?? Traduction et introduction de Claude Imbert ; contient des traductions de Frege (1882 1891 1892ba 1918a 1923 1918b) 8.5

Frege, Gottlob, 1971c. “Sens et dénotation”. Dans Frege (1971a), p. ?? Traduction et introduction de Claude Imbert ; contient des traductions de Frege (1882 1891 1892ba 1918a 1923 1918b) 5, 14

Frege, Gottlob, 1980. *Funktion, Begriff, Bedeutung*. Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht. Edited by Patzig, Günther 17.17

Frege, Gottlob, 1990. *Kleine Schriften*. Hildesheim : Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 2 édition. Edited by Angelelli, Ignacio 17.17

Frege, Gottlob, 1993. *Logische Untersuchungen*. Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht. Edited by Patzig, Günther 17.17

Frege, Gottlob, 1999. *Idéographie*. Paris : Librairie philosophique Jean Vrin. Traduction de Frege (1879) par Corine Besson, avec une postface de Jonathan Barnes 12

Gardies, Jean-Luis, 1975. *Esquisse d'une grammaire pure*. Paris : Librairie philosophique Jean Vrin 9.6

Gentzen, Gerhard, 1934. “Untersuchungen über das logische Schliessen”. *Mathematische Zeitschrift* 39 : 176–210, 405–431. Republished as Gentzen (1969b), translated as “Investigations into logical deduction” in Gentzen (1969a: 68–131) 5.3

Gentzen, Gerhard, 1969a. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*. Amsterdam : North-Holland Publishing Co. Edited by M.E. Szabo 17.17

Gentzen, Gerhard, 1969b. *Untersuchungen über das logische Schliessen*. Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft 17.17

George, Rolf, 1967. *The Logical Structure of the World ; Pseudo-Problems in Philosophy*. Berkeley, California : University of California Press 17.17

Gödel, Kurt, 1931. “Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I”. *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 : 173–198. English translation in van Heijenoort (1967: 596–616) ; reprinted in Gödel (1986) 33, 4.3, 13.1

Gödel, Kurt, 1986. *Collected Works. Volume I : Publications 1929–1936*. Oxford : Oxford University Press. Edited by Feferman, Solomon and Dawson, Jr, John W. and Stephen C. Kleene and Gregory H. Moore and Robert M. Solovay and Jean van Heijenoort 17.17

Grelling, Kurt et Nelson, Leonard, 1908. “Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti”. *Abhandlungen der Fries'schen Schule, neue Folge* 2 : 301–334 32, 15.3

Grice, H. Paul, 1967. “Logic and Conversation”. The William James Lectures, delivered at Harvard University in 1967, and thereafter distributed in unpublished form for many years. Portions published in Davidson et Harman (1975: 64–75) and Cole et Morgan (1975: 41–58). The whole published, w 23

Hale, Bob et Wright, Crispin, 2001. *The Reasons Proper Study. Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*. Oxford : Clarendon Press 10

van Heijenoort, Jan, éditeur, 1967. *From Frege to Gödel : A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*. Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press 17.17

Heyting, Arend, 1956. *Intuitionism : An Introduction*. Amsterdam : North-Holland Publishing Co. 4.3

Hilbert, David, 1899. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig : B.G. Teubner. Originally published in “Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen”. Later editions published in 1903, 1909, 1911, 1922 and 1930. Translation by Leo Unger of the 10th German Edition : Hilbert (1971) 4.3, 17.17

Hilbert, David, 1971. *Foundations of Geometry*. LaSalle, Illinois : Open Court Publishing Co. Translation by Leo Unger of the 10th German Edition of Hilbert (1899) 17.17

Hilbert, David et Ackermann, Wilhelm, 1928. *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlin : Springer Verlag 2

Hintikka, Jaakko, 1955. "Form and content in quantification theory". *Acta Philosophica Fennica* 8 : 7–55 5.3

Jacquette, Dale, éditeur, 2002. *Philosophy of Logic : An Anthology*. Blackwell Philosophy Anthologies. Oxford : Basil Blackwell Publishers 17.17

Jaskowski, Stanislaw, 1934. "On the Rules of Suppositions in Formal Logic". *Studia Logica (Poznan Panstwowe Wydawnictowo Naukowe)* 1 : 5–32. Reprinted in McCall (1967: 232–258), with considerable change in notation 5.3

Johnson, Alexander Bryan, 1947. *A Treatise on Language*. Berkeley, California : University of California Press, 1 édition. Edited, with a critical essay on Johnson's Philosophy of Language, by David Rynin ; reprinted, with a new preface, as Johnson (1968) 1, 17.17

Johnson, Alexander Bryan, 1968. *A Treatise on Language*. New York : Dover Publications. Reprint of Johnson (1947) 17.17

Kant, Immanuel, 1781. *Kritik der reinen Vernunft*. Riga : Johann Friedrich Hartknoch, 1 édition 4.3

Kant, Immanuel, 1787. *Kritik der reinen Vernunft*. Riga : Johann Friedrich Hartknoch, 2 édition 4.3, 8.6

Kant, Immanuel, 2001. *Critique de la Raison Pure*. Paris : Flammarion, 2 édition. Traduit par Alain Renaut 1.1, 8.1

Kaplan, David, 1989. "Demonstratives – An Essay on the Semantics, Logic, Metaphysics, and Epistemology of Demonstratives and Other Indexicals". Dans Almog, Joseph, Perry, John, et Wettstein, Howard K., éditeurs, *Themes from Kaplan*, p. ? ? Oxford : Oxford University Press. Widely circulated from 1977 on 15

Kneale, William C., 1936. "Is Existence a Predicate ?" *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volume* 15 : ? ? Reprinted in Feigl et Sellars (1949: 29–43) 19

Kneale, William C. et Kneale, Martha, 1962. *The Development of Logic*. Oxford : Clarendon Press 22

Kripke, Saul A., 1959. "A Completeness Theorem in Modal Logic". *The Journal of Symbolic Logic* 24 : 1–14 14.2

Kripke, Saul A., 1963a. "Semantical Analysis of Modal Logic I : Normal Modal Propositional Calculi". *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 9 : 67–96 14.2

Kripke, Saul A., 1963b. "Semantical Considerations on Modal Logic". *Acta Philosophica Fennica* 16 : 83–94. Proceedings of a Colloquium on Modal and Many-Valued Logics, Helsinki, 23–26 August 1962 14.2

Kripke, Saul A., 1965. "A Semantical Analysis of Modal Logic II : Non-Normal Propositional Calculi". Dans Addison, John West, Henkin, Leon, et Tarski, Alfred, éditeurs, *The Theory of Models*, pp. 206–220. Amsterdam : North-Holland Publishing Co. Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley 14.2

Kripke, Saul A., 1972. "Naming and Necessity". Dans Davidson, Donald et Harman, Gilbert H., éditeurs, *Semantics of Natural Language*, nombre 40 dans Synthese Library, pp. 253–355, 763–769. Dordrecht : D. Reidel Publishing Co. Reprinted as Kripke (1980) 14, 17.17

Kripke, Saul A., 1980. *Naming and Necessity*. Oxford : Basil Blackwell Publishers 17.17

Kripke, Saul A., 1982. *La logique des noms propres*. collection "Propositions", dirigée par François Récanati. Paris : Éditions de Minuit. Traduction de Kripke (1972) dans la version Kripke (1980) par P. Jacob et F. Recanati 14

Lambert, Karel, 2002. *Free Logic : Selected Essays*. Cambridge : Cambridge University Press 21

Lemmon, Edward John, 1965a. *Beginning Logic*. London : Thomas Nelson and Sons Ltd. 7.4, 7.7, 1

Lemmon, Edward John, 1965b. "Some Results on Finite Axiomatizability in Modal Logic". *Notre Dame Journal of Formal Logic* 6 : 301–308 1

Lepage, François, 1991. *Eléments de Logique Contemporaine*. Montréal : Presses de l'Université de Montréal (document), 5.3

Lepage, François, 2001. *Eléments de Logique Contemporaine*. Paramètres. Montréal : Presses de l'Université de Montréal 6

Lewis, Clarence Irving, 1918. *Survey of Symbolic Logic*. Berkeley, California : University of California Press 8.4

Loux, Michael J., éditeur, 1970. *Universals and Particulars : Readings in Ontology*. Notre Dame, Indiana : University of Notre Dame Press. Second edition : Loux (1976) 17.17

Loux, Michael J., éditeur, 1976. *Universals and Particulars : Readings in Ontology*. Notre Dame, Indiana : University of Notre Dame Press, 2 édition. First edition : Loux (1970) 17.17

Löwenheim, Leopold, 1915. "Über Möglichkeiten im Relativkalkül". *Mathematische Annalen* 76 : 447–470 60, 10.5

Łukasiewicz, Jan, 1904. "O stosunkach logicznych [On Logical Relations]". *Przegląd Filozoficzny* 7 : 245 3

Łukasiewicz, Jan, 1934a. "Z historii logiki zdań [On the history of the logic of propositions]". *Przegląd Filozoficzny* 37 : 417–437. German translation : Łukasiewicz (1935) ; English translation in Łukasiewicz (1970: 197–217) 18, 17.17

Łukasiewicz, Jan, 1934b. "Znaczenie analizy logicznej dla poznania [The importance of logical analysis for cognition]". *Przegląd Filozoficzny* 37 : 369–377 6

Łukasiewicz, Jan, 1935. "Zur Geschichte der Aussagenlogik". *Erkenntnis - im Auftrage der Gesellschaft für empirische Philosophie, Berlin und der Vereins Ernst Mach in Wien, hrsg. von R. Carnap und H. Reichenbach* 5 : 111–131. German translationof Łukasiewicz (1934a) 1, 17.17

Łukasiewicz, Jan, 1957. *Aristotle's Syllogistic, from the Standpoint of Modern Formal Logic*. Oxford : Clarendon Press, 2 édition. Edited by Ludwik Borowski. 6

Łukasiewicz, Jan, 1970. *Selected Works*. Synthese Library. Amsterdam : North-Holland Publishing Co. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 17.17

Mates, Benson, 1965. *Elementary Logic*. Oxford : Oxford University Press 1

Mavrodes, George I., 1963. "Some Puzzles Concerning Omnipotence". *The Philosophical Review* 72 : 221–223 1.5

McCall, Storrs, éditeur, 1967. *Polish Logic 1920–1939*. Oxford : Clarendon Press 17.17

McKay, Thomas J., 2006. *Plural Predication*. Oxford : Oxford University Press 17

Mill, John Stuart, 1895. *A System of Logic, ratiocinative and inductive*. London : Longmans, Green and Co., Ltd. 10

Nef, Frédéric, 1998. *L'Objet quelconque, recherches sur l'ontologie de l'objet*. Problèmes & Controverses. Paris : Librairie philosophique Jean Vrin 1

Nicod, Jean, 1917–1920. "A Reduction in the Number of Primitive Propositions of Logic". *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 19 : 32–44 4.6

Peirce, Charles Sanders, 1932. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce : Elements of Logic*, volume 2. Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press. Edited by Charles Hartshorne and Paul Weiss 11

Peirce, Charles Sanders, 1933. *Collected Papers of Charles Sanders Peirce : Exact Logic*, volume 3. Cam-

bridge, Massachusetts : Harvard University Press. Edited by Charles Hartshorne and Paul Weiss 11

von Prantl, Karl, 1855–1870. *Geschichte der Logik im Abendlande*. Leipzig : S. Hirzel Verlag. 4 volumes, reimprimés comme von Prantl (1955) 1.1, 17.17

von Prantl, Karl, 1955. *Geschichte der Logik im Abendlande*. Berlin : Akademie Verlag. Reimpression de von Prantl (1855–1870) 17.17

Priest, Graham, 1993. "Can Contradictions Be True ?" *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volume* 67 : 35–54 2.2

Prior, Arthur Norman, 1955. *Formal Logic*. Oxford : Clarendon Press 4, 18, 23

Putnam, Hilary, 1975a. *Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers, Volume 1*. Cambridge : Cambridge University Press 1.2

Putnam, Hilary, 1975b. *Mind, Language and Reality : Philosophical Papers, Volume 2*. Cambridge : Cambridge University Press 1.2

Quine, Willard van Orman, 1948. "On What There Is". *Review of Metaphysics* 2 : 21–38. Reprinted as Quine (1951), in Quine (1953: 1–19) and in Loux (1970: 33–43) 1.2, 9

Quine, Willard van Orman, 1950. *Methods of Logic*. Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press 1.2, 21, 10.5, 10.5, 14, 17.17

Quine, Willard van Orman, 1951. "On What There Is". *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volume* 25 : 149–160 17.17

Quine, Willard van Orman, 1953. *From a Logical Point of View : 9 Logico-Philosophical Essays*. Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press 1.2, 17.17

Quine, Willard van Orman, 1955. "On Frege's Way Out". *Mind* 64 : 145–159. Reprinted in Quine (1996) 4.3

Quine, Willard van Orman, 1960. *Word and Object*. Cambridge, Massachusetts : The MIT Press 1.2

Quine, Willard van Orman, 1970. *Philosophy of Logic*. Cambridge : Cambridge University Press 1.2

Quine, Willard van Orman, 1971. "The inscrutability of reference". Dans Steinberg, Danny D. et Jacobovits, Leon A., éditeurs, *Semantics : An Interdisciplinary Reader in Philosophy, Linguistics, and Psychology*, p. ? ? Cambridge : Cambridge University Press (document)

Quine, Willard van Orman, 1972. *Méthodes de logique*. Paris : Armand Colin. Traduction de Quine (1950) par M. Clavelin

Quine, Willard van Orman, 1996. *Selected Logic Papers*. Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press 17.17

Quine, Willard Van Orman, 2004. *Du point de vue logique : neuf essais logico-philosophiques*. Bibliothéque des textes philosophiques. Paris : Librairie philosophique Jean Vrin. Traduction française de Quine (1953) par Sandra Laugier 9

Recanati, François, 2000. *Oratio Obliqua, Oratio Recta : An Essay on Metarepresentation*. Cambridge, Massachusetts : The MIT Press 29

Recanati, François, 2004. *Literal Meaning*. Cambridge : Cambridge University Press 23

Rorty, Richard, éditeur, 1967. *The Linguistic Turn*. Chicago, Illinois : University of Chicago Press 1.2

Russell, Bertrand Arthur William, 1905. "On Denoting". *Mind* 14 : 479–493. Reprinted in Feigl et Sellars (1949: 103–115), in Russell (1956) and Russell (1973: 103–119) 1.2, 8, 9.5, 17.17

Russell, Bertrand Arthur William, 1906. "The Theory of Implication". *American Journal of Mathematics* 28 : 159–202 18

Russell, Bertrand Arthur William, 1956. *Logic and Knowledge : Essays, 1901–1950*. London : George

Allen & Unwin. Edited by Robert Charles Marsh 17.17

Russell, Bertrand Arthur William, 1973. *Essays in Analysis*. London : George Allen & Unwin. Edited by Douglas Lackey 17.17

Russell, Bertrand Arthur William, 1989a. "De la Dénotation". Dans Russell (1989b), pp. 203–218. Traduction de Russell (1905) par J.-M. Roy 9.5

Russell, Bertrand Arthur William, 1989b. *Écrits de Logique Philosophique*. Paris : Presses Universitaires de France. Trad. de l'anglais de Russell (1905) par J.-M. Roy 17.17

Russell, Bertrand Arthur William et Whitehead, Alfred North, 1910. *Principia mathematica*. Cambridge : Cambridge University Press. 3 volumes, 1910, 1912, 1913, 2nd ed. 1925, 1927 ; abridged as Russell et Whitehead (1956) 2, 4.3

Russell, Bertrand Arthur William et Whitehead, Alfred North, éditeurs, 1956. *Principia Mathematica to *56*. Cambridge : Cambridge University Press 17.17

Savage, C. Wade, 1967. "The Paradox of the Stone". *The Philosophical Review* 76 : 74–79 1.5

Scheffer, H.M., 1913. "A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebras". *Transactions of the American Mathematical Society* 14 : 481–488 4.2

Schlick, Moritz, 1925. *Allgemeine Erkenntnislehre*. Berlin : Julius Springer, 2 édition. Reprint : Schlick (1979) 1.2, 17.17

Schlick, Moritz, 1979. *Allgemeine Erkenntnislehre*. Frankfurt a.M. : Suhrkamp Verlag, 2 édition. Reprint of Schlick (1925) 17.17

Schrader, David E., 1979. "A Solution to the Stone Paradox". *Synthèse* 42 : 255–264 1.5

Smullyan, Raymond M., 1968. *First-Order Logic*. Nombre 43 dans Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Berlin : Springer Verlag 5.3, 7.3, 13.2

Strawson, Peter Frederick, 1949. "Truth". *Analysis* 9 : 83–93 1.2

Suppes, Patrick, 1957. *Introduction to Logic*. Princeton, New Jersey : Van Nostrand 1

Tarski, Alfred, 1930. "O pojęciu prawdy w odniesieniu do sformalizowanych nauk dedukcyjnych". *Ruch Filozoficzny* 12 : 210–211 17.17

Tarski, Alfred, 1933. "Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych". *Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III, nauk matematycccznofizycznych (Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, Sciences Mathématiques et Physiques)* 26. Lectures given at the Logic Section of the Philosophical Society in Warsaw on October 8, 1930 and at the Polish Philosophical Society in L□ow on December 5, 1930 ; reprinted in Zygmunt (1995: 13–172) ; a summary of the chief results was published as Tarski (1930) and revised German translation published as Tarski (1935) ; English translation Tarski (1956: 152–278) 4.3, 10.4, 17.17

Tarski, Alfred, 1935. "Der Wahrheitsbegriff in den Sprachen der deduktiven Disziplinen". *Studia Philosophica* 1 : 261–405. Translation of Tarski (1933) 17.17

Tarski, Alfred, 1956. *Logic, Semantics, Metamathematics*. Indianapolis, Indiana : Hackett Publishing Co. Trans. J.H. Woodger, 2nd ed. 1983 edited and introduced by John Corcoran published by Oxford University Press 17.17

Venn, John, 1880. "On the diagrammatic and mechanical representations of propositions and reasoning". *The London Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 10 : 1–18 8.3

Williamson, Timothy, 2003. "Everything". Dans Zimmerman, Dean W. et Hawthorne, John, éditeurs, *Philosophical Perspectives 17 : Language and Philosophical Linguistics*, p. ? ? Oxford : Basil Blackwell Publishers 21

Wittgenstein, Ludwig, 1921. “Logisch-philosophische Abhandlung”. *Annalen der Natur- und Kunstphilosophie* 14 : 184–261. Cited after Wittgenstein (1998) 6, 5.3

Wittgenstein, Ludwig, 1922. *Tractatus logico-philosophicus.* International Library of Psychology, Philosophy and Scientific Method. London : Kegan Paul. Trench, Trubner & Co. 1.2

Wittgenstein, Ludwig, 1998. *Logisch-philosophische Abhandlung / Tractatus logico-philosophicus.* Frankfurt a.M. : Suhrkamp Verlag. Critical ed. by Brian McGuiness and Joachim Schulte 17.17

Wright, Crispin, 1983. *Frege's Conception of Numbers as Objects.* Aberdeen : Aberdeen University Press 10

Zermelo, Ernst, 1908. “Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I”. *Mathematische Annalen* 65 : 261–181. Translated by Stefan Bauer-Mengelberg in van Heijenoort (1967: 199–215) 4.3

Zygmunt, Jan, éditeur, 1995. *Alfred Tarski, Pisma Logiczno-Filozoficzne*, volume I. Warszawa : Wydawnictwo Naukowe PWN 17.17